АННОТАЦИЯ

1. **Авторы:** Милованов А.В. (ведущий научный сотрудник; отдел № 54).

2. **Название:** «Исследование нелокальных процессов переноса в сложных системах методом нелинейного уравнения Шредингера» (Цикл работ 2018-2019).

3. **Ссылки на публикации:** **[1] Alexander V. Milovanov** and Jens Juul Rasmussen, Levy flights on a comb and the plasma staircase, Phys. Rev. E **98**, 022208 (2018) 11pp. (published 9 August 2018). **[2] Alexander V. Milovanov** and Alexander Iomin, Subdiffusive Levy flights in quantum nonlinear Schrodinger lattices with algebraic power nonlinearity, Phys. Rev. E **99**, 052223 (2019) 16pp. (published 30 May 2019).

4. **Общая формулировка научной проблемы и ее актуальность:** Исследование нелокальных процессов переноса в «сложных» системах (то есть системах с большим числом взаимодействующих степеней свободы). Понимание условий, при которых возможно нарушение второго закона Фика (плотность потока в точке пропорциональна минус градиенту плотности **в той же самой** точке). Соответственно анализ и идентификация механизмов, действие которых может приводить к нарушению таких основополагающих принципов как гауссовость; конечность второго и более высоких моментов функции распределения; экспоненциальный характер затухания корреляций в пространстве и во времени; отсутствие «хвостов» у плотности вероятности; и др. Построение кинетики сложных систем «в обход» второго закона Фика. В качестве рабочей гипотезы: Анализ обобщенных («нелокальных») законов, согласно которым плотность потока в точке определяется распределением плотности **в некоторой окрестности** этой точки. Поиск «обощенных» уравнений для функции распределения, учитывающих свойства негауссовости, многомасштабности, а также возможных (взаимо-)зависимостей между процессами, протекающими на различных пространственно-временных масштабах (как правило, на переплетении микро- и мезо-масштабов). Суть фундаментальная проблема в физической кинетике сложных систем, изначально сформулированная в работах Г.М. Заславского, Дж. Клафтера, М. Шлезинджера, Р. Метцлера, Е. Монтролла, А. Иомина (ученика Г.М. Заславского), и ряда других авторов. Начиная с середины 1990-х годов, по теме опубликовано порядка десяти тысяч работ и несколько обзоров (например, Л.М. Зеленый и А.В. Милованов, «Фрактальная топология и дробная кинетика», УФН, Т. 174 № 8, С. 809-852 (2004)); тем не менее, проблема еще очень далека от своего окончательного решения. Так, одной из нерешенных (и крайне важных для общего построения теории) задач является возможность вывода так называемых «дробных» кинетических уравнений (то есть кинетических уравнений, использующих операторы свертки вместо «обычных» производных по времени и пространственным переменным) из первых физических принципов (то есть вариационных принципов гамильтоновой динамики).

5. **Конкретная решаемая в работе задача и ее значение:** Решается задача о выводе дробного уравнения Фоккера-Планка (дробного уравнения диффузии) для динамических систем, состоящих из большого числа связанных нелинейных осцилляторов. Считается, что система осцилляторов подчиняется нелинейному уравнению Шредингера (уравнению Гросса-Питаевского) или его алгебраическим обобщениям. В центре внимания работы – возможная связь между параметрами кинетического уравнения для функции

распределения вероятностей найти возбужденный осциллятор в пределах гиперсферы заданного радиуса Δn в момент времени t и степенью алгебраической нелинейности в обобщенном уравнении Шредингера. В более общем виде – задача о связи нелинейности и нелокальности в системах с большим числом взаимодействующих степеней свободы.

6. **Используемый подход, его новизна и оригинальность:** Задача решается методом нелинейного уравнения Шредингера с алгебраической нелинейностью. При этом новизна и оригинальность задачи обусловлены именно ее «алгебраичностью», то есть рассмотрением обобщенного уравнения Гросса-Питаевского с суб-квадратичной нелинейностью (вместо обычной, квадратичной нелинейности по плотности вероятности). Хотя уравнения Гросса-Питаевского с алгебраической нелинейностью небезызвестны в литературе, их анализ связан с чудовищными (!) математическими трудностями – главным образом при возведении в алгебраическую степень всевозможных разложений в ряд по собственным функциям линейного гамильтониана. В данном случае авторами изобретен оригинальный подход, основанный на решении системы **диофантовых уравнений** методом итераций по параметру дробности. (Здесь будет уместно процитировать – в вольном переводе на русский язык – одного из рецензентов работы [2]: "Удивительно, как сложнейшую математическую задачу иногда удается решить простым нестандартным методом. Вопрос лишь в том, можно ли считать метод диофантовых уравнений «простым».")

7. **Полученные результаты и их значимость:** С обще-математической точки зрения, полученные результаты далеко не тривиальны и не очевидны. Показано, что нелокальность по пространственной переменной возникает (в нелинейных цепочках Шредингера) исключительно в случае, когда нелинейность алгебраична (то есть не сводится к простой квадратичной поправке). В нелинейных цепочках Шредингера с обычной квадратичной нелинейностью нелокальность по пространственной переменной вырождается в обычное гауссово поведение (что, по-видимому, естественно). Более того, нелокальность требует очень деликатного описания в рамках именно операторного («квантового») нелинейного уравнения Шредингера. Неквантовые (неоператорные) уравнения свойство нелокальности теряют, и в них возможно лишь немарковское поведение с длинными корреляциями по времени (но не по пространству). В [2] получено самосогласованное дробное уравнение диффузии, в котором дробное дифференцирование по времени не независимо от параметров дробного дифференцирования по пространственной переменной. В [1] рассмотрена более простая задача, в которой марковость (отсутствие длинных корреляций по времени) предполагается по определению (что далеко не факт в реальных системах). Там же получен общий вывод дробного (по Леви) уравнения Фоккера-Планка на основе представления о вероятности перехода между состояниями в фазовом пространстве. Следует отметить, что работа [1], а также вытекающие из нее приложения к различным магнитоплазменным задачам – в том числе к задачам магнитосферной динамики – была представлена на семинаре ИКИ РАН в июне 2019 г. Обсуждение с коллегами по ИКИ показало, что полученные результаты могли бы, по видимому, найти интересные приложения при анализе типов дисперсионных ионных структур, наблюдаемых в плазменном слое (авроральной магнитосфере). Данная тема требует отдельного рассмотрения (в том числе и в контексте свойства немарковости) и, возможно, могла бы стать частью некоторой более общей работы в области магнитосферной динамики. Прогресс в этой области мог бы быть получен в самом недалеком будущем.