

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном  
учреждение науки Институте Космических Исследований Российской  
Академии Наук (ИКИ РАН)

На правах рукописи

Рудерман Михаил Соломонович

Изгибные волны и колебания в магнитных трубках в солнечной  
атмосфере

01.03.03 — физика Солнца

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва 2015

## Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Введение</b>   | <b>7</b>  |
| <b>1 Волны и колебания в атмосфере с магнитной структурой</b>                                 | <b>15</b> |
| 1.1 Исторический обзор . . . . .  | 15        |
| 1.2 Основные уравнения . . . . .  | 18        |
| 1.3 Волновые моды однородной магнитной трубки . . . . .                                       | 22        |
| <b>2 Распространяющиеся волны в магнитных трубках</b>   | <b>29</b> |
| 2.1 Введение . . . . .  | 29        |
| 2.2 Вывод уравнения для изгибных волн в тонких трубках с переменным сечением . . . . .        | 30        |
| 2.2.1 Постановка задачи и невозмущённое состояние . . . . .                                   | 30        |
| 2.2.2 Преобразование линейных уравнений магнитной гидродинамики . . . . .                     | 35        |
| 2.2.3 Вывод уравнения для изгибных волн . . . . .   | 38        |
| 2.2.4 Выводы . . . . .  | 40        |
| 2.3 Безотражательное распространение изгибных волн в корональных магнитных петлях . . . . .   | 41        |
| 2.3.1 Общая теория безотражательного распространения волн в неоднородных волноводах . . . . . | 42        |
| 2.3.2 Изгибные волны в корональных магнитных петлях . . . . .                                 | 44        |
| 2.3.3 Выводы . . . . .  | 50        |
| 2.4 Резонансное затухание линейных изгибных волн . . . . .                                    | 51        |
| 2.4.1 Постановка задачи . . . . .   | 54        |
| 2.4.2 Вычисление декремента . . . . .   | 56        |
| 2.4.3 Обсуждение результатов . . . . .  | 63        |
| 2.4.4 Выводы . . . . .  | 66        |
| 2.5 Влияние нелинейности на резонансное затухание изгибных волн . . . . .                     | 67        |
| 2.5.1 МГД уравнения в Лагранжевых переменных . . . . .  | 68        |
| 2.5.2 Постановка задачи . . . . .   | 71        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.5.3    | Вывод нелинейного уравнения для изгибных волн . . .  | 73         |
| 2.5.4    | Результаты численных расчётов . . . . .  | 100        |
| 2.5.5    | Выводы . . . . .   | 108        |
| <b>3</b> | <b>Стоячие изгибные волны в магнитных трубках</b>  | <b>110</b> |
| 3.1      | Введение . . . . .   | 110        |
| 3.2      | Влияние изменения плотности и радиуса поперечного сечения вдоль трубки на собственные частоты колебаний магнитных трубок . . . . . | 111        |
| 3.2.1    | Постановка задачи . . . . .  | 111        |
| 3.2.2    | Стоячие волны в трубке с квадратичным профилем скорости . . . . .  | 112        |
| 3.2.3    | Стоячие волны в трубке с гиперболическим профилем радиуса поперечного сечения . . . . .  | 114        |
| 3.2.4    | Определение параметров осциллирующих корональных петель по отношению частот первого обертона и фундаментальной моды . . . . .      | 115        |
| 3.2.5    | Выводы . . . . .   | 118        |
| 3.3      | Влияние формы поперечного сечения на собственные частоты колебаний магнитных трубок . . . . .                                      | 119        |
| 3.3.1    | Изгибные колебания однородной магнитной трубки с эллиптическим поперечным сечением . . . . .                                       | 119        |
| 3.3.2    | Изгибные колебания магнитной трубки с эллиптическим сечением и плотностью меняющейся вдоль трубки                                  | 131        |
| 3.3.3    | Вертикальные и горизонтальные изгибные колебания корональных петель . . . . .  | 136        |
| 3.3.4    | Выводы . . . . .   | 154        |
| 3.4      | Изгибные колебания магнитных трубок с продольным током . . . . .   | 155        |
| 3.4.1    | Невозмущённое состояние, уравнения и граничные условия . . . . .   | 156        |
| 3.4.2    | Собственные неосесимметричные колебания . . . . .  | 158        |
| 3.4.3    | Собственные волновые моды колебаний трубки . . . . .   | 164        |
| 3.4.4    | Выводы . . . . .   | 167        |
| 3.5      | Изгибные колебания неплоских магнитных трубок . . . . .  | 168        |
| 3.5.1    | Невозмущённое состояние . . . . .  | 168        |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 3.5.2 | Криволинейные координаты . . . . .   | 170 |
| 3.5.3 | Уравнения и граничные условия . . . . .  | 174 |
| 3.5.4 | Вывод уравнения описывающего изгибные колебания магнитной петли . . . . .                                | 180 |
| 3.5.5 | Поляризация изгибных колебаний . . . . .   | 182 |
| 3.5.6 | Приложение к корональной сейсмологии . . . . .   | 187 |
| 3.5.7 | Выводы . . . . .   | 190 |
| 3.6   | Изгибные колебания двух параллельных магнитных трубок . . . . .  | 192 |
| 3.6.1 | Невозмущённое состояние и основные уравнения . . . . .   | 192 |
| 3.6.2 | Бицилиндрические координаты . . . . .  | 194 |
| 3.6.3 | Вывод основных уравнений . . . . .   | 196 |
| 3.6.4 | Собственные моды колебаний в случае постоянной плотности . . . . .                                       | 201 |
| 3.6.5 | Эффект изменения плотности вдоль трубок . . . . .  | 204 |
| 3.6.6 | Приложение к корональной сейсмологии . . . . .   | 206 |
| 3.6.7 | Выводы . . . . .   | 209 |
| 3.7   | Изгибные колебания корональных петель в присутствии течения . . . . .                                    | 210 |
| 3.7.1 | Невозмущённое состояние, уравнения и граничные условия . . . . .   | 210 |
| 3.7.2 | Вывод уравнения описывающего изгибные колебания магнитной трубки в присутствии течения . . . . .         | 214 |
| 3.7.3 | Изгибные колебания магнитных трубок с однородной плотностью и скоростью течения . . . . .                | 216 |
| 3.7.4 | Задача на собственные значения: общий случай . . . . .   | 217 |
| 3.7.5 | Собственные моды изгибных колебаний корональных петель с сифонными течениями . . . . .                   | 219 |
| 3.7.6 | Выводы . . . . .   | 226 |
| 3.8   | Резонансное затухание изгибных колебаний в магнитных трубках с аксиально однородной плотностью . . . . . | 227 |
| 3.8.1 | Постановка задачи . . . . .  | 227 |
| 3.8.2 | Решение для возмущения магнитного давления . . . . .   | 230 |
| 3.8.3 | Слабо затухающие собственные моды . . . . .  | 240 |
| 3.8.4 | Движение в диссипативном слое . . . . .  | 246 |
| 3.8.5 | Затухание изгибных колебаний корональных петель . . . . .  | 249 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 3.8.6  | Выводы . . . . .  | 250 |
| 3.9    | Влияние изменения плотности вдоль магнитной трубки на резонансное затухание её изгибных колебаний . . . . . | 252 |
| 3.9.1  | Постановка задачи и основные уравнения . . . . .  | 253 |
| 3.9.2  | Разложения в обобщённые ряды Фурье . . . . .  | 254 |
| 3.9.3  | Решения в однородных областях . . . . .   | 256 |
| 3.9.4  | Формулы связи . . . . .   | 260 |
| 3.9.5  | Изменения радиального смещения плазмы и магнитного давления поперёк переходного слоя . . . . .              | 264 |
| 3.9.6  | Сращивание решений . . . . .  | 265 |
| 3.9.7  | Приложение к изгибным колебаниям корональных петель . . . . .   | 271 |
| 3.9.8  | Выводы . . . . .  | 275 |
| 3.10   | Резонансное затухание изгибных колебаний двух параллельных магнитных трубок . . . . .                       | 277 |
| 3.10.1 | Постановка задачи . . . . .   | 277 |
| 3.10.2 | Вывод выражения для декремента . . . . .  | 278 |
| 3.10.3 | Исследование затухания колебаний . . . . .  | 292 |
| 3.10.4 | Выводы . . . . .  | 294 |
| 3.11   | Резонансное затухание изгибных колебаний остывающих корональных петель . . . . .                            | 297 |
| 3.11.1 | Изгибные колебания корональных петель с медленно изменяющейся плотностью . . . . .                          | 298 |
| 3.11.2 | Изгибные колебания корональных петель с барометрическим распределением плотности . . . . .                  | 308 |
| 3.11.3 | Выводы . . . . .  | 317 |
| 3.12   | Затухание изгибных колебаний корональных петель вследствие преобразования мод . . . . .                     | 319 |
| 3.12.1 | Анализ классической теории резонансного затухания . . . . .   | 319 |
| 3.12.2 | Постановка задачи и основные уравнения . . . . .  | 323 |
| 3.12.3 | Вывод уравнения описывающего эволюцию $\eta$ . . . . .  | 325 |
| 3.12.4 | Резонансное затухание изгибных колебаний . . . . .  | 326 |
| 3.12.5 | Выводы . . . . .  | 331 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Дополнение</b>   | <b>336</b> |
| A Вычисление компонент тензора <b>A</b> . . . . .   | 336        |
| B Вывод выражения для радиального смещения и возмущения<br>полного давления во втором приближении . . . . . | 337        |
| C Вычисление суммы в уравнении (2.5.136) . . . . .  | 339        |
| D Вывод уравнения для потока волновой энергии . . . . .   | 340        |
| E Асимптотические выражения для функций $Fek_n(z, \theta)$ и<br>$Gek_n(z, \theta)$ . . . . .                | 344        |
| F Асимптотическое решение уравнения (3.12.27), справедливое<br>на больших временах . . . . .                | 346        |
| <b>Публикации автора диссертации</b>  | <b>353</b> |
| <b>Литература</b>   | <b>356</b> |

## Введение: общая характеристика работы

### Актуальность работы

Магнитное поле играет очень важную роль в динамике солнечной атмосферы. Его влияние особенно выражено в короне, где магнитное давление значительно превосходит давление плазмы. В силу этого в короне характерные масштабы изменения магнитного поля, как правило, весьма велики. Однако пространственный масштаб изменения плотности плазмы может быть очень небольшим. В результате альвеновская скорость  $V_A$  может меняться на очень малых масштабах. Замагниченная плазма с областями быстрого изменения  $V_A$  обычно называется плазмой с магнитной структурой. Уже наблюдения на Skylab в 70-х годах прошлого столетия показали что плазма солнечной атмосферы это типичная плазма с магнитной структурой. Эти результаты были подтверждены наблюдениями на более поздних поколениях космических аппаратов.

В однородной замагниченной плазме в магнитогидродинамическом приближении могут распространяться только три волновые моды: альвеновские, а так же быстрые и медленные магнитозвуковые волны. Наличие магнитной структуры приводит к появлению большого количества новых волновых мод. В частности, становится возможным существование поверхностных волн, энергия которых сосредоточена вблизи некоторой поверхности, а амплитуда быстро убывает при удалении от этой поверхности.

Тот факт, что атмосфера Солнца а также, по-видимому, атмосферы многих звёзд являются плазмой с магнитной структурой привлек внимание теоретиков к исследованию МГД волн в такой плазме. Этой проблеме было посвящено большое число публикаций в 70-х и 80-х годах прошлого столетия. В этих работах рассматривались простейшие магнитные структуры в плазме: магнитный разрыв, являющийся частным случаем тангенциального МГД разрыва, магнитный слой и магнитная трубка. Из этих трёх структур наибольший интерес представляет магнитная трубка, поскольку она может рассматриваться как простейшая модель корональных магнитных петель, а также некоторых магнитных конфигураций в фотосфере и хромосфере.

Интерес теоретиков к МГД волнам в плазме с магнитной структурой

значительно усилился после первого наблюдения поперечных колебаний корональных петель на TRACE (Transition Region and Corona Explorer) в 1998-ом году. Эти колебания были интерпретированы как изгибные колебания магнитных трубок. Позже кроме стоячих волн в корональных петлях также наблюдались распространяющиеся волны. Изгибные волны также наблюдаются в волокнах протуберанцев и магнитных трубках в фотосфере и хромосфере.

Хотя изгибные волны в магнитных трубках сами по себе представляют весьма интересный феномен, достойный всестороннего изучения, их основное значение определяется тем, что они являются одним из основных инструментов новой и быстро развивающейся ветви солнечной физики — корональной сейсмологии. В частности, Nakariakov and Ofman (2001) использовали наблюдения стоячих волн в корональных петлях для оценки величины магнитного поля. Verwichte et al. (2004) сообщили о первом одновременном наблюдении фундаментальной моды и первого обертона изгибных колебаний корональных петель. К настоящему времени имеется значительное количество подобных наблюдений. Характерной особенностью этих наблюдений является то, что отношение периодов фундаментальной моды и первого обертона меньше 2. Andries et al. (2005a) показали, что это отклонение отношения периодов от 2 связано с изменением плотности вдоль петли. Они также показали, что, при достаточно разумных предположениях относительно формы петли и параметров магнитного поля и плазмы, величина отклонения отношения периодов от 2 однозначно связана с отношением высоты петли к шкале высот в короне. Таким образом, они разработали метод оценки шкалы высот в короне.

Изгибные волны в магнитных трубках являются лишь одной модой из большого числа волновых мод, которые могут существовать в плазме с магнитной структурой. Однако, благодаря их особому значению для солнечной физики, они продолжают привлекать повышенное внимание исследователей с самого момента их первого наблюдения в 1998-ом году. В большинстве статей, посвящённых наблюдениям или теоретическому исследованию этих волн, цитируются две работы, Aschwanden et al. (1999) и Nakariakov et al. (1999), в которых было сообщено о первом наблюдении поперечных колебаний корональных петель. К настоящему времени каждая из этих работ процитирована около 500 раз, так что средняя цитируемость за год более 30 раз. Эти цифры дают оценки снизу для общего числа статей об изгибных



волнах в солнечной атмосфере, опубликованных начиная с 1999-го года и для среднего числа статей, публикуемых ежегодно.

В первых теоретических работах, посвящённых изгибным волнам использовалась простейшая модель прямой магнитной трубки с однородной плотностью плазмы. Однако довольно быстро стало понятно, что необходимо рассматривать более сложные модели. В частности, для оценки шкалы высот по наблюдаемому отношению периодов фундаментальной моды и первого обертона изгибных колебаний корональных петель необходимо учесть изменение плотности вдоль магнитной трубки. Для использования наблюдений изгибных колебаниях в корональной сейсмологии важно построить модели как можно более полно описывающие реальные магнитные трубки в солнечной атмосфере. Затем необходимо определить какие параметры трубок являются существенными в сейсмологии. В частности, необходимо исследовать важность следующих параметров магнитных трубок:

- форма трубки;
- форма сечения трубки;
- закон изменения плотности вдоль трубки и в поперечном направлении;
- закрученность магнитных линий;
- кручение оси трубки связанное с тем, что она не лежит в одной плоскости и является трёхмерной;
- наличие течения внутри трубки;
- влияние нелинейности.

Таким образом, задача об изгибных колебаниях магнитной трубки оказывается крайне важной для солнечной физики. Она также оказалась весьма сложной с точки зрения прикладной математики, так что её полное решение требует больших усилий теоретиков.

### Цели и задачи работы

Главной целью работы является детальное исследование зависимости изгибных колебаний магнитных трубок в солнечной атмосфере от параметров невозмущённого состояния и начальных условий и построение асимптотической теории таких колебаний. В асимптотической теории в качестве малого параметра используется отношение поперечного размера магнитной трубки к её характерной длине. При исследовании затухания изгибных колебаний используется второй малый параметр — отношение толщины переходного слоя, в котором плотность плазмы быстро меняется в поперечном направлении, к характерному размеру однородной центральной области. Работа состоит из трёх частей. Первая часть является вводной. Во второй части рассматриваются распространяющиеся изгибные волны в магнитных трубках. В частности, исследованы следующие проблемы:

1. Влияние изменения плотности и радиуса поперечного сечения трубки на безотражательное распространение изгибных волн (Глава 2.3).
2. Резонансное затухание изгибных волн (Глава 2.4).
3. Влияние нелинейности на резонансное затухание распространяющихся изгибных волн (Глава 2.5).

В третьей части работы рассматриваются стоячие изгибные волны в магнитных трубках. Исследованы следующие проблемы:

1. Влияние изменения плотности и радиуса поперечного сечения вдоль трубки на собственные частоты колебаний магнитных трубок. Обсуждается приложение полученных результатов к корональной сейсмологии (Глава 3.2).
2. Влияние формы поперечного сечения на собственные частоты колебаний магнитных трубок и на отношение периодов фундаментальной моды и первого обертона (Глава 3.3).
3. Изгибные колебания магнитных трубок с линиями магнитного поля скрученными вследствие присутствия продольного тока (Глава 3.4).
4. Изгибные колебания неплоских магнитных трубок. Основное внимание уделено поляризации колебаний (Глава 3.5).

5. Колебания композитных трубок состоящих из нескольких тонких волокон. Исследован простейший случай когда трубка состоит из двух волокон (Глава 3.6).
6. Влияние течения на стоячие изгибные волны (Глава 3.7).
7. Резонансное затухание изгибных колебаний в трубках с аксиально однородной и неоднородной плотностью (Главы 3.8 и 3.9).
8. Резонансное затухание изгибных колебаний композитной трубки, состоящей из двух тонких волокон (Глава 3.10).
9. Изгибные колебания охлаждающихся корональных петель и эволюция их амплитуды при одновременном действии охлаждения и резонансного затухания (Глава 3.11).
10. Резонансное затухание изгибных колебаний с точки зрения преобразования волновых мод (Глава 3.12).

### **Научная новизна работы**

Научная новизна работы заключается в том, что впервые была разработана систематическая асимптотическая теория изгибных колебаний магнитных трубок. Эта теория использована для исследования зависимости характеристик распространяющихся и стоячих изгибных волн от параметров невозмущённого состояния и начальных условий. Результаты исследования применяются к корональной сейсмологии. Впервые изучена зависимость результатов корональной сейсмологии от предположений, сделанных относительно параметров осциллирующих структур.

### **Автором впервые получены и выносятся на защиту следующие основные положения:**

1. Выведено уравнение, описывающее изгибные волны в тонкой магнитной трубке с плотностью и радиусом поперечного сечения, изменяющимися вдоль трубки.
2. Получено уравнение описывающее распространение нелинейных изгибных волн по тонкой магнитной трубке. С помощью этого уравнения показано, что нелинейность может существенно ускорять резонансное затухание распространяющихся изгибных волн.

3. Исследовано влияние расширения корональной магнитной петли на определение шкалы высот по отношению периодов фундаментальной моды и первого обертона изгибных колебаний корональной петли.
4. Исследованы изгибные колебания магнитных трубок с эллиптическим сечением. Показано, что в этом случае имеется две фундаментальные моды изгибных колебаний: одна поляризованная вдоль большой оси эллиптического сечения и другая поляризованная вдоль малой оси. Тот же результат верен для каждого обертона.
5. Аналитически исследованы изгибные колебания двух параллельных магнитных трубок. Получены выражения для из частот и декрементов резонансного затухания.
6. Исследована эволюция амплитуды колебаний вследствие охлаждения петли. Получено выражение для адиабатического инварианта сохраняющегося во время эволюции колебания при условии, что характерное время затухания волны много больше периода колебаний. Показано, что охлаждение петли вызывает увеличение амплитуды колебаний.

### **Достоверность результатов**

Достоверность результатов, представленных в диссертации, базируется на использовании общепризнанных моделей физических явлений, методов и подходов магнитной гидродинамики. Правильность выбранных теоретических подходов также подтверждается и тем, что ряд полученных в работе результатов хорошо согласуется с наблюдательными данными, полученными на разных космических аппаратах.

### **Практическая ценность**

Практическая ценность диссертации состоит в том, что, используя асимптотические методы, удалось создать достаточно полную теорию изгибных колебаний магнитных трубок в солнечной атмосфере. Эта теория может быть использована при интерпретации наблюдательных данных, полученных на космических аппаратах. Она также может быть полезной при определении стратегии наблюдений, поскольку позволяет определить параметры изгибных колебаний, которые наиболее важны для корональной сейсмологии. Наконец, результаты диссертации могут

быть использованы для интерпретации наблюдений волн и колебаний в атмосферах звёзд.

### Апробация работы

Работы, вошедшие в диссертацию, обсуждались на семинарах Лаборатории физической газовой динамики Института Проблем Механики РАН (рук. проф. В.Б. Баранов), на семинарах по прикладной математике в университетах St Andrews, Leeds, Sheffield и Warwick (UK), University of Leuven (Belgium), а также на физическом семинаре University of Balearic Islands.

Основные положения и результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались на российских и международных конференциях, в том числе:

1. на 8-ой и 9-ой Ежегодной Конференции “Физика Плазмы в Солнечной Системе”, ИКИ РАН (2013, 2014 гг.);
2. на 40-ой научной ассамблее КОСПАР (2014 г.);
3. на Генеральных Ассамблеях Европейского Геофизического Союза (2013, 2014 гг.);
4. на 10-ой и 11-ой Европейской Конференции по Солнечной Физике (2002, 2005 гг.);
5. на симпозиуме Международного Астрономического Союза (Венесуэла, 2007 г.);
6. на конференциях BUKS (Belgium – United Kingdom – Spain) (2009, 2010, 2011, 2012, 2015 гг.);
7. на ежегодных международных конференциях Isradynamics – “Динамические Процессы в Космической Плазме” (Израиль, 2006, 2007, 2008, 2010, 2011, 2012, 2014 гг.);
8. на Британской Национальной Астрономической Конференции (2012 г.);
9. на ежегодных Британских коллоквиумах по прикладной математике (2004, 2005, 2006, 2007 гг.);
10. на ежегодных Британских конференциях по магнитной гидродинамике (2005, 2006, 2007, 2009, 2011, 2012 гг.).

## **Публикации и личный вклад автора**

По теме диссертации автором опубликовано в ведущих рецензируемых журналах 40 работ. Результаты, которые вошли в данную диссертацию, опубликованы в 30 статьях в ведущих рецензируемых журналах. Список этих публикаций приведен на страницах 353-355. Все основные результаты диссертации опубликованы в журналах из перечня ВАК. Вклад автора во все рассмотренные в диссертации задачи является основным. Автором осуществлялись: физические и математические постановки всех задач, вошедших в диссертационную работу; разработка оригинальных асимптотических методов решения задач, связанных с изгибными колебаниями магнитных трубок и с их затуханием вследствие резонансного поглощения; приложение полученных результатов к интерпретации наблюдательных данных; подготовка текстов публикаций, а также переписка с редакциями журналов и рецензентами.

## **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения и трёх частей, заключения и списка литературы. Первая часть является вводной. В ней даётся исторический обзор исследований по теории МГД волн в плазме с магнитной структурой. Здесь также приводятся основные уравнения МГД, используемые в работе и дано краткое описание волновых мод в однородной магнитной трубке. Во второй части рассматриваются распространяющиеся изгибные волны. Она состоит из введения и 4 глав. В третьей части рассматриваются стоячие изгибные волны в магнитных трубках. Эта часть состоит из введения и 11 глав. Работа изложена на 369 страницах, включает в себя 56 рисунков, 162 библиографических ссылки.

# 1. Волны и колебания в атмосфере с магнитной структурой

## 1.1. Исторический обзор

Данные наблюдений на Skylab с 1973 по 1979 год показали, что солнечная атмосфера является сильно неоднородной (см. напр. обзоры Harvey 1977; Priest 1978; Vaiana and Rosner 1978; Zwaan 1978, а также более поздние публикации Acton et al. 1992; Breke et al. 1997; Fludra et al. 1997; Schrijver et al. 1997; Kjeldseth-Moe and Breke 1998). В частности, магнитное поле в нижних слоях солнечной атмосферы (фотосфере и нижней части хромосферы) сосредоточено в магнитных трубках, где оно достигает интенсивности в несколько килогаусс. Типичными областями концентрации магнитного поля являются солнечные пятна. Другими примерами магнитных трубок являются спикулы и джеты.

В более высоких слоях солнечной атмосферы (верхней части хромосферы и, особенно, короне) магнитное давление сильно превышает плазменное, так что существование областей свободных от магнитного поля там невозможно и магнитное поле более однородно чем в нижних слоях. Однако эти слои характеризуются высокой неоднородностью плотности плазмы. Это, в свою очередь, приводит к сильной неоднородности альвеновской скорости.

Открытие магнитной структуры в атмосфере Солнца вызвало повышенный интерес теоретиков к изучению распространения МГД волн в плазме с магнитной структурой. Во второй половине 70-х и в 80-х годах прошлого столетия было опубликовано большое количество работ, посвященных изучению распространения МГД волн в плазме с магнитной структурой. В большинстве этих работ рассматривались волны в простейших магнитных структурах, каковыми являются магнитный разрыв, магнитный слой и магнитная трубка. Не претендуя на полноту, укажем работы Wentzel (1979), Roberts (1981a) и Uberoi and Narayanan (1986), в которых рассматривались волны, распространяющиеся по поверхности магнитного разрыва. Распространение волн в магнитном слое исследовалось в ра-

ботах Parker (1974), Cram and Wilson (1975), Roberts (1981b), Edwin and Roberts (1982) и Gordon and Hollweg (1983).

Наиболее полно были исследованы волны в магнитных трубках. Прежде всего отметим работу Рютова и Рютовой (1976), где было получено выражение для фазовой скорости изгибных волн в тонкой однородной магнитной трубке. В другой пионерской работе Defouw (1976) получил выражение для фазовой скорости симметричных волн в тонкой однородной магнитной трубке. После этого появилось большое количество статей, где исследовалось распространение волн в магнитных трубках. Назовём лишь некоторые из них: Roberts and Webb (1978, 1979), Parker (1979), Wentzel (1979), Wilson (1979), Spruit (1981). Поскольку диссертация посвящена волнам в магнитных трубках, остановимся на их теории более подробно. По-видимому наиболее полное исследование распространения волн в однородной магнитной трубке было представлено в работе Edwin and Roberts (1983). В одной из последующих глав будут представлены результаты, полученные в этой работе.

Отдельно следует отметить подход к исследованию колебаний корональных петель, основанный на моделировании их с помощью эквивалентного электрического контура (см. обзорные статьи Зайцева и Степанова 2008; Khodachenko 2009). Этот подход описывает некоторые усреднённые параметры корональных петель и не может учитывать некоторые тонкие параметры петель. Но, с другой стороны, он позволяет получить довольно простое описание весьма сложных явлений, таких как взаимодействие нескольких корональных петель. При стандартном магнитогидродинамическом описании этих явлений решение может быть получено только с помощью весьма трудоёмкого и сложного численного решения МГД уравнений. Поэтому представляется, что исследование поведения корональных петель основанное на моделировании их с помощью эквивалентного электрического контура является весьма перспективным.

В течение довольно длительного времени исследование волн и колебаний в магнитных трубках оставалось чисто теоретическим, поскольку не было прямых наблюдений этих волн. Ситуация резко изменилась после запуска космического аппарата TRACE (Transition Region and Coronal Explorer). С помощью этого аппарата были получены первые прямые наблюдения волн и колебаний в солнечной короне. 14 июля 1998 года на борту TRACE наблюдались поперечные колебания корональ-



ных магнитных петель, вызванные произошедшей неподалёку солнечной вспышкой. Результаты этих наблюдений были представлены в статьях Nakariakov et al. (1999) и Aschwanden et al. (1999). К настоящему времени накопилось достаточно большое количество наблюдательных данных связанных с поперечными колебаниями корональных петель (см. обзорную статью Aschwanden 2009). Поперечные колебания также наблюдались с помощью SOT (Solar Optical Telescope) на борту Hinode в магнитных волокнах протуберанцев (Okamoto et al. 2007).

Несколько раньше, 13 мая 1998 года, медленные магнитозвуковые волны, распространявшиеся вдоль корональных петель, наблюдались одновременно на борту TRACE и SoHO (Solar and Heliospheric Observatory). Их результаты были представлены в статьях Berghmans and Clette (1999), De Moortel et al. (2000) и Robbrecht et al. (2001). Начиная с первых наблюдений, эти волны регулярно фиксируются в корональных петлях (см. обзорную статью De Moortel 2009).

Позже наблюдались другие виды колебаний. В 2002 году на борту SoHO впервые наблюдались стоячие медленные волны в очень горячих (температура выше 6 МК) корональных петлях (Kliem et al. 2002; Wang et al. 2002, 2003a,b). Обзор наблюдений этих волн представлен в статье Wang (2011).

В 2007 году появились сообщения об обнаружении распространяющихся изгибных колебаний в магнитных трубках в солнечной атмосфере. Эти волны наблюдались с помощью SOT (Solar Optical Telescope) на борту Hinode в хромосферных спикулах (De Pontieu et al. 2007; He et al. 2009a,b), и с помощью XRT (X-ray Telescope) на борту Hinode в мягких рентгеновских джетах (Cirtain et al. 2007). Аналогичные волны наблюдались в корональных петлях с помощью COMP (Coronal Multi-Channel Polarimeter) (Tomczyk et al. 2007).

Отдельно следует упомянуть о быстрых симметричных волнах. По видимому, Rosenberg (1970) был первым, кто предположил, что эти волновые моды ответственны за наблюдаемые пульсации солнечного радиоизлучения IV типа в метровом диапазоне. Эта идея была затем развита многими авторами (см. напр. обзорную статью Nakariakov and Melnikov 2009).

К самым последним достижениям в области наблюдений волн и колебаний в солнечной атмосфере относится открытие торсионных альвеновских волн (Jess et al. 2009; Mathioudakis et al. 2013). Эти волны наблюдались

в большой яркой точке на солнечном диске.

Исследование волн и колебаний в солнечной атмосфере приобрело особую актуальность после возникновения новой ветви солнечной физики, получившей название Корональная сейсмология. Задачей корональной сейсмологии является получение информации о параметрах плазмы и магнитного поля в солнечной короне. Корональная сейсмология была предложена в работах Rosenberg (1970) и Uchida (1970). Позже Roberts et al. (1984) использовали (в то время гипотетические) изгибные колебания корональных магнитных петель для оценки коронального магнитного поля. Однако бурное развитие корональной сейсмологии началось с запуском космических аппаратов TRACE и SoHO в конце прошлого века. Её первые успехи связаны с наблюдением поперечных колебаний корональных магнитных петель. Nakariakov and Ofman (2001) использовали эти колебания для оценки магнитного поля в корональных петлях. Andries et al. (2005) разработали и успешно применили метод оценки шкалы высот с помощью одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона поперечных колебаний магнитных петель. Современное состояние теории оценки шкалы высот с помощью одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона поперечных колебаний и полученные результаты представлены в обзорной статье Andries et al. (2009).

Корональная сейсмология успешно раздвигает свои границы. В последнее время существенный прогресс был сделан в сейсмологии протуберанцев (см. напр. Terradas et al. 2008; Soler et al. 2010; Diaz et al. 2010; Arregui and Ballester 2011; Arregui et al. 2011). Предпринимаются попытки использовать методы корональной сейсмологии для определения параметров плазмы и магнитного поля в хромосфере. В связи с этим было даже предложено ввести новое название: Магнитная сейсмология. Это название подразумевает, что в сейсмологических целях используются наблюдения магнитогиродинамических волн в солнечной атмосфере. Однако это название исключает обычные звуковые волны. По-видимому, наиболее удачным названием было бы “Сейсмология солнечной атмосферы.”

## 1.2. Основные уравнения

Характерные периоды волн и колебаний рассматриваемых в диссертации равны нескольким минутам. С другой стороны, время свободного

пробега ионов в корональных магнитных петлях порядка нескольких секунд (см. напр. Hollweg 1985). Это означает, что плазма в корональных петлях может считаться сильно столкновительной и для её описания можно использовать уравнения классической магнитной гидродинамики.

Поскольку в короне  $\omega_i \tau_i \gtrsim 10^6$ , где  $\omega_i$  — ионная гирочастота и  $\tau_i$  — частота столкновений ионов, коэффициенты переноса в корональной плазме сильно анизотропны. В частности, тензор вязкости равен сумме пяти членов (Braginskii 1963). Первый член часто называют объёмной вязкостью поскольку в выражении для этого члена содержится дивергенция скорости. Стоит, однако, отметить, что этот член может быть отличен от нуля и в несжимаемой жидкости. Второй и третий члены описывают сдвиговую вязкость связанную со сдвигом скорости. Последние два члена не связаны с диссипацией и описывают дисперсию волн. Отношение двух последних членов к первому порядка  $(\omega_i \tau_i)^{-1}$ , а отношение второго и третьего членов к первому порядка  $(\omega_i \tau_i)^{-2}$ . На основании этих оценок кажется очевидным, что всегда можно пренебречь всеми членами в выражении для тензора вязкости по сравнению с первым при описании движения плазмы в короне. Однако, в действительности, ситуация не так проста. Как известно, значение вязкости определяется величиной числа Рейнольдса. В случае анизотропной вязкости имеется не одно, а целых три числа Рейнольдса. Но, для типичных параметров изгибных волн в короне, даже самое маленькое из них, посчитанное по объёмной вязкости, оказывается больше 1000. Так что вязкостью можно пренебречь при исследовании изгибных волн. Единственная ситуация, когда этот вывод не верен, возникает при исследовании резонанного затухания волн. Резонансное затухание это процесс передачи энергии от коллективного колебания плазмы к локальным альвеновским колебаниям в окрестности так называемой резонансной поверхности. Движение плазмы в окрестности этой поверхности характеризуется очень большими пространственными градиентами, поэтому в этой окрестности вязкость становится существенной. Ofman et al. (1994) и Erdélyi and Goossens (1994) показали что, несмотря на то, что члены, описывающие сдвиговую вязкость в выражении для тензора вязкости самые маленькие, именно они являются основными в окрестности резонансной поверхности. Поскольку в дальнейшем вязкость учитывается только в окрестности резонансной поверхности, в выражении для тензора вязкости оставляем только сдвиговую вязкость. Дальнейшее упрощение связано с учётом того факта,

что в окрестности резонансной поверхности градиенты скорости плазмы почти перпендикулярны невозмущённому магнитному полю и движение является почти несжимаемым. В результате тензор вязкости записывается в упрощённом виде

$$\mathbf{\Pi} = \rho\nu_v [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T], \quad (1.2.1)$$

где  $\rho$  — плотность плазмы,  $\nu_v$  — кинематическая вязкость,  $\mathbf{v}$  — скорость и верхний индекс ‘ $T$ ’ означает транспонирование тензора.

Для типичных параметров изгибных волн в короне магнитное число Рейнольдса очень велико, так что учёт конечной проводимости плазмы тоже важен только в окрестностях резонансных поверхностей. Как известно, отношение члена описывающего эффект Холла в уравнении Ома к члену, связанному с конечной проводимостью порядка  $\omega_e\tau_e$ , где  $\omega_e$  — гирочастота электронов и  $\tau_e$  — частота столкновений электронов. Для типичных условий в солнечной короне  $\omega_e\tau_e \gg 1$ . На первый взгляд эта оценка означает, что эффект Холла необходимо учитывать в окрестностях резонансных поверхностей. Однако, как и в случае с вязкостью, ситуация более сложная. Эффект Холла приводит к дисперсии волн в плазме. Движение в окрестности резонансной поверхности является суперпозицией альвеновских волн. Характерный пространственный масштаб движения в направлении поперёк невозмущённого магнитного поля на много порядков меньше, чем масштаб движения вдоль поля. Поэтому волновые векторы альвеновских волн практически перпендикулярны невозмущённому магнитному полю. Для волн с волновыми векторами перпендикулярны магнитному полю холловская дисперсия отсутствует, т.е. эффект Холла не влияет на распространение таких волн. Поэтому эффект Холла в окрестности резонансной поверхности можно не учитывать.

Для солнечной короны характерна очень высокая электронная теплопроводность. Однако теплопроводность оказывает существенное влияние на движение плазмы лишь в том случае, когда присутствуют достаточно большие градиенты температуры. Обычно изгибные волны, наблюдаемые в солнечной короне, являются длинными в том смысле, что их длины много больше радиуса магнитной трубки, в которой они распространяются. Такие волны практически не возмущают плотность и температуру плазмы. Это означает, что влиянием теплопроводности на изгибные волны в короне можно пренебречь.

При учёте вязкости и конечной проводимости в уравнении энергии

появляются члены, описывающие вязкую и джоулеву диссипацию. Однако, в случае статического невозмущённого состояния, эти члены являются нелинейными по отношению к возмущениям. Таким образом, вязкую и джоулеву диссипацию можно не учитывать в линейной теории резонансного поглощения. Более того, обычно эти виды диссипации не учитывают и в нелинейной теории, поскольку они весьма малы. Поэтому в дальнейшем вместо уравнения энергии используем уравнение сохранения энтропии.

Учитывая всё сказанное выше, в дальнейшем используем следующую систему уравнений магнитной гидродинамики (напр. Ландау и Лившиц 1957; Cowling 1960; Куликовский и Любимов 1965; Баранов и Краснобаев 1977; Priest 1982; Goedbloed and Poedts 2004):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu_v \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (1.2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (1.2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.2.6)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\nu_m$  — коэффициент магнитной диффузии,  $\gamma$  — показатель адиабаты и  $\mu_0$  — магнитная проницаемость свободного пространства. Заметим, что уравнение (1.2.6) следует рассматривать не как уравнение, а как начальное условие, поскольку из уравнения (1.2.5) следует, что (1.2.6) выполняется в любой момент времени, если оно выполняется в начальный момент времени.

Большая часть результатов, представленных в диссертации, получена в линейном приближении. Предполагаем, что невозмущённое состояние — статическое, т.е. оно не зависит от времени и невозмущённая скорость равна нулю. Далее представляем все переменные в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}. \quad (1.2.7)$$

Кроме того, вводим смещение плазмы, связанное со скоростью соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}. \quad (1.2.8)$$

После этого линеаризованные уравнения (1.2.2)-(1.2.6) записываются в виде

$$\rho' = -\nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}), \quad (1.2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = & -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0 + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0 \\ & + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{b} - \frac{\rho'}{\mu_0 \rho_0^2} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 + \nu_v \nabla^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

$$p' = C_S^2 \rho' + \rho_0^\gamma \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \left( \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right), \quad (1.2.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times \left( \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (1.2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (1.2.13)$$

где  $C_{S0}^2 = \gamma p_0 / \rho_0$  – квадрат скорости звука.

### 1.3. Волновые моды однородной магнитной трубки

Волны в однородных прямых магнитных трубках были достаточно полно исследованы в семидесятых и начале восьмидесятых годах прошлого века. По-видимому, наиболее полное исследование этих волн представлено в статье Edwin and Roberts (1983). В этой главе кратко изложена теория волн в однородных прямых магнитных трубках. Невозмущённое состояние показано на Рис. 1.3.1. В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  с осью  $z$  совпадающей с осью трубки граница трубки задаётся уравнением  $r = R$ . Невозмущённое магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Невозмущённые плотность, давление и магнитное поле равны  $\rho_i, p_i$  и  $\mathbf{B}_i$  внутри трубки ( $r < R$ ) и  $\rho_e, p_e$  и  $\mathbf{B}_e$  вне трубки ( $r > R$ ). На границе трубки выполняется условие равенства полных давлений (суммы плазменного и магнитного):

$$p_i + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = p_e + \frac{B_e^2}{2\mu_0}. \quad (1.3.1)$$

Возмущения описываются уравнениями (1.2.9)-(1.2.13). Кроме того они должны удовлетворять граничным условиям, которые являются условиями непрерывности радиального смещения плазмы и возмущения полного давления,

$$[[\xi_r]] = 0, \quad [[P]] = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad (1.3.2)$$

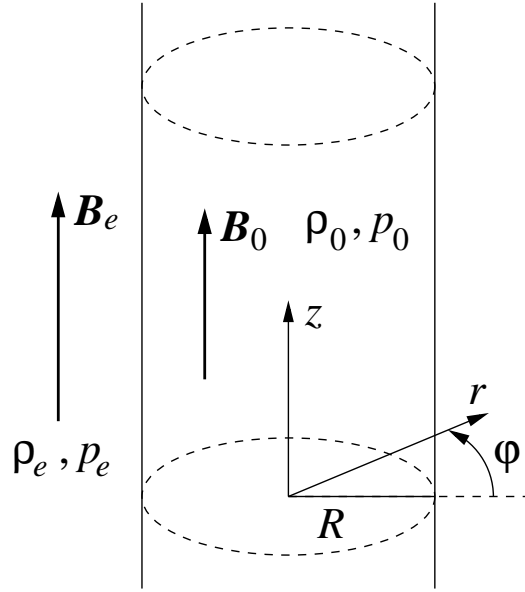


Рис. 1.3.1. Невозмущённое состояние в виде прямой однородной магнитной трубки.

где возмущение полного давления определяется формулой

$$P = p' + \frac{B_0 b_z}{\mu_0}, \quad (1.3.3)$$

и двойные скобки означают скачок величины на границе,

$$[[f(r)]] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [f(R + \varepsilon) - f(R - \varepsilon)]. \quad (1.3.4)$$

В дальнейшем рассматриваем только волны, захваченные в магнитной трубке. Это означает, что все возмущения должны затухать при  $r \rightarrow \infty$ . Более того, средняя за период волновая энергия приходящаяся на длину волны должна быть конечной. Кроме того, не рассматриваем затухание волн за счёт вязкости и конечной проводимости и полагаем  $\nu_v = \nu_m = 0$ .

Поскольку невозмущённое состояние не зависит от  $\varphi$  и  $z$ , переменные описывающие возмущения можно разложить в ряды Фурье по этим переменным и рассматривать только одну Фурье-компоненту. Кроме того, рассматриваем решения в виде нормальных мод. Поэтому полагаем возмущения всех величин пропорциональными  $\exp[i(m\varphi + kz - \omega t)]$ , где  $m$  — целое число. При этом  $m = 0$  соответствует симметричным волновым модам (sausage в англоязычной литературе),  $|m| = 1$  — изгибным модам (kink в англоязычной литературе), а  $|m| > 1$  — желобковым модам (fluting в англоязычной литературе). Сечения однородной магнитной трубки с границей возмущённой различными типами волновых мод показаны на Рис. 1.3.2.

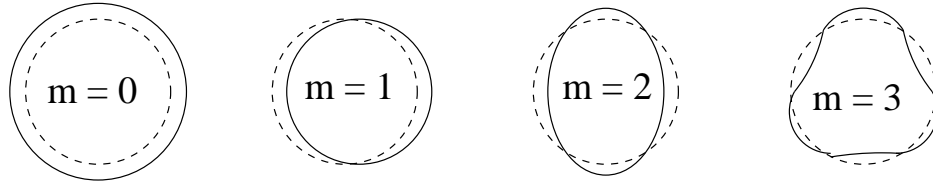


Рис. 1.3.2. Сечения однородной магнитной трубки с границей возмущённой различными типами волновых мод;  $m = 0$  соответствует симметричной моде,  $m = 1$  – изгибной, а  $m = 2, 3$  – желобковым модам. Пунктирные и сплошные линии показывают, соответственно, невозмущённую и возмущённую границу трубки.

После этого уравнения (1.2.9)-(1.2.13) приводятся к виду

$$\rho' + \rho_0 \left( \frac{1}{r} \frac{d(r\xi_r)}{dr} + \frac{im\xi_\varphi}{r} + ik\xi_z \right) = 0, \quad (1.3.5)$$

$$\omega^2 \xi_r = \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dr} - \frac{ikB_0 b_r}{\mu_0 \rho_0}, \quad (1.3.6)$$

$$\omega^2 \xi_\varphi = \frac{imP}{r\rho_0} - \frac{ikB_0 b_\varphi}{\mu_0 \rho_0}, \quad (1.3.7)$$

$$\omega^2 \xi_z = \frac{ikp'}{\rho_0}, \quad p' = C_S^2 \rho', \quad (1.3.8)$$

$$b_r = ikB_0 \xi_r, \quad b_\varphi = ikB_0 \xi_\varphi, \quad (1.3.9)$$

$$b_z = -B_0 \left( \frac{1}{r} \frac{d(r\xi_r)}{dr} + \frac{im\xi_\varphi}{r} \right), \quad (1.3.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(rb_r)}{dr} + \frac{imb_\varphi}{r} + ikb_z = 0. \quad (1.3.11)$$

Эти уравнения описывают движение плазмы внутри трубки при  $\rho_0 = \rho_i$ ,  $p_0 = p_i$  и  $B_0 = B_i$ , и движение плазмы вне трубки при  $\rho_0 = \rho_e$ ,  $p_0 = p_e$  и  $B_0 = B_e$ .

Исключая из уравнений (1.3.5)-(1.3.11) все переменные кроме  $P$ , получим

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + \left( \Lambda_i^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) P = 0, \quad (1.3.12)$$

где

$$\Lambda_i^2 = \frac{(\omega^2 - C_{Si}^2 k^2)(\omega^2 - V_{Ai}^2 k^2)}{(C_{Si}^2 + V_{Ai}^2)((\omega^2 - C_{Ti}^2 k^2))}, \quad (1.3.13)$$

$$V_{Ai}^2 = \frac{B_i^2}{\mu_0 \rho_i}, \quad C_{Ti}^2 = \frac{C_{Si}^2 V_{Ai}^2}{C_{Si}^2 + V_{Ai}^2}. \quad (1.3.14)$$



Здесь  $V_A$  – альвеновская скорость и  $C_T$  – касповая скорость (cusp или tube speed в англоязычной литературе). Радиальное смещение плазмы определяется уравнением

$$(\omega^2 - V_{Ai}^2 k^2) \xi_r = \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dr}. \quad (1.3.15)$$

Решение уравнения (1.3.12), регулярное при  $r = 0$ , даётся выражением

$$P = A_i J_m(r\Lambda_i), \quad (1.3.16)$$

где  $A_i$  – произвольная постоянная, а  $J_m$  – функция Бесселя первого рода порядка  $m$ . После этого из уравнения (1.3.15) находим радиальное смещение плазмы

$$\xi_r = \frac{A_i \Lambda_i J'_m(r\Lambda_i)}{\rho_i (\omega^2 - V_{Ai}^2 k^2)}, \quad (1.3.17)$$

где штрих означает производную. Если  $\Lambda_i^2 < 0$ , функцию  $J_m(r\Lambda_i)$  в уравнениях (1.3.16) и (1.3.17) необходимо заменить на модифицированную функцию Бесселя первого рода  $I_m(r|\Lambda_i|)$  и  $\Lambda_i$  в уравнении (1.3.17) на  $|\Lambda_i|$ . Волновая мода называется поверхностной когда  $\Lambda_i^2 < 0$  и объёмной когда  $\Lambda_i^2 > 0$ .

Уравнения (1.3.12)-(1.3.15) с индексом “ $i$ ” описывают движение плазмы внутри трубки и вне трубки если заменить индекс “ $i$ ” на “ $e$ ”. Если  $\Lambda_e^2 > 0$ , то решение во внешней области является линейной комбинацией  $J_m(r\Lambda_e)$  и  $Y_m(r\Lambda_e)$ , где  $Y_m$  – функция Бесселя второго рода. При больших значениях  $r$  обе эти функции являются осциллирующими с амплитудой осцилляций пропорциональной  $r^{-1/2}$ . Поскольку плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды возмущения, то при больших значениях  $r$  она пропорