

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
(ИКИ РАН)

Пр-2175

**П. Б. Руткевич, Г. С. Голицын, Б. П. Руткевич**

# **ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАЧНОСТИ НАД ОКЕАНОМ ПРИ ВТОРЖЕНИИ ХОЛОДНОГО ВОЗДУХА**

**МОСКВА  
2014**

## Формирование облачности над океаном при вторжении холодного воздуха

*П. Б. Руткевич<sup>1</sup>, Г. С. Голицын<sup>2</sup>, Б. П. Руткевич<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Институт космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН),  
pbrutkevich@gmail.com

<sup>2</sup> Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук  
(ИФА РАН), gsg@ifaran.ru

Тропические циклоны часто возникают при вторжениях сухого и более холодного воздуха на открытый океан. Полярные ураганы образуются, когда холодный арктический воздух появляется над открытыми водоёмами. Процессы испарения и вертикального переноса влаги и тепла с поверхности водоёмов — основа образования облачности и циклогенеза в целом. Ситуация, когда наступающий относительно холодный устойчивый воздух надвигается на более тёплый океан, является типичной задачей о развитии турбулентного конвективного слоя и может быть решена при использовании понятия плавучести. Применительно к реальной атмосфере плавучесть должна учитывать процессы фазовых превращений, которые определяют положение нижней границы и толщину облака как функцию времени. В данной работе с учётом фазовых превращений атмосферной влаги рассмотрена задача о формировании облака над более тёплым океаном. Определены в развитии границы облака (верхняя и нижняя) и профили тепла и пара внутри него. Опускание нижней границы определяется увеличением влажности подоблачного слоя. Построена приближенная аналитическая модель этих процессов и численно решены полные уравнения. Приближённые уравнения хорошо описывают зависимость термодинамических функций от высоты. Шкала высот для влаги примерно втрое меньше, чем для температуры.

Работа была выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-05-64275-а).

*Ключевые слова:* конвективный слой, тропические циклоны, атмосфера, фазовые превращения, формирование облака, влажность.

## Cloudiness Formation Over Ocean Due to Intrusion of Cold Air

*P. B. Rutkevich<sup>1</sup>, G. S. Golitsyn<sup>2</sup>, B. P. Rutkevych<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Space Research Institute (IKI RAN), pbrutkevich@gmail.com

<sup>2</sup> A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of Russian Academy of Sciences  
(IAP RAS), gsg@ifaran.ru

Tropical cyclones often appear due to intrusion of more drier and colder air over ocean. Polar hurricanes form when cold arctic air appears over open water bodies. Evaporation processes and vertical moisture and heat transfer from the sea surface is the foundation of cloudiness formation and the cyclogenesis as a whole. The situation when relatively cold stable air intrudes on the warmer ocean is typical for convective layer development and can be solved by means of buoyancy concept. Applied to real atmosphere the buoyancy should take into account the phase transformations processes that determine the lower cloud boundary and the cloud thickness as a time function. In the present paper a problem on the cloud formation by means of the air water phase transformations over the warmer ocean is considered. The cloud boundaries (the upper and the lower) of the cloud dynamics and the vapor and heat profiles are determined. The cloud lower boundary downward movement is determined by the moisture increase of the subcloud layer. An approximate analytical model of these processes is formulated and the exact equations are solved numerically. The approximate equations are good in obtaining the height dependences. The moisture scale height is approximately three times less than the temperature scale height.

*Keywords:* convective layer, tropical cyclones, atmosphere, phase transitions, cloud formation, moisture.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача о вторжении воздушного потока с берега на поверхность водоёма требует учёта как температуры, так и влажности. Набегающий поток воздуха имеет устойчивую стратификацию, а подстилающая поверхность океана обычно теплее нижних воздушных слоёв. В этом случае в нижней части атмосферы образуется конвективный слой, который растёт по мере вовлечения слоёв невозмущённого воздуха. Конвективный слой хорошо перемешан в силу развитой турбулентности [Голицын, 2008]. В общем случае конвективный слой характеризуется не только температурой, но и концентрацией примеси (например, соль в растворе, пар в атмосфере). Подобная задача применительно к небольшим высотам над сушей была решена в работе [Зилитинкевич, 1987]. Следует заметить, что представленная в этой работе модель образования турбулентного конвективного слоя применима, строго говоря, пока потенциальная температура верхней границы конвективного пограничного слоя не превысила температуры поверхности. В случае, когда конвективный слой достигает уровня образования облаков, где включаются процессы фазовых превращений атмосферной влаги и выделение скрытой теплоты конденсации, развитие конвективного слоя ускоряется и может захватывать всю тропосферу, если она не слишком устойчива.

### 1. ТОЛЩИНА ПОДОБЛАЧНОГО КОНВЕКТИВНОГО СЛОЯ

Рассмотрим задачу, в которой воздушный поток надвигается на более тёплый океан. В этом случае на границе раздела происходит нагрев нижних слоёв воздуха, а также его насыщение водяным

паром из-за испарения с поверхности. Вышележащий слой воздуха у верхней границы конвективного слоя постепенно вовлекается в турбулентные движения, приводя к росту толщины слоя. Надвигающийся воздушный поток и формирующийся конвективный слой являются смесями воздуха и пара, а также имеют различную температуру и отношение смеси  $q(z)$ . Рассмотрим вначале образование и распространение такого слоя в атмосфере в подоблачном слое.

Пусть надвигающийся поток воздуха имеет температуру  $T_1(z)$ . Вертикальное распределение температуры считаем для простоты линейным с высотой. На рис. 1 вертикальное распределение температуры (адиабатической) надвигающегося потока воздуха представлено сплошной линией. Температуру воздуха  $T_S(z=0)$  на поверхности океана считаем выше температуры надвигающегося воздушного потока  $T_a$ . У самой поверхности океана должен образовываться тонкий молекулярный слой [Голицын, 2008; Зилитинкевич, 1987, 2013], в котором температура должна резко падать — от температуры океана до значения  $T_1(0)$ . То же для отклонения влажности: вблизи поверхности в молекулярном слое водяного пара относительная влажность доходит до 100 %. Относительная влажность является функцией температуры и изменяется по закону Клапейрона-Клаузиуса. Этот тонкий слой представлен на рис. 1 в виде тонких кривых линий. Пунктирные линии на рисунке описывают вертикальное адиабатическое распределение температуры в турбулентном конвективном слое после его образования.

Введём минимальное количество предположений и переменных, которые нужны для решения задачи [Матвеев, 2000].

1. Считаем, что внутри приводного слоя воздух хорошо перемешан, температура строго адиабатическая (для заданной влажности) и т. п.
2. Вся температура в слое можно параметризовать единственным значением: адиабатической температурой воздуха у поверхности океана  $T_a(t)$ , в слое перемешивания распределение температуры адиабатическое до слоя конденсации.
3. Искомый параметр задачи — высота слоя  $h(t)$ .

Предполагаем, что профиль надвигающегося «сухого» потока воздуха устойчив:

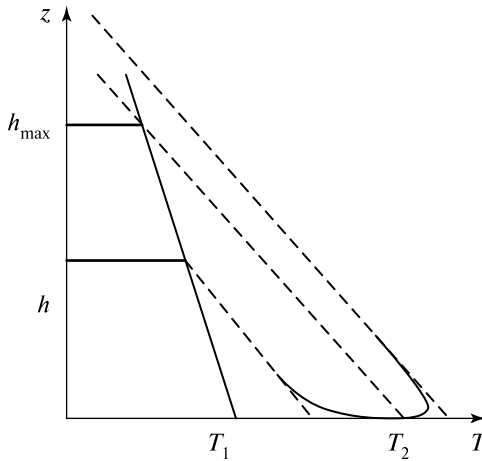
$$T_1(z) = T_{10} + (\gamma_a + \gamma_{st})z, \quad (1.1)$$

здесь  $T_{10}$  — исходная температура набегающего потока воздуха вблизи подстилающей поверхности;  $\gamma_a = -g/c_p \approx -10^\circ\text{C}/\text{км} < 0$  — сухоадиабатический градиент температуры;  $\gamma_{st} > 0$  — добавка к градиенту, отвечающая за устойчивость набегающего воздуха. Введём также отношение смеси или массовую долю пара над океаном  $q(t) = \rho_v(t)/\rho_a(t)$ , где  $\rho_v(z)$  — плотность пара;  $\rho_a(z)$  — плотность атмосферного воздуха.

Внутри конвективного слоя предполагаем профиль температуры адиабатическим, а массовую долю пара — постоянной по высоте, тогда профиль температуры в нём будет иметь вид:

$$T_2(z, t) = T_S(t) + \gamma'_a(t)z, \quad (1.2)$$

где  $T_S$  — температура воздуха у поверхности воды;  $\gamma'_a(t) < 0$  — адиабата с учётом пара. Относительная влажность меняется со временем и с температурой и далее с высотой  $q_2 = q_2(t) > 0$ . Она определяется скоростью испарения с поверхности океана. Поскольку все вертикальные градиенты известны, то задача может быть определена через три параметра:  $T_{10}(t)$ ,  $T_S(t)$ ,  $q_2(t)$ .



**Рис. 1.** Распределение температуры: сплошная линия — вертикальное распределение надвигающегося потока воздуха; пунктирные линии — вертикальное адиабатическое распределение температуры в турбулентном конвективном слое после его образования; тонкие сплошные линии — относительно тонкий слой, в котором температура должна резко измениться до значения  $T_0$

В линейном приближении по влажности плавучесть одной смеси относительно другой получена в приложении, формула (П8). С учётом выбранных профилей температуры выражение для плавучести (П8) переходит в следующее:

$$b(z) = g \frac{T_{20} - T_{10}}{T_{20}} + g \frac{\gamma_{st} - (\gamma'_a - \gamma_a)}{T_{10}} z - g \frac{\mu_g - \mu_v}{\mu_v} (q_2 - q_1), \quad (1.3)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\mu_g$  — молярная масса сухого воздуха;  $\mu_v$  — молярная масса водяного пара. В данной работе мы ограничимся рассмотрением случая минимальной интенсивности вовлечения (маргинальная конвекция [Зилитинкевич, 1987], при которой скачок плавучести на внешней границе конвективного слоя не образуется, но меняется его вертикальный профиль  $db/dz$ ). Учёт вовлечения может увеличивать высоту перемешивания подоблачного слоя примерно на 20 % (см. [Зилитинкевич, 1987]).

Рост конвективного слоя идёт до высоты, где плавучесть воздуха в слое совпадает с плавучестью набегающего потока воздуха,  $b(h) = 0$ , и потому высота  $h$  определяется формулой

$$h(t) = \frac{T_{10}}{\gamma_{st}} (q_2(t) - q_1) \mu' = \frac{T_{10} - T_{20}(t)}{\gamma_{st}}, \quad (1.4)$$

где  $\mu' = (\mu_g - \mu_v) / \mu_v$ , а также пренебрегается отличием  $\gamma_a$  и  $\gamma'_a$  в ненасыщенном паром воздухе [Emanuel, 1994]. Видно, что плавучесть и высота слоя зависят от двух независимых параметров —  $T_S(t)$ ,  $q_2(t)$ , которые изменяются по разным законам, поэтому неудобно использовать поток плавучести для описания роста слоя. Вместо этого рассмотрим отдельно потоки тепла и водяного пара.

Потоки тепловой энергии и водяного пара с поверхности океана описываются так называемыми балк-формулами (см., напр., [Голицын, 2008]):

$$F_Q = c_T \rho c_P U_{10} \Delta T, \quad F_q = c_E \rho U_{10} \Delta q, \quad (1.5)$$

здесь  $\rho$  — плотность воздуха над водой;  $c_P$  — теплоёмкость при постоянном давлении;  $U_{10}$  — скорость ветра над поверхностью моря на высоте  $z_0 = 10$  м. В работе [Smith, 2012] определяются также коэффициенты сопротивления тепла и влаги  $c_T \approx c_E \approx 1,2 \cdot 10^{-3} = c_0$ , которые оказываются близкими по величине и носят названия числа Стэнтона. Для простоты будем считать, что набегающий

поток воздуха имеет постоянную по высоте скорость и тогда можно перейти к системе отсчёта, где набегающий поток воздуха покоится. В рассматриваемой модели удобно перейти от независимой переменной времени к расстоянию от берега — координате  $x$  по формуле  $x = c_0 U_{10} t$ , предполагая, что весь слой воздуха движется со скоростью  $U_{10}$ , а не только его часть вблизи поверхности океана. Или, в безразмерном виде,

$$\xi = \frac{c_0 U_{10} t}{H_a}, \quad (1.6)$$

где высота однородной атмосферы  $H_a = RT_{20}/g$  [Матвеев, 2000], зависящая от температуры поверхности, равна приблизительно 8 км.

В конвективном слое вертикальные распределения давления и плотности воздуха близки к адиабатическим распределениям сухого воздуха, которые определяются формулами:

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \xi\right)^{\kappa/(\kappa - 1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \xi\right)^{1/(\kappa - 1)}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \xi, \quad (1.7)$$

здесь  $\xi = h/H_a$  — безразмерная высота над поверхностью океана;  $\kappa = c_p/c_v$  — показатель адиабаты;  $c_v$  — теплоёмкость при постоянном объёме;  $P_0$ ,  $\rho_0$  и  $T_0$  — давление, плотность и температура воздуха на поверхности океана;  $R$  — удельная газовая постоянная сухого воздуха.

Уравнение потока тепла

$$c_p \frac{dT_S}{dt} \int_0^{h(t)} \rho_a(z) dz = F_Q = c_0 \rho_0 c_p U_{10} (T_0 - T_S(t)) \quad (1.8)$$

описывает баланс тепла в слое: нагрев столба воздуха единичного сечения и высоты  $h(t)$  в слое происходит за счёт притока тепла (1.5). В правой части — энергия, втекающая с поверхности, в левой — энергия, необходимая для нагрева очередного участка конвективного слоя. В уравнении (1.8) интеграл вынесен из-под знака производной, поскольку вплоть до высоты  $h(t)$  температурный профиль достигает адиабатического профиля  $T_2(z, t)$ , при переходе к новой высоте  $h(t + dt)$  прирост температуры  $dT_2(z, t)$  будет постоянен по высоте. По мере роста  $T_S(t)$  поток тепла с поверхности океана уменьшается. Подставляя профиль плотности (1.7), получаем уравнение для температуры:

$$\frac{d\theta_S(\xi)}{d\xi} \left[ \int_{\xi_0}^{\xi(\xi)} \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \zeta \right)^{1/(\kappa-1)} d\zeta \right] = (\theta_0 - \theta_S(\xi)), \quad (1.9)$$

где введена безразмерная температура  $\theta = T/T_0$ .

Аналогично получим интегро-дифференциальное уравнение для содержания пара  $q_2(\xi)$ , за счёт притока пара через нижнюю границу, в безразмерном виде:

$$\frac{dq_2(\xi)}{d\xi} \left[ \int_{\xi_0}^{\xi(\xi)} \left( 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \zeta \right)^{1/(\kappa-1)} d\zeta \right] = (q_{\max} - q_2(\xi)). \quad (1.10)$$

Здесь  $q_{\max}$  — плотность насыщенного пара у поверхности при температуре поверхности, где относительная влажность равна 100 %. В уравнении (1.10) предполагаем, что весь приток пара через нижнюю границу идёт на равномерное насыщение конвективного слоя влагой. Таким образом, полная система уравнений содержит два дифференциальных уравнения — (1.9), (1.10) — и одно алгебраическое — (1.4), которое в безразмерных переменных принимает вид:

$$\xi(\xi) = \frac{\theta_{10}}{H_\gamma} [q_2(\xi) - q_1] \mu' - \frac{\theta_{10} - \theta_S(\xi)}{H_\gamma}, \quad (1.11)$$

где  $H_\gamma = \gamma_{st} H_a / T_0 = \gamma_{st} R / g$ . Интегрируем левые части уравнений (1.9), (1.10) (учитываем только ведущий член разложения по малому параметру безразмерной высоты  $\zeta$ ):

$$\frac{d\theta_S(\xi)}{d\xi} (\xi(\xi) - \xi_0) = (\theta_0 - \theta_S(\xi)), \quad (1.12)$$

$$\frac{dq_2(\xi)}{d\xi} (\xi(\xi) - \xi_0) = (q_{\max} - q_2(\xi)), \quad (1.13)$$

где обозначено  $\xi_0 = z_0 / H$ .

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (1.11)–(1.13) с граничными условиями в нуле:

$$\theta_S(0) = \theta_{10}, \quad q_2(0) = q_1. \quad (1.14)$$

Решение уравнений (1.11)–(1.13) можно записать, используя специальную табулированную функцию Ламберта  $W(x)$ . Для любого комплексного  $z$  она определяется функциональным уравнением:



$x = W(x) \exp(W(x))$ . Эта функция является также решением дифференциального уравнения [Дубинов и др., 2006].

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}. \quad (1.15)$$

Таким образом, получаем решения для отношения смеси  $q_2(\xi)$ , безразмерной температуры  $\theta_S(\xi)$  и безразмерной высоты турбулентного конвективного слоя  $\zeta(\xi)$ :

$$q_2(\xi) = q_{\max} + \Delta q W \left[ -\exp \left[ -1 - \frac{H_\gamma \xi}{\theta_{10} \mu' \Delta q + \Delta \theta} \right] \right], \quad (1.16)$$

$$\theta_S(\xi) = \theta_0 + \Delta \theta \cdot W \left[ -\exp \left[ -1 - \frac{H_\gamma \xi}{\theta_{10} \mu' + \Delta \theta} \right] \right], \quad (1.17)$$

$$\zeta(\xi) H_\gamma = (\Delta q \mu' \theta_{10} + \Delta \theta) \left\{ 1 + W \left[ -\exp \left[ -1 - \frac{H_\gamma \xi}{\theta_{10} \mu' \Delta q + \Delta \theta} \right] \right] \right\}. \quad (1.18)$$

Асимптотика решения для отношения смеси при малых значениях аргумента имеет вид:

$$q_2(\xi) \approx q_1 + \Delta q \sqrt{\frac{2H_\gamma \xi}{\theta_{10} \mu' \Delta q + \Delta \theta}}. \quad (1.19)$$

Асимптотика решения для отношения смеси при больших значениях аргумента, очевидно, равна  $q_2(\infty) = q_{\max}$ . Асимптотика решения для безразмерной температуры при малых значениях аргумента имеет вид:

$$\theta_S(\xi) = \sqrt{\frac{2H_\gamma \xi}{\theta_{10} \mu' \Delta q + \Delta \theta}}. \quad (1.20)$$

Асимптотика решения для безразмерной температуры при больших значениях аргумента, очевидно, равна  $\theta_S(\infty) = \theta_0$ . Асимптотика решения для безразмерной высоты слоя при малых значениях аргумента имеет вид:

$$\zeta(\xi) \approx \left( \theta_{10} \mu' + \frac{\Delta \theta}{\Delta q} \right) \frac{\Delta q}{H_\gamma} \sqrt{\frac{2H_\gamma \xi}{\theta_{10} \mu' \Delta q + \Delta \theta}}. \quad (1.21)$$

Асимптотика решения для высоты слоя при больших значениях аргумента равна:

$$\xi(\infty) = \xi_{\max} = \frac{\theta_{10} \mu' \Delta q + \Delta \theta}{H_{\gamma}}. \quad (1.22)$$

В размерных переменных выражение для асимптотики высоты слоя при больших значениях аргумента принимает вид:

$$H_{\max} = \frac{(T_0 - \Delta T) \mu' \Delta q + \Delta T}{\gamma_{st}}.$$

Хорошо известно, что развитие конвективного турбулентного слоя описывается корневой функцией времени, начиная от нулевого уровня [Зилитинкевич, 1987]. Однако в реальных условиях в океане все термодинамические параметры принято относить к высоте 10 м над поверхностью воды. В результате получается, что теоретическое рассмотрение конвективного турбулентного слоя с высоты, меньшей 10 м, т.е. его асимптотика вблизи начала процесса развития, теряет смысл. В нашей модели, начиная от некоторой (заданной) высоты также на начальной стадии, развитие слоя описывается корневой функцией времени. Однако далее процесс развития конвективного слоя выходит на стационар, рост слоя прекращается на некоторой высоте

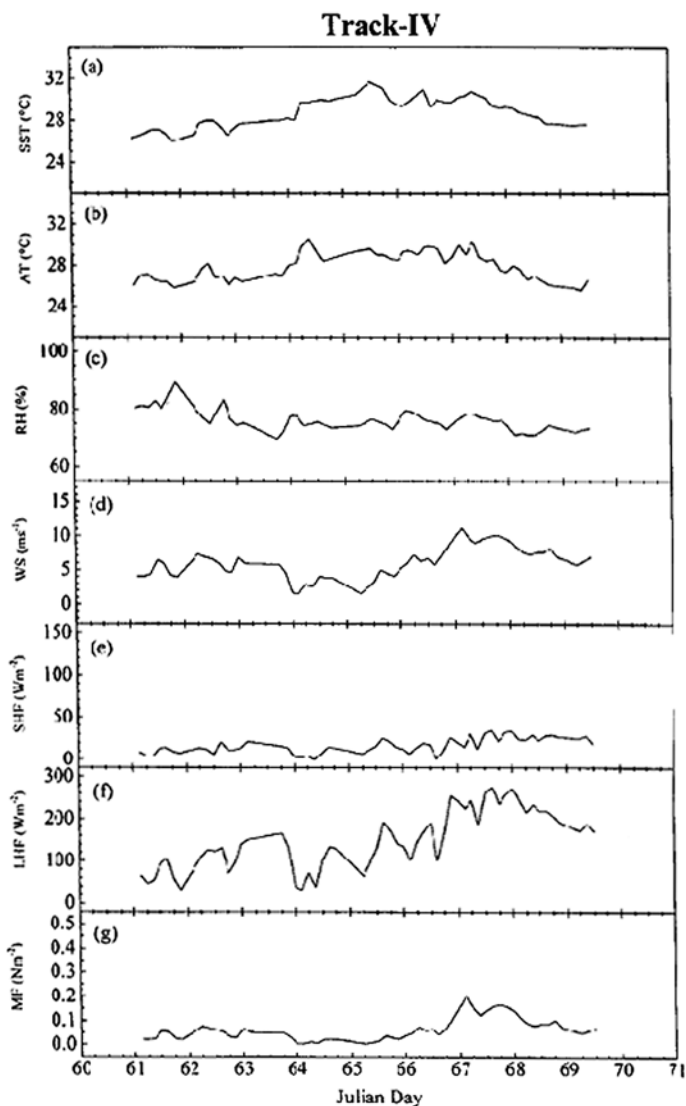
$$\xi = \xi_{\max}.$$

Используя факт, что градиент температуры в конвективном слое остаётся постоянным и прирост температуры на всей высоте одинаков, можно восстановить вертикальный профиль потока тепла как функцию высоты:

$$F_Q(z) = \int_z^{h_{\max}} dz' \rho_a(z') c_p \frac{dT_2}{dt}, \quad (1.23)$$

а прирост температуры  $T_2$  во всем слое обусловлен потоком тепла на нижней границе

$$F_Q(0) = \int_0^{h_{\max}} dz' \rho_a(z') c_p \frac{dT_2}{dt}. \quad (1.24)$$



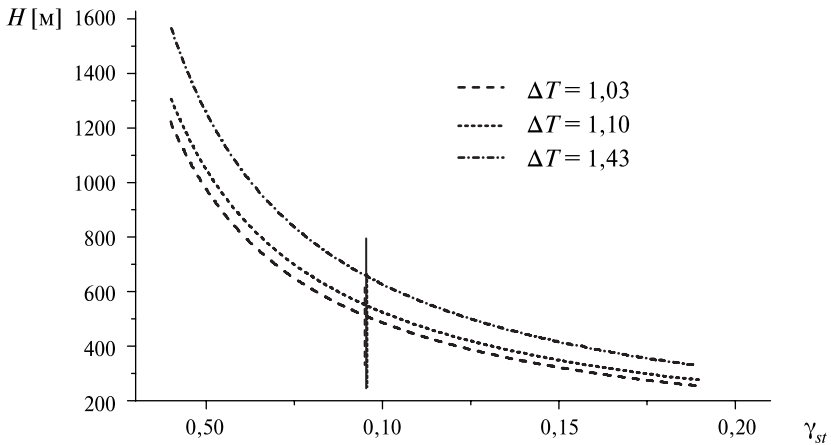
**Рис. 2.** Параметры взаимодействия океана и атмосферы как функции времени в эксперименте (INDOEX, IFP-99; SK-14 Cruise) над западной тропической областью Индийского океана из работы [Subrahmanyam et al., 2003]: (a) — температура поверхности океана [°C]; (b) — температура воздуха на высоте 10 м над уровнем океана [°C]; (c) — относительная влажность [%]; (d) — скорость ветра [м/с]; (e) — поток явного тепла [Вт/м<sup>2</sup>]; (f) — поток скрытого тепла [Вт/м<sup>2</sup>]; (g) — поток импульса [Н/м<sup>2</sup>]

Таким образом, вертикальное распределение потока тепла имеет вид

$$F_Q(z) = F_Q(0) \left( \int_z^{h_{\max}} \rho_a(z') dz' / \int_0^{h_{\max}} \rho_a(z') dz' \right), \quad (1.25)$$

где высота конвективного слоя  $h_{\max}(T_2, q_2)$  определяется значениями температуры и влажности у поверхности воды, согласно уравнению (1.4).

На рис. 2 представлены параметры взаимодействия океана и атмосферы как функции времени в эксперименте (INDOEX, IFR-99; SK-14 Cruise) над западной тропической областью Индийского океана из работы [Subrahmanyam et al., 2003]. На рис. 3 приведена высота конвективных турбулентных слоёв на больших расстояниях от места начала формирования как функция отличия безразмерного градиента температуры наступающего воздушного потока от адиабатического градиента температуры у поверхности воды.



**Рис. 3.** Высота конвективного турбулентного слоя на больших расстояниях от места начала формирования как функция отличия безразмерного градиента температуры наступающего воздуха от адиабатического градиента температуры у поверхности воды [Мохов, 1993]. Приведены усреднённые графики за 2-й день (сутки 62,  $\Delta T = 1,03$ ), за 5 сут (сутки 62–66,  $\Delta T = 1,1$ ) и 5 сут (сутки 62–66,  $\Delta T = 1,43$ ) периода IV. Экспериментальные «усы», нанесённые на график, также получены из анализа книги [Мохов, 1993]. Значения  $\Delta T$  и  $\Delta q$  определялись из данных работы [Subrahmanyam et al., 2003] о потоках тепла и пара с поверхности океана и пересчитывались по формулам (1.5)

Приведены усреднённые графики за разное время и различные значения разности наступающего и поверхностного воздуха, полученные на основе результатов экспериментов из работы [Subrahmanyam et al., 2003]. Значения  $\Delta T$  и  $\Delta q$  определялись из данных о потоках тепла и пара с поверхности океана (см. рис. 2) и пересчитывались по формулам (1.5). Вертикальный отрезок — экспериментальные «усы» — соответствует вертикальному градиенту температуры наступающего воздуха  $\text{grad } T(z) = -6,5 \text{ }^\circ\text{C}/\text{км}$  [Fleming, 1942]. Видно, что усреднённые данные согласуются с развитыми здесь представлениями.

## 2. НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ОБЛАЧНОСТИ

Поток пара от поверхности океана (1.5) постепенно насыщает влажной конвективный слой. Понижение температуры с высотой приводит к тому, что локальная относительная влажность достигает 100 % и эта точка отвечает нижней границе облачности.

Предположим, что относительная влажность воздуха у поверхности 100 %, а выше, на высоте 10 м, равна  $r$ . Тогда, зная распределение температуры по высоте и считая, что массовая доля пара  $q$  остаётся приблизительно постоянной, поскольку воздух можно считать достаточно хорошо перемешанным [Riehl, 1954; Ландау, Лифшиц, 1986], получим вертикальное распределение массовой доли пара:

$$q(z) = \frac{\rho_v(z)}{\rho_a(z)} = q_0,$$

и находим вертикальный профиль давления пара:

$$E(z) = r q_0 \rho_a(z) R_v T(z). \quad (2.1)$$

Давление насыщенного пара с высотой уменьшается в силу уменьшения температуры. Поэтому можно применить формулу Клапейрона-Клаузиуса [Ландау, Лифшиц, 1986; Матвеев, 2000]:

$$\left. \begin{aligned} E(z) &= E_{s0} \exp \left[ \frac{L(T)}{R_v} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T(z)} \right) \right], \\ L(T) &= 1,91846 \cdot 10^6 \left( \frac{T}{T - 33,91} \right)^2 \quad [\text{Дж}/\text{кг}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь  $R_v$  — удельная газовая постоянная водяного пара;  $L = L(T)$  — скрытая теплота парообразования (абсолютная температура поверхности воды) [Henderson-Sellers, 1984]. В наблюдаемом в природе диапазоне температур открытой поверхности океана — от  $-2$  до  $+30$  °C — величина  $L$  меняется на 3 %, что следует учитывать лишь при точных расчётах. В наших расчётах значение скрытой теплоты парообразования считалось постоянным —  $L = 2\,500\,000$  Дж/кг.

Приравнивая реальное распределение (2.1) и профиль давления насыщенного пара (2.2), получаем неявное выражение для точки росы:

$$r \frac{\rho_a(z)T(z)}{\rho_0 T_0} = \exp \left[ \frac{L}{R_v} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T(z)} \right) \right], \quad (2.3)$$

где учтено уравнение состояния пара  $E_{s0} = q_0 \rho_0 R_v T_s$ .

Уравнение (2.3) можно решить методом последовательных приближений. Считая вертикальное распределение температуры в подоблачном слое сухоадиабатическим (1.7), введём малый параметр

$$\varepsilon = 1 - \frac{T(z)}{T_0} = \frac{gz}{c_p T_0} \ll 1, \quad (2.4)$$

и разложим выражения в формуле (2.3) по малым значениям этого параметра. Получим уравнение для его определения.

$$\ln \frac{1}{r} - \alpha \varepsilon + o(\varepsilon) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь  $\alpha = L/(R_v T_0) - c_p/R$ ;  $L = L(T)$  — скрытая теплота парообразования. При  $T_0 = 300$  К получаем  $\alpha \approx 15$ .

Таким образом, для общего случая зависимости отношения смеси от высоты получим для нижней границы облачности очевидную формулу для уровня конденсации в безразмерном виде:

$$\xi_c = \frac{z_c}{H_a} = - \frac{\ln r}{\frac{RL}{c_p R_v T_0} - 1}. \quad (2.6)$$

В процессе решения предполагалось, что температура и влажность конвективного слоя приняли стационарное значение, обусловленное балансовыми формулами. Аналогичную оценку можно

проделать для промежуточного момента времени  $t$ . Высота точки росы в этом случае также получается функцией времени:

$$\zeta_c(t) = \frac{z_c}{H_a} = - \frac{\ln r(t)}{\frac{RL}{c_p R_v T_S(t)} - 1}, \quad (2.7)$$

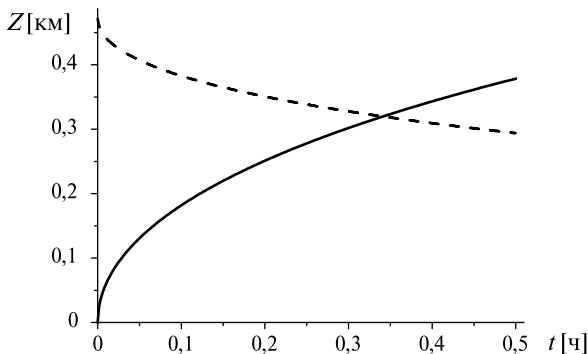
где  $r(t)$  и  $T_S(t)$  определяются из динамической задачи (1.16)–(1.18). Формула для точки росы (2.7) применима только внутри конвективного слоя, поэтому она будет определять положение нижней границы облака только при условии, что конвективный слой достиг точки росы.

Получаем уравнение, которое описывает момент времени, когда начинается образование облака:

$$\zeta_c(t) = \zeta(t), \quad (2.8)$$

где высота слоя определяется уравнением (1.18). Точное решение можно получить численно. В зависимости от параметров задачи кривые могут не иметь точки пересечения, и, следовательно, облако при таких параметрах не образуется.

На рис. 4 приведён пример динамики высоты конвективного слоя и высоты точки росы для тропического океана как функция времени. Видно, что высота точки росы в зависимости от времени понижается, что является следствием насыщения конвективного слоя паром.



**Рис. 4.** Высота конвективного слоя (сплошная кривая) и положение точки росы (пунктирная кривая) как функции времени в тропической области. В точке пересечения начинается конденсация, т.е. образование нижней границы облака

Отметим, что в точке пересечения начинает образовываться облако, и решения (1.16)–(1.18) становятся неприменимы. Динамика роста облака будет рассмотрена ниже.

Согласно климатологии океана [Fleming, 1942] над океанами относительная влажность  $r$  близка к 80 %. При температуре поверхности океана  $27^\circ\text{C}$ , характерной для развитого тропического шторма, по формуле (2.6) это соответствует 500 м над уровнем океана. Однако хорошо известно [Riehl, 1954], что нижняя граница облаков в развитом тропическом шторме располагается достаточно низко, на высоте 200...300 м. На основе формулы (2.6) можно определить влажность над поверхностью океана в тропическом шторме. Она оказывается порядка  $r \approx 0,9$ , что, естественно, выше обычной влажности над тропическим океаном в обычных условиях. Учитывая, что скорость ветра над поверхностью океана в развитом тропическом шторме достигает больших значений, приводя к интенсивному испарению, эта цифра выглядит достаточно правдоподобной.

Момент начала образования облака вносит дополнительные возможности развития слоя. В частности, если нижняя граница облака (2.6) окажется ниже предельной высоты  $\xi_{\max} = \xi(\infty)$  (1.22), то выделяемая скрытая теплота конденсации будет стимулировать дальнейший рост облака.

Отметим, что формально выражение (1.10) можно также применять после начала образования облака  $h_{\max} > z_c$ . В этом случае  $h_{\max}$  будет гипотетической высотой конвективного слоя, основанной на заданных параметрах  $T_2$  и  $q_2$ . Важным следствием этой гипотезы становится величина вертикального потока тепла из подоблачного слоя в облако:

$$F_Q(z_c) = F_Q(0) \frac{\int_{z_c}^{h_{\max}} \rho_a(z') dz'}{\int_0^{h_{\max}} \rho_a(z') dz'}, \quad (2.9)$$

которая определяется двумя параметрами системы —  $T_2$  и  $q_2$ , которые ранее были выбраны как базовые характеристики.

Аналогично можно получить вертикальный поток пара как функцию высоты и определить приток пара в облако через его нижнюю границу:



$$F_q(z_c) = F_q(0) \frac{\int_0^z \rho_a(z') c_p dz'}{\int_0^{h_{\max}} \rho_a(z') c_p dz'}, \quad (2.10)$$

которая оказывается функцией тех же двух параметров системы —  $T_2$  и  $q_2$ .

### 3. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА В АДИАБАТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Турбулентный конвективный слой в подоблачной атмосфере достигает уровня конденсации, на котором начинают образовываться облака. Термодинамика насыщенного влажного воздуха и вертикальные распределения термодинамических функций отличаются от соответствующих распределений в сухом воздухе. Таким образом, для изучения развития турбулентного конвективного слоя в плотных облаках необходимо учитывать термодинамику насыщенного влажного воздуха. Термодинамическая система насыщенного влажного воздуха описывается пятью параметрами — давлением  $P_m$  и плотностью  $\rho_m$  сухого воздуха, упругостью насыщенного пара  $E$ , плотностью пара  $\rho_v$  и температурой смеси  $T_m$ .

В случае термодинамического равновесия на эти параметры должны быть наложены три условия, ограничивающие размерность пространства параметров задачи до двух. Это — уравнение состояния сухого воздуха  $P_m = \rho_m R T_m$ , рассматриваемого как идеальный газ, уравнения состояния водяного пара  $E = \rho_v R_v T_m$ ,  $R_v$  — газовая постоянная водяного пара, также рассматриваемого как идеальный газ, и уравнение Клапейрона-Клаузиуса [Ландау, Лифшиц, 1986], которое мы запишем в дифференциальной форме

$$dE = \frac{EL}{R_v T_m^2} dT_m, \quad (3.1)$$

где  $L$  — скрытая теплота конденсации. Уравнение (3.1) описывает межфазное равновесие в насыщенном влажном воздухе. Уравнение состояния водяного пара можно представить как уравнение для отношения смеси  $q_m = \rho_v / \rho_m$ :

$$q_m = \frac{R}{R_v} \frac{E}{P_m}. \quad (3.2)$$

Уравнение состояния для сухого воздуха и уравнение для отношения смеси также удобно представить в дифференциальной форме:

$$\frac{dP_m}{P_m} = \frac{d\rho_m}{\rho_m} + \frac{dT_m}{T_m}, \quad \frac{dq_m}{q_m} = \frac{dE}{E} - \frac{dP_m}{P_m}. \quad (3.3)$$

Количество тепла  $dQ$ , подводимое к элементу объёма влажного воздуха, в условиях отсутствия диссипации расходуется на увеличение его внутренней энергии  $dU = C_V dT$ , совершение работы против сил давления  $P dV$  и испарение капель, т. е. на увеличение количества пара  $L dq$  [Ландау, Лифшиц, 1986; Emanuel, 1994]

$$dQ = TdS = C_V dT + PdV + Ldq. \quad (3.4)$$

Уравнение теплового баланса насыщенного влажного воздуха в этом случае принимает вид [Матвеев, 2000; Emanuel, 1994]:

$$\rho \left( C_V \frac{dT}{dt} + P \frac{dV}{dt} + L \frac{dq}{dt} \right) = \kappa \Delta T,$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности.

Уравнение (3.4) и вышеуказанные термодинамические условия описывают равновесную термодинамику насыщенного водяным паром воздуха, и с их помощью можно вычислить все его термодинамические параметры. Таким образом, добавляя условие равенства нулю дифференциала энтропии, получим систему четырёх линейных алгебраических уравнений для пяти дифференциалов:  $dP_m$ ,  $d\rho_m$ ,  $dT_m$ ,  $dE$ ,  $dq_m$ . Из этих уравнений можно определить отношение каких-либо двух, например отношение дифференциала давления воздуха к дифференциалу плотности воздуха, что равно квадрату скорости звука. В случае системы (3.1), (3.3), (3.4) получаем квадрат термодинамической скорости звука в насыщенном водяным паром воздухе [Rutkevich, 2002]

$$C^2 = \frac{dP_m}{d\rho_m} = \frac{RT_m K}{\frac{c_V}{c_P} - \frac{Lq_m}{c_P T_m} + \frac{L^2 q_m}{c_P R_v T_m^2}}, \quad K = 1 + \frac{L^2 q_m}{c_P R_v T_m^2}. \quad (3.5)$$

Принимая во внимание уравнение статики,  $dP_m/dz = -g\rho_m$ , получим обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка для вертикального распределения всех пяти термодинамических параметров:

$$\gamma_P = \frac{1}{P_m} \frac{dP_m}{dz} = -\frac{g}{RT_m}, \quad (3.6)$$

$$\gamma_\rho = \frac{d\rho_m}{\rho_m dz} - gc^2, \quad (3.7)$$

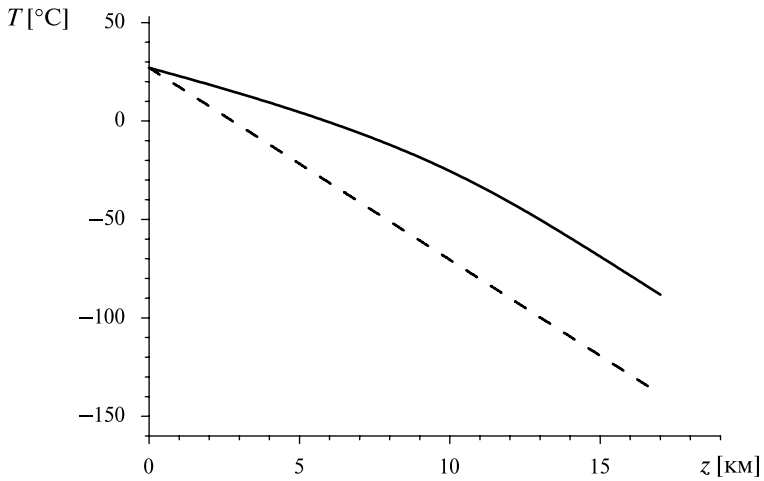
$$\gamma_T = \frac{dT_m}{dz} = -\frac{g}{Rc_p K} \left( R + \frac{Lq_m}{T_m} \right), \quad (3.8)$$

$$\gamma_q = \frac{dq_m}{q_m dz} = -\frac{g}{RT_m K} \left( \frac{R}{R_v} \frac{L}{c_p T_m} - 1 \right), \quad (3.9)$$

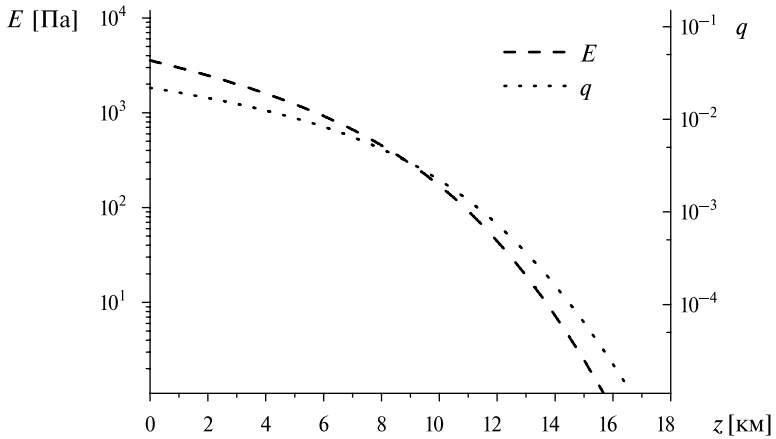
$$\gamma_E = \frac{dE}{E dz} = -\frac{gL}{R_v c_p T_m^2 K} \left( 1 + \frac{Lq}{RT_m} \right). \quad (3.10)$$

Уравнения (3.6)–(3.10) имеют естественный предельный переход к случаю абсолютно сухой атмосферы, откуда немедленно следуют распределения (1.7), справедливые в подоблачном слое атмосферы. Уравнения (3.6)–(3.10) описывают основное состояние для адиабатической постановки задачи, когда нет внешнего подогрева, — нет и конвекции. Правые части всех уравнений выражены в терминах температуры и отношения смеси, поэтому, выбирая соответствующие уравнения — (3.8), (3.9), — получаем замкнутую систему, определяющую основное состояние для вертикального распределения температуры и отношения смеси в адиабатическом случае. Остальные термодинамические переменные получаем интегрированием уравнений (3.6), (3.7), (3.8) и (3.10).

Уравнения (3.8), (3.9) представляет собой систему обыкновенных нелинейных уравнений и непосредственное интегрирование системы уравнений для температуры и влажности в аналитическом виде невозможно. На рис. 5 и 6 приводятся графики решений для вертикального распределения температуры, отношения смеси и упругости насыщенного пара в насыщенном влажном воздухе. Распределения давления и плотности в насыщенном влажном воздухе отличаются от соответствующих распределений в «сухом» воздухе незначительно.



**Рис. 5.** Вертикальные адиабатические распределения температуры в насыщенном влажном воздухе (сплошная линия) и в сухом воздухе (пунктирная линия)



**Рис. 6.** Вертикальное адиабатическое распределение упругости насыщенного пара и отношения смеси в насыщенном влажном воздухе

Для построения функции зависимости роста турбулентного конвективного слоя в облаке желательно иметь аналитические выражения (хотя бы приближённые) для вертикального распределения термодинамических параметров. Для построения приближен-

ного аналитического решения системы (3.6)–(3.10) заметим, что из этих пяти уравнений только два, для температуры и для плотности пара — (3.8) и (3.9) — представляют собой систему, а уравнения (3.6), (3.7) и (3.10) позволяют вычислить вертикальные распределения остальных термодинамических параметров, если распределения для температуры и плотности пара уже определены. В безразмерных переменных система (3.8) и (3.9) принимает вид:

$$\frac{d\theta_m}{d\xi} = -\frac{\frac{R}{c_p} + \frac{Lq_m}{T_{m0}\theta_m}}{K}, \quad (3.12)$$

$$\frac{dq_m}{q_m d\xi} = -\frac{\frac{R}{R_v} \frac{L}{c_p T_{m0} \theta_m} - 1}{K}. \quad (3.13)$$

Упростим уравнение (3.13), учитывая, что температура меняется с высотой медленнее всех других термодинамических функций, т.е. предположим, что температура в облаке, занимающем всю тропосферу, изменяется незначительно по сравнению с температурой на нижней границе облака. Поэтому можно положить её константой  $T_m(z) = T_f = \text{const}$  и решать упрощённое уравнение для плотности пара (3.13), которая меняется с высотой быстрее всех других термодинамических функций. Сначала будем считать  $T_f = T_{m0}$ . Интегрирование уравнения (3.13) при учёте вышеуказанного упрощающего предположения даёт зависимость высоты от влажности насыщенного паром воздуха:

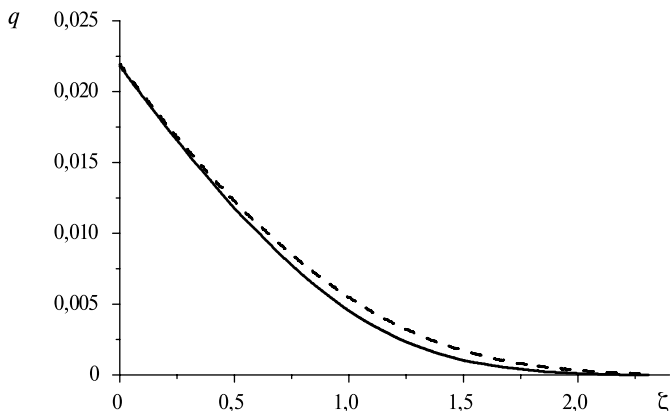
$$-\ln \frac{q_m}{q_{m0}} + A \left( \frac{q_m}{q_{m0}} - 1 \right) = B(\xi), \quad (3.14)$$

где введены обозначения для безразмерных параметров  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{L^2 q_{m0}}{c_p R_v T_{m0}^2}, \quad B = \frac{R}{R_v} \frac{L}{c_p T_{m0}} - 1.$$

Решить уравнения (3.14) можно с помощью специальной функции Ламберта  $W(x)$  (1.15). Таким образом, для отношения смеси  $q(\xi)$  как функции безразмерной высоты  $\xi$  получаем:

$$q_m(\xi) = q_{m0} \frac{W(A e^{A-B\xi})}{A}. \quad (3.15)$$



**Рис. 7.** Вертикальное адиабатическое распределение массовой доли пара в насыщенном влажном воздухе: сплошная линия — численное решение уравнений (3.12), (3.13); пунктирная линия — кривая, полученная аналитически на основе приближенной формулы (3.15)

Принимая для параметров тропической атмосферы  $T_0 = 300$  К,  $q_0 \approx 0,022$ , получаем  $A \approx 3,3$ ,  $B \approx 4,2$ . На рис. 6 приводится сравнение численного решения уравнений (3.8) и (3.9) и аналитического решения (3.15) для отношения смеси. На рис. 7 видно, что аналитическое вертикальное адиабатическое распределение массовой доли пара в насыщенном влажном воздухе хорошо описывает численное решение. На высоте тропической тропопаузы 17 км ( $\zeta \approx 2$ ) относительная погрешность аналитического решения составляет 30 %. Заметим, однако, что на такой высоте абсолютное значение массовой доли пара в насыщенном воздухе настолько мало, что отличие численного решения от аналитического роли не играет.

Рассмотрим уравнение для безразмерной температуры  $\theta_m(\zeta)$  в насыщенном влажном облаке (3.12) с учётом введённых обозначений (3.15):

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{R}{c_p} \frac{1 + C \frac{q_m(\zeta)}{q_{m0}} \frac{1}{\theta}}{1 + A \frac{q_m(\zeta)}{q_{m0}} \frac{1}{\theta^2}}, \quad (3.16)$$

где  $C = Lq_0 / (RT_{m0}) \approx 0,6$  с граничным условием  $\theta_c(\zeta_c)$  — температура нижней границы облачности  $\zeta_c$  (2.7).

Учитывая сухоадиабатическое распределение температуры (1.7), представим искомое влажноадиабатическое распределение как сумму сухоадиабатического распределения и поправки  $\varepsilon(\zeta)$ :

$$\theta(\zeta) = 1 - \frac{R}{c_p} \zeta + \varepsilon(\zeta). \quad (3.17)$$

Подставляем решение для отношения смеси (3.15) и получаем уравнение для поправки  $\varepsilon(\zeta)$ :

$$\frac{d \left( 1 - \frac{R}{c_p} \zeta + \varepsilon(\zeta) \right)}{d\zeta} = - \frac{\frac{R}{c_p} + \frac{Lq_{m0}\beta_m}{c_p T_{m0} \theta}}{1 + \frac{L^2 q_{m0} \beta_m}{c_p R_v T_{m0}^2 \theta^2}}. \quad (3.18)$$

Второе слагаемое в числителе правой части значительно меньше, чем первое как для тропических регионов, так и для регионов средних широт, поэтому для упрощения расчётов опустим это слагаемое. В знаменателе правой части пренебрегаем зависимостью температуры от высоты и, подставляя решение для отношения смеси (3.15), получаем простое уравнение для поправки к вертикальному распределению температуры  $\varepsilon(\zeta)$ :

$$\frac{d\varepsilon(\zeta)}{d\zeta} = \frac{R}{c_p \theta_c} \left[ 1 - \frac{1}{1 + W(Ae^{A-B\zeta})} \right] \quad (3.19)$$

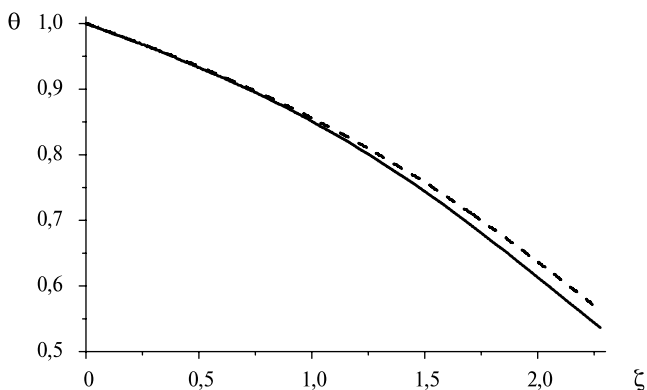
с граничным условием  $\varepsilon(\zeta_c)$ . Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{R}{c_p} \frac{1}{\theta_c} \left[ \zeta + \frac{1}{B} \ln \frac{W(Ae^{A-B\zeta})}{W(Ae^A)} \right]. \quad (3.20)$$

Таким образом, окончательное выражение для вертикального распределения температуры в насыщенном влажном воздухе принимает вид:

$$\theta(\zeta) = 1 - \frac{R}{c_p} \zeta + \frac{R}{c_p} \frac{1}{\theta_c} \left[ \zeta + \frac{1}{B} \ln \frac{W(Ae^{A-B\zeta})}{W(Ae^A)} \right]. \quad (3.21)$$

На рис. 8 приводятся графики вертикального адиабатического распределения массовой доли пара в насыщенном влажном воздухе. Сплошная линия есть численное решение уравнений (3.12), (3.13), пунктирная линия — кривая, полученная аналитически на основе приближенной формулы (3.21).



**Рис. 8.** Вертикальное адиабатическое распределение температуры в насыщенном влажном воздухе: сплошная линия — численное решение уравнений (3.12), (3.13); пунктирная линия — влажная адиабата, полученная аналитически на основе приближенной формулы (3.21)

#### 4. ТОЛЩИНА КОНВЕКТИВНОГО СЛОЯ В ОБЛАКЕ КАК ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ

Расчёт начального этапа формирования облака существенно отличается от расчёта роста конвективного подоблачного слоя. Резкое изменение градиента температуры на нижней границе облака и непрерывность температур в этой точке не позволяет использовать условие нулевой плавучести (аналогичное (1.4)) для вычисления верхней границы облака  $h_{c \max}$ . Динамика роста облака ограничена скоростью притока тепла и влаги, а условие нулевой плавучести ограничивает максимально возможную высоту облака для текущих значений параметров. В такой ситуации однородный рост облака может оказаться энергетически менее выгодным по сравнению с формированием узких «башенных» облаков, которые растут до  $h_{c \max}$ . В рассматриваемой модели полагаем рост облака однородным, что соответствует росту умеренной облачности и одномерной задаче.

Потоки тепла и влаги с поверхности океана определяются состоянием подоблачного слоя и продолжают также после начала формирования облака. Они изменяют состояние как подоблачного слоя, так и облака. Сосуществование и взаимодействие в задаче двух существенно разных областей требует наложить дополнительные условия. Примем условие непрерывности температуры и влажности в точке нижней границы облака. Влажно-



адиабатический градиент существенно меньше градиента наступающего потока воздуха, поэтому в момент образования нижней границы (см. п. 2) высота нулевой плавучести получает скачкообразное приращение. Таким образом, рост облака на начальном этапе ограничен скоростью поступления тепла и влаги, поэтому воспользуемся уравнением потока энтальпии. Предположим, что состояние подоблачного слоя и, следовательно, величина потоков остаётся постоянной, т. е. весь поток полной энтальпии напрямую переходит в облако, не влияя на состояние подоблачного слоя, и оценим скорость роста облака.

За время  $dt$  облако вырастает от  $z$  до  $z + dz$ , потребляя количество пара

$$\delta m_{v,1} = \int_z^{z+dz} \rho(z') [q_2(z') - q_1] dz'. \quad (4.1)$$

Полный баланс тепла при этом будет составлять:

$$L(F_q dt - \delta m_{v,1}) + F_Q dt = c_p \int_z^{z+dz} \rho(z') [T_2(z') - T_1(z')] dz', \quad (4.2)$$

где первое слагаемое описывает конденсацию избытка пара в облаке, второе — учитывает поток тепла с поверхности океана и в правой части приращение температуры в столбе высотой  $dz$  от наступающего воздуха до влажно-адиабатического профиля. Поскольку плотность насыщенного пара экспоненциально спадает с температурой, первое слагаемое всегда положительно.

Уравнение (4.2) с учётом (4.1) даёт интегральное уравнение, связывающее  $dt$  и  $dz$ , которое может быть решено численно. Рост облака на этом первом этапе будет продолжаться до значения  $z_{m,1}$ , определяемого обращением плавучести в нуль.

Дальнейший рост верхней границы облака невозможен, поэтому на втором этапе роста облака должны увеличиваться его температура и влажность. В силу непрерывности термодинамических функций на нижней границе облака, подоблачная температура и влажность также меняются. Это приводит к двум следствиям: к изменению высоты нижней границы облака и уменьшению потоков с поверхности океана, согласно балк-формулам.

Построим уравнения для роста облака на втором этапе. Введём искомые приращения температуры  $dT$  и влаги  $dq$  и найдём эти приращения за время  $dt$ . Наличие двух переменных требует ввести дополнительное условие на них, например,

$$\frac{dT}{T_{\max} - T_{\text{now}}} = \frac{dq}{q_{\max} - q_{\text{now}}}. \quad (4.3)$$

Индексы *now* обозначают *сейчас*, в данный момент времени (компьютерного). Задача о росте верхней границы облака (как функции времени) рассматривается численно. В процессе решения задачи компьютерная программа перебирает точки (доли секунды) по порядку. В формуле (4.3) приводится некоторый момент текущего (компьютерного, расчётного) времени, который и обозначается индексом *now*.

Масса пара, который идёт на насыщение подоблачного и облачного слоёв, равна:

$$\delta m_{v,2} = \int_{z_c(t)}^{z_{\text{now}}(t)} \rho(z) [q_2(z) - q_1] dz + dq \int_0^{z_c(t)} \rho(z) dz, \quad (4.4)$$

где отношение смеси под облаком считается постоянным, как это было уже использовано ранее (см. п. 1). Баланс полного количества тепла может быть представлен как:

$$\begin{aligned} & L [F_q(t) dt - \delta m_{v,2}] + F_Q(t) dt = \\ & = c_p \int_{z_c(t)}^{z_{\text{now}}(t)} \rho(z) [T_2(z) - T_1(z)] dz + c_p dT \int_0^{z_c(t)} \rho(z) dz, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где два слагаемых в левой части описывают выделение скрытой теплоты конденсации избытка пара и поток тепла с океана, а в правой части — полное количество тепла, необходимое для нагрева всей системы на температуру  $dT$ . Уравнение (4.5) является интегральным уравнением для связи  $dt$  и  $dT$ , которая в свою очередь связана с  $dq$  предположением (4.3).

Отметим, что высота нижней границы облака  $z_c$ , высота верхней границы облачного слоя  $z_{\max}$  и потоки тепла  $F_Q$  и влаги  $F_q$  в уравнении (4.5) суть функции текущих значений температуры и влажности у поверхности океана. Задачу Коши об определении верхней границы облачного слоя нужно решать численно. В приведённых ниже решениях на каждом шаге вычисление значений  $dT$  и  $dq$  было выполнено из уравнения баланса тепла (4.5) с точностью до  $10^{-6}$  Дж/м<sup>2</sup>. На большой высоте вклад пара в плавучесть очень мал, поэтому плавучесть будет равна нулю там, где совпадают температуры наступающего воздуха и адиабатическая.

Из результатов видно, что рост облака на первом этапе происходит намного быстрее, что объясняется малой массой нагреваемого воздуха. Этот этап соответствует формированию башенных облаков. Второй этап роста облака описывает квазистационарное состояние и может занимать несколько суток. В построенной модели пренебрегается вклад солнечного излучения в баланс энергии. Принимая во внимание смену дня и ночи, которое должно влиять на баланс энергии, решения второго этапа будут приближенными, однако окончательная высота (асимптота) зависит только от температуры и влажности у воды, поэтому их можно считать близкими к реальности.

### Градиент температуры в тропосфере

В основном градиент температуры определяется общей циркуляцией атмосферы, а в ячейках типа Гадлея, заносящих влажный тропический воздух наверх и осуществляющих его перенос к высоким широтам по широте, важную роль играет конвекция. Обычно считается, что градиент температуры в тропосфере равен  $5...6,5$  °C/км [Матвеев, 2000; Мохов, 1993]. Но часто не говорится, что речь идёт о среднем градиенте температуры, кроме того, остаётся непонятен механизм усреднения: по высоте, по широте, по времени и т.п. С одной стороны, видим практически универсальную константу, но, с другой, — естественно задаться вопросом — каким же образом этот градиент устанавливается? Ведь в атмосфере насыщенных облаков немного, а градиент ненасыщенного воздуха близок к «сухоадиабатическому» градиенту. Казалось бы, градиент температуры в тропосфере должен устанавливаться на всей планете сухоадиабатическим, т.е. равен  $9,8$  °C/км. Однако измеряемый градиент температуры в тропической тропосфере существенно меньше (по абсолютной величине), чем в сухом воздухе. Здесь также играет роль и общая циркуляция атмосферы: в низких широтах воздух поднимается и переносится к высоким широтам. Но мы пока не касаемся здесь этой стороны дела.

Рассмотрим для примера тропический океан. В низких широтах происходит сильное испарение с поверхности, и высокие облачные «башни» (до тропопаузы) расположены густо. По наблюдениям со спутников расстояния между ними порядка  $30$  км [см., напр., [http://goes.gsfc.nasa.gov/pub/goes/0005171900G11101\\_4km.gif](http://goes.gsfc.nasa.gov/pub/goes/0005171900G11101_4km.gif)]. Градиент температуры в «башнях», естественно, влажноадиабатический.

Таким образом, можно предположить, что вокруг «башни» температура воздуха должна быть примерно такая же.

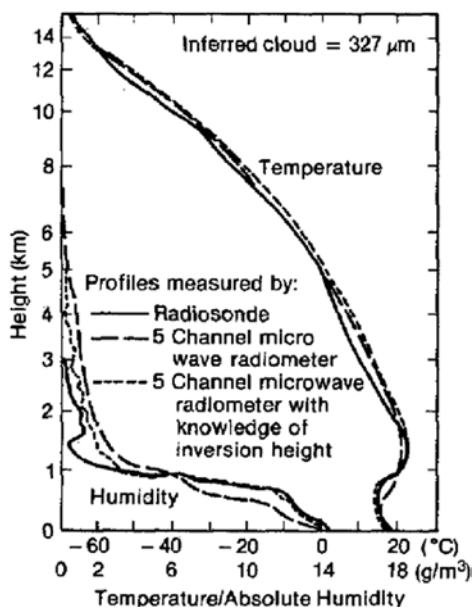
На достаточно большой высоте, выше 6...7 км, где остаётся совсем мало влаги, градиент даже в насыщенном облаке должен быть близок к  $10\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{км}$ . Значит и в окружающем воздухе градиент профиля температуры должен быть не больше (по абсолютной величине), чем в облаке. Правда, следует отметить, что на больших высотах (близких к тропопаузе), где происходит инверсия, градиент температуры уменьшается и становится меньше (по абсолютной величине) адиабатического в сухом воздухе. В других регионах планеты, где нет такого количества облачных «башен», профиль температуры должен быть более близким к сухоадиабатическому.

Для подтверждения такого вывода исследуем профили температуры из некоторых экспериментальных работ. Рассмотрим рис. 18 из работы [Hogg et al., 1983] (рис. 9а), где приводится вертикальное распределение температуры, полученное с помощью радиозонда (сплошная кривая) в городе Денвере ( $39^{\circ}44'$  с.ш.,  $104^{\circ}59'$  з.д.). После оцифровки данных для дальнейшей обработки оказалось, что для вычисления распределения градиента неудобно использовать аппроксимацию всего интервала: на краях отклонения оказываются очень большими. Поэтому на рис. 9б приводят градиенты вертикального распределения температуры, определённые из исходного экспериментального графика для эшелонов по два километра каждый.

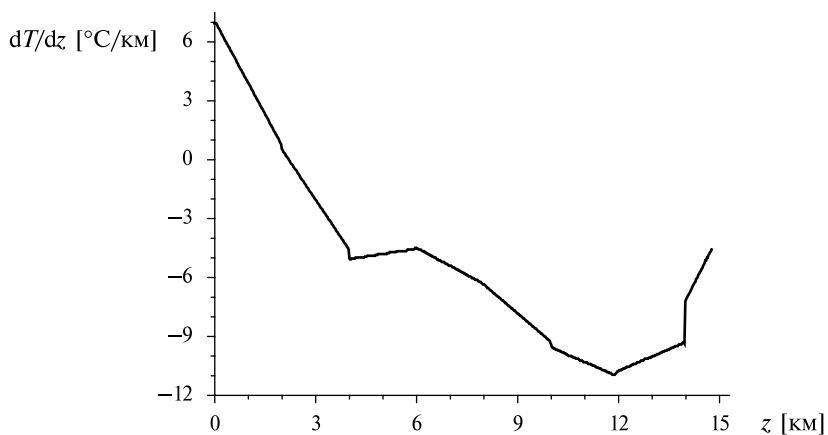
Видно, что в пределах 1 км график имеет инверсию, что часто бывает на малых высотах. На больших высотах также начинается инверсия, обусловленная тропопаузой. Градиент температуры ещё остаётся отрицательным, но уже уменьшается.

В работе [Decker et al., 1978] рассмотрены эксперименты в Point Mugu (Калифорния,  $34^{\circ}5'8''$  с.ш.,  $119^{\circ}3'36''$  з.д.) для февраля 1976 г. (рис. 10а) (по оси ординат отложено давление в миллибарах). Нами переведены данные в зависимость температуры от высоты, оцифрованные для обработки. Данные этих измерений обработаны аналогичным образом, и был получен вертикальный градиент температуры (рис. 10б).

Рассмотрим ещё пример [Погосян, 1972]. Обратимся к рис. 19 в параграфе «Распределение температуры в нижней стратосфере» этой работы. Рассмотрим вертикальное распределение температуры для Адена ( $12^{\circ}46'45''$  с.ш.,  $45^{\circ}02'12''$  в.д., высота над уровнем моря 7 м) — рис. 11а, на рис. 11б — градиент профиля температуры для Адена зимой.



**Рис. 9а.** Рисунок 18 из работы [Hogg et al., 1983] (по оси ординат отложена высота в километрах (слева) и давление в миллибарах (справа)). Оцифрованные для обработки данные переведены нами в зависимость температуры от высоты. Данные измерений были обработаны аналогичным образом, получен вертикальный градиент температуры — рис. 9б



**Рис. 9б.** Градиент вертикального распределения температуры для отдельных высот по 2 км

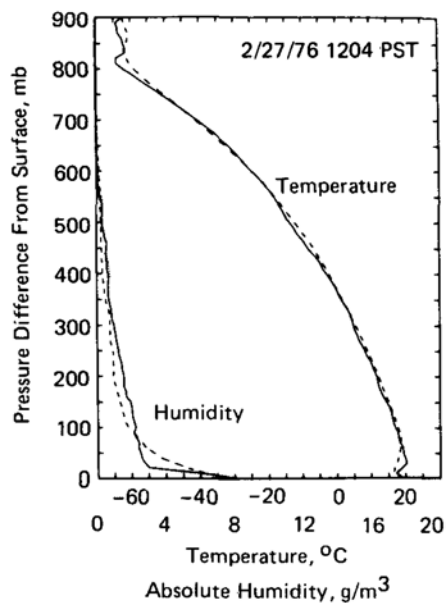


Рис. 10а. Рисунок 2 из работы [Decker et al., 1978]

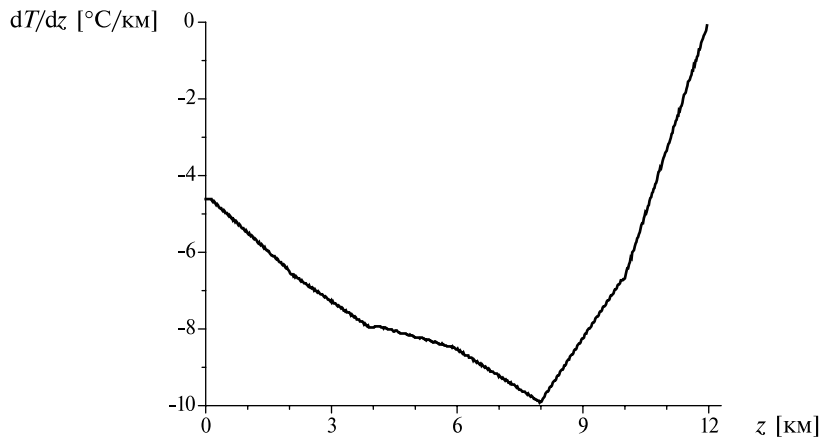
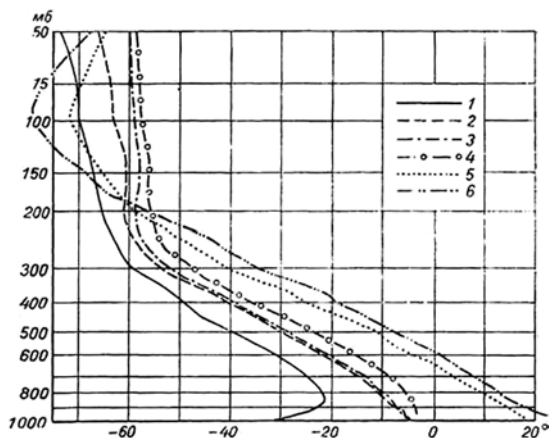
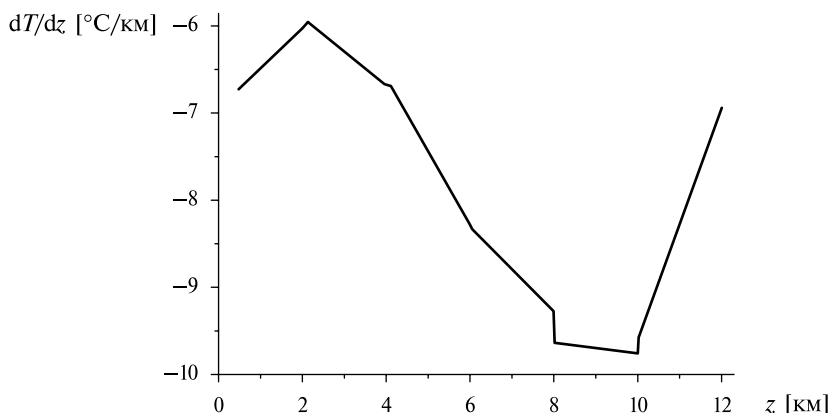


Рис. 10б. Аппроксимация градиента температуры рис. 2 из работы [Decker et al., 1978]. Эшелоны — по 2 км



**Рис. 11а.** Рисунок 19 из работы [Погосян, 1972]. Распределение температуры с высотой над различными широтами между станциями СП-4, СП-5 и Аденом зимой: 1 — СП-4, СП-5; 2 — Мурманск; 3 — Москва; 4 — Ереван — Тбилиси; 5 — Бахрейн; 6 — Аден



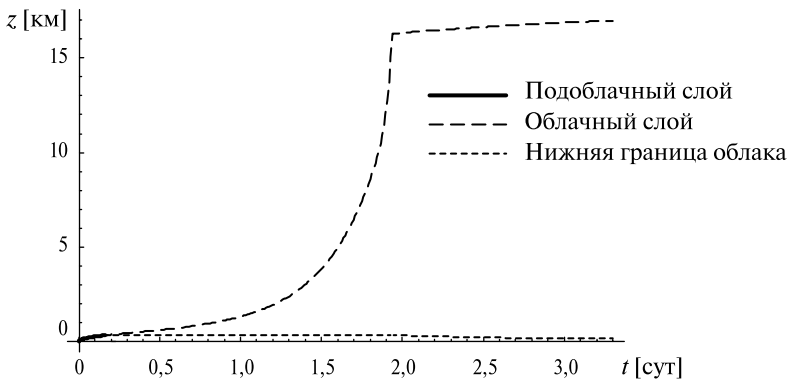
**Рис. 11б.** Аппроксимация градиента температуры с рис. 19 из работы [Погосян, 1972]. Аден ( $12^{\circ} 46' 45''$  с.ш.,  $45^{\circ} 02' 12''$  в.д.). Эшелоны — по 2 км

Можно сделать вывод, что вертикальное распределение в тропосфере равно  $6,5^{\circ}\text{C}/\text{км}$  только в среднем по высоте. В широком диапазоне климатических поясов (от континентального до тропического) и времени года (от зимы до лета) наблюдается схожая картина: инверсия вблизи поверхности Земли и инверсия вблизи тропопаузы. Профиль температуры в средней и верхней частях

тропосферы близок к  $10\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{км}$ , но под тропопаузой, где имеет место температурная инверсия, градиент температуры по абсолютной величине уменьшается, и средний градиент температуры становится ближе к  $6,5\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{км}$ .

Применим рассмотренную модель для описания образования мощного облачного слоя в процессе формирования тропического циклона. Для этого целесообразно по оси абсцисс откладывать не расстояние, а время (в сутках), поскольку уже на начальной стадии формирования циклона в стене глаза воздушный поток движется по окружности, многократно проходя фактически один и тот же путь. Температуру поверхности тропического океана примем равной  $300\text{ К}$ .

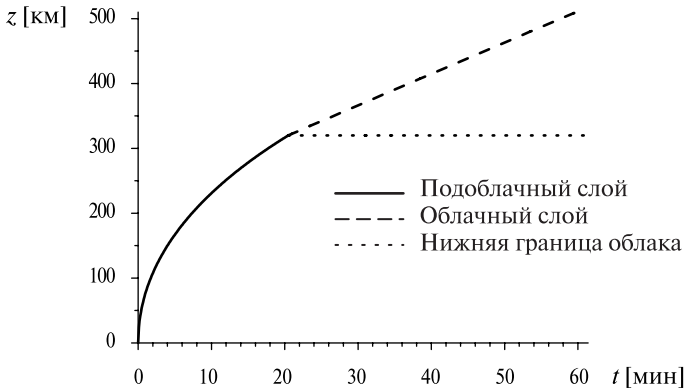
На рис. 12 представлены графики роста конвективного слоя в тропическом регионе при заданном значении скорости наступающего воздушного потока. На рис. 12а показан общий вид роста конвективного слоя как под облаком, так и в облаке, и изменение нижней границы облака по мере роста в нашей модели верхней его границы. На этом рисунке видно, что при заданных параметрах конвективный слой в подоблачной области монотонно растёт и достигает уровня конденсации примерно за 20 мин, после чего слой увеличивается в насыщенном влажном облаке и достигает точки излома за 1,6 сут.



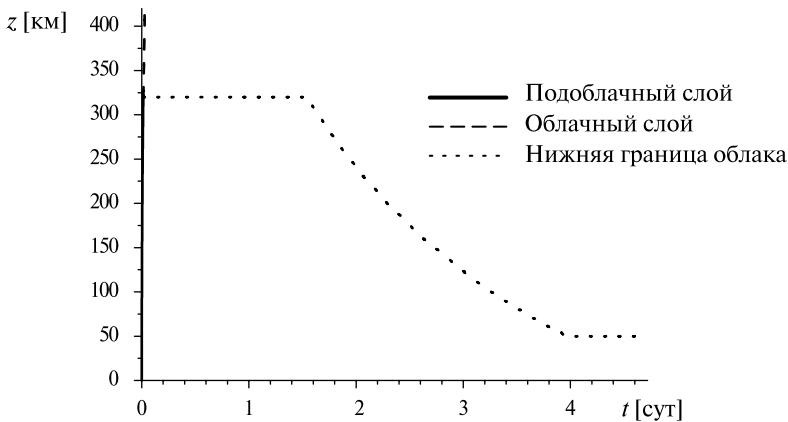
**Рис. 12а.** Рост конвективного слоя и нижняя его граница в тропической области. Температура воды  $T_o = 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ , температура наступающего воздушного потока  $T = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ , скорость ветра в стене глаза  $U = 37\text{ м/с}$ . Верхняя граница облачного турбулентного конвективного слоя в тропической области достигается на высоте  $h = 17\text{ км}$



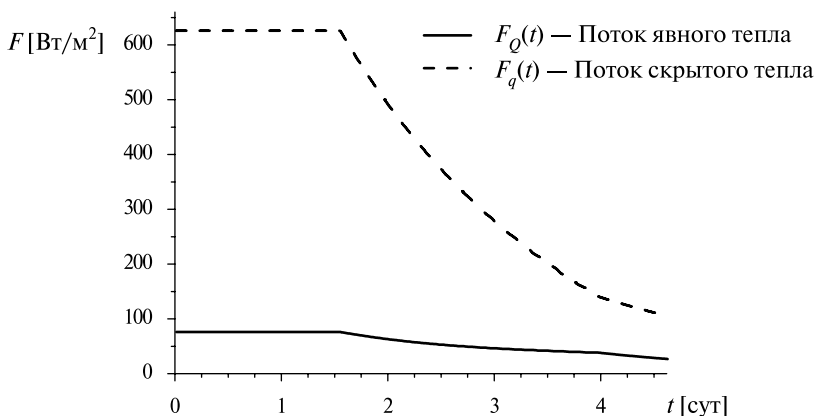
На рис. 12б показана часть рис. 12а на самом начальном этапе — рост конвективного слоя в подоблачной области, достижение слоем нижней границы облака и дальнейший рост конвективного слоя уже в насыщенном влажном облаке, а также нижняя граница облака. На рис. 12в показано понижение высоты нижней границы облака, которое происходит после прохождения верхней границей облака точки излома: видно, что нижняя граница облачности несколько понижается.



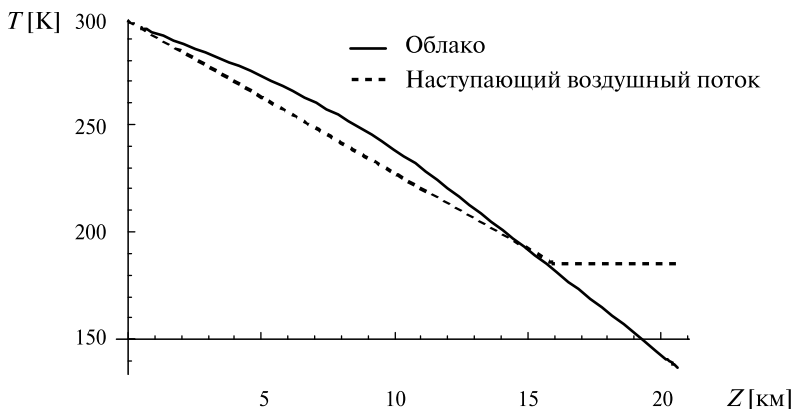
**Рис. 12б.** Рост конвективного слоя на начальной стадии в тропической области



**Рис. 12в.** Понижение высоты нижней границы облака по окончании 1,6 сут в тропической области после достижения верхней границы конвективного слоя в облаке точки излома



**Рис. 12г.** Потoki явного тепла (сплошная линия) и скрытого (пунктирная линия) тепла [Вт/м<sup>2</sup>] в тропической области



**Рис. 12д.** Распределения температуры в тропической тропосфере: сплошная линия — влажноадиабатическое распределение температуры (характерное для облака); пунктирная линия — вертикальное распределение температуры в наступающем воздухе, точка излома соответствует тропопаузе

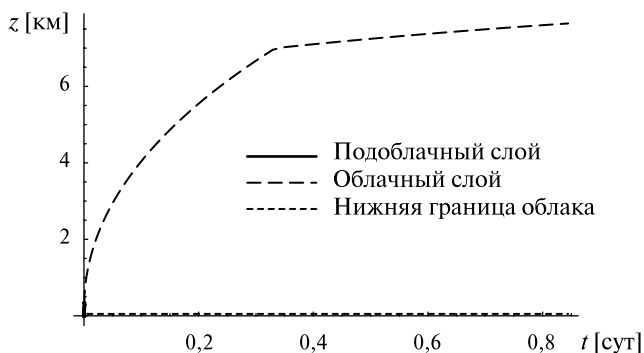
Рост облака состоит из двух принципиально разных частей: в первой части облако растёт за счёт «наполнения» его теплом, при этом подоблачный слой фактически фиксируется. Во второй части растёт температура нижней границы облака, меняются характеристики подоблачного слоя (система подоблачный слой — облако решается согласованно). Понятно, что при этом изменится

высота точки росы, поскольку меняются температура и влажность у поверхности воды. На рис. 12г показаны потоки явного тепла (сплошная линия) и скрытого тепла (пунктирная линия) [Вт/м<sup>2</sup>] в тропической области. Видно, что до достижения конвективным слоем в облаке точки излома (первые 1,6 сут) потоки с поверхности моря постоянны, но после заполнения облака теплом и паром потоки уменьшаются — поступление энергии в облако замедляется. Поток явного тепла с поверхности океана в тропической области существенно меньше потока скрытого тепла. Это связано с малой разницей температур между поверхностью океана и температурой наступающего воздуха. В этой точке облако уже почти заполнено теплом и паром, и далее происходит изменение термодинамического состояния подоблачного слоя, которое, в конечном счёте, приводит к подавлению испарения с поверхности океана и остановке роста облака. На рис. 12д представлены вертикальные распределения температуры в атмосфере.

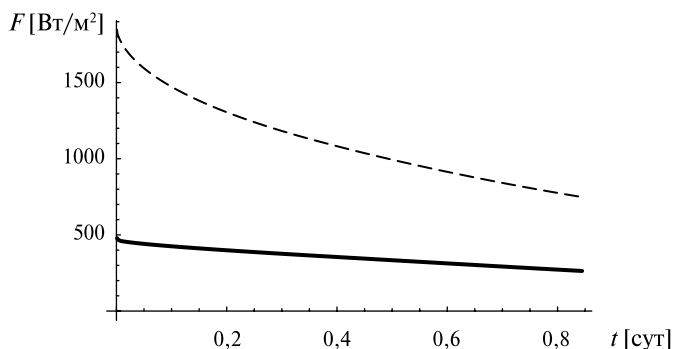
На рис. 13 представлены графики роста конвективного слоя в полярном регионе в предположении постоянной скорости наступающего потока воздуха. Температуру воды примем  $T_o = -2\text{ }^\circ\text{C}$ , скорость наступающего потока воздуха — 40 м/с, относительную влажность воздуха над поверхностью океана и влажность наступающего потока воздуха — 80 %. Разница температуры между поверхностью океана и нижней границей наступающего потока воздуха ( $z = 10\text{ м}$ ) принята равной  $30\text{ }^\circ\text{C}$ .

На рис. 13а показаны общий вид роста конвективного слоя в полярном регионе, верхняя граница турбулентного конвективного слоя (сплошная линия) и нижняя граница облачности (пунктирная линия), практически у поверхности воды образуется туман. Вначале конвективный слой растёт в подоблачной части тропосферы, на некоторой высоте образуется облако, и далее конвективный слой растёт в облаке, после чего слой растёт в насыщенном влажном облаке и достигает высоты, близкой к высоте тропопаузы, примерно за 8 ч. Эта высота соответствует нулевой плавучести воздуха на этой высоте, и дальнейший рост облака значительно замедляется. Происходит нагревание и увеличение относительной влажности уже и подоблачного слоя, что приводит к понижению его высоты.

Видно, что при заданных параметрах конвективный слой в подоблачной области растёт монотонно (и достаточно быстро) и достигает уровня конденсации примерно за минуту. На рис. 13б показаны потоки скрытого тепла (сплошная линия) и явного (пунктирная линия) тепла [Вт/м<sup>2</sup>] в полярной области.



**Рис. 13а.** Рост конвективного слоя и нижняя граница конвективного слоя в полярной области. Температура воды  $T_o = -2^\circ\text{C}$ , температура наступающего воздушного потока  $T = -32^\circ\text{C}$ , скорость ветра в стене глаза бури  $U = 40$  м/с. Верхняя граница турбулентного конвективного слоя в облаке в полярной области достигает высоты  $h = 7$  км



**Рис. 13б.** Потoki скрытого (сплошная линия) и явного (пунктирная линия) тепла [Вт/м<sup>2</sup>] в полярной области

Поток явного тепла с поверхности океана в полярной области существенно превышает поток скрытого тепла, что, очевидно, связано с большой разницей температур поверхности океана и наступающего потока воздуха.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наиболее важным вопросом при изучении развития турбулентного конвективного слоя является учёт конденсации водяного пара, наступающей при достижении слоем высоты образования облач-

ности. Высвобождение скрытой теплоты конденсации существенно увеличивает поток плавучести, идущий с поверхности океана, и приводит к интенсивному росту конвективного слоя и формированию облачности. При моделировании процесса образования облака атмосфера разделяется на три основные области: подоблачный слой, собственно облако и надоблачная область. В облачной части учитывается распределение термодинамических параметров влажной атмосферы с высотой, поскольку наличие сконденсированной влаги внутри облака существенно изменяет термодинамику системы и, как результат, вертикальные профили всех параметров задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [Голицын, 2008] *Голицын Г. С.* Полярные и тропические ураганы: их энергия, размеры, и количественные критерии их генерации // Изв. РАН. ФАО. 2008. Т. 44. № 5. С. 579–590.
- [Дубинов и др., 2006] *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* Примененные функции Ламберта и её применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ ВНИИЭФ», 2006. 160 с.
- [Зилитинкевич, 1987] *Зилитинкевич С. С.* Теоретическая модель проникающей турбулентной конвекции // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1987. Т. 23. С. 593–610.
- [Зилитинкевич, 2013] *Зилитинкевич С. С.* Атмосферная турбулентность и планетарные слои. М.: Физматлит, 2013. 151 с.
- [Ландау, Лифшиц, 1986] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1986. 586 с.
- [Матвеев, 2000] *Матвеев Л. Т.* Физика атмосферы. СПб.: Гидрометеоздат, 2000. 779 с.
- [Мохов, 1993] *Мохов И. И.* Диагностика и структура динамической системы. СПб.: Гидрометеоздат, 1993. 269 с.
- [Погосян, 1972] *Погосян Х. П.* Общая циркуляция атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1972. 394 с.
- [Decker et al., 1978] *Decker M. T., Westwater E. R., Guiraud F. O.* Experimental Evaluation of Ground-Based Microwave Radiometric Sensing of Atmospheric Temperature and Water Vapor Profiles // J. Applied Meteorology. 1978. V. 17. P. 1788–1795.
- [Emanuel, 1994] *Emanuel K.* Atmospheric convection. N.Y.; Oxford: Oxford University Press, 1994. 580 p.
- [Fleming, 1942] *Fleming R. H.* The Oceans. N.Y.: Prentice Hall. Englewood Cliffs, 1942. 1087 p.
- [Henderson-Sellers, 1984] *Henderson-Sellers B.* A new formula for the latent heat of evaporation of water as a function of temperature // Quarterly J. Royal Meteorological Society. 1984. V. 110. P. 1186–1190.

- [Hogg et al., 1983] *Hogg D. C., Decker M. T., Guiraud F. O., Earnshaw K. B., Merritt D. A., Moran K. P., Sweezy W. B., Strauch R. G., Westwater E. R., Little C. G.* An Automatic Profiler of the Temperature, Wind and Humidity in the Troposphere // *J. Climate Applied Meteorology*. 1983. V. 22. P. 807–831.
- [Riehl, 1954] *Riehl H.* Tropical Meteorology. N. Y.: McGraw-Hill, 1954. 392 p.
- [Rutkevich, 2002] *Rutkevich P. B.* Convective and rotational instability in moist air // *Physica A*. 2002. V. 315. N. 1–2. P. 215–221.
- [Smith, 2012] *Smith S. D.* Coefficients for sea wind stress, heat flux, and wind profiles as a function of wind speed and temperature // *J. Geophysical Research*. 2012. V. 93. Iss. C12. P. 15 467–15 472.
- [Subrahmanyam et al., 2003] *Subrahmanyam D. B., Ramachandran Radhika, Sen Gupta K., Mandal Tuhiin K.* Variability of Mixed-Layer Heights over the Indian Ocean and Central Arabian Sea During INDOEX, IFP-99: Research Note // *Boundary-Layer Meteorology*. 2003. V. 107. P. 683–695.

## Приложение

Выведем выражение для плавучести смеси газов в линейном приближении по величинам  $(q_1 - q_2)$  и  $(T_1 - T_2)$ .

Пусть имеем две смеси двух газов с разными температурами  $T_1$  и  $T_2$ , разными массовыми частями пара  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно. Считаем, что в точке их перемешивания полные давления смесей совпадают:  $P_1 = P_2$ . Вычислим плавучесть небольшого объёма второго газа, помещённого в первый:

$$b = g \left[ 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right]. \quad (\text{П1})$$

Парциальные давления газов равны

$$P_1 = \frac{\rho_{g1}}{\mu_a} RT_1 + \frac{\rho_{v1}}{\mu_v} RT_1 = \rho_{g1} RT_1 \left[ \frac{1}{\mu_g} + \frac{q_1}{\mu_v} \right]. \quad (\text{П2})$$

$$P_2 = \frac{\rho_{g2}}{\mu_a} RT_2 + \frac{\rho_{v2}}{\mu_v} RT_2 = \rho_{g2} RT_2 \left[ \frac{1}{\mu_g} + \frac{q_2}{\mu_v} \right]. \quad (\text{П3})$$

где индекс  $a$  обозначает сухой воздух;  $v$  (vapour) — водяной пар; индексы 1 и 2 — первая и вторая смеси газов;  $R$  — универсальная газовая постоянная (одинаковая для обоих газов).

Полные плотности смесей можно представить в виде:

$$\rho_1 = \rho_{g1} + \rho_{v1} = \rho_{g1}(1 + q_2). \quad (\text{П4})$$

$$\rho_2 = \rho_{g2} + \rho_{v2} = \rho_{g2}(1 + q_1). \quad (\text{П5})$$

Подставляя эти выражения в (П2), получаем

$$\frac{b}{g} = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_{g2}(1+q_2)}{\rho_{g1}(1+q_1)} \quad (\text{П6})$$

и, подставляя плотности, выраженные через остальные величины из уравнений (П3) и (П4) с учётом равенства (П1), имеем:

$$\frac{b}{g} = 1 - \frac{T_1 \left( \frac{1}{\mu_g} + \frac{q_1}{\mu_v} \right) (1+q_2)}{T_2 \left( \frac{1}{\mu_g} + \frac{q_2}{\mu_v} \right) (1+q_1)}. \quad (\text{П7})$$

В приближении малого значения  $q \ll 1$  можно записать:

$$b = g \left[ 1 - \frac{T_1}{T_2} + \frac{\mu_g - \mu_v}{\mu_v} (q_2 - q_1) \right]. \quad (\text{П8})$$

Проверим: пусть  $q_1 = q_2$ ,  $T_2 > T_1$ . Второй газ (с более высокой температурой) должен всплывать. Действительно, плавучесть его положительна. Пусть теперь  $T_1 = T_2$ ,  $q_2 > q_1$ . Второй газ имеет большую долю пара, следовательно, он легче и поэтому должен всплывать. Легко видеть, что плавучесть является функцией высоты. Градиент плавучести меняется в зависимости от количества пара, т.е. от времени. Это принципиально новое решение, которого не было в исследованиях по развитию конвективного слоя, и это нужно учитывать в нашей задаче.

## Оглавление

|   |    |
|---|----|
| Введение . . . . .  | 3  |
| 1. Толщина подоблачного конвективного слоя . . . . .  | 3  |
| 2. Нижняя граница облачности . . . . .  | 13 |
| 3. Вертикальные распределения термодинамических функций<br>для насыщенного пара в адиабатическом случае . . . . . | 17 |
| 4. Толщина конвективного слоя в облаке как функция времени . . . . .  | 24 |
| Градиент температуры в тропосфере . . . . .   | 27 |
| Заключение . . . . .  | 36 |
| Литература . . . . .  | 37 |
| Приложение . . . . .  | 38 |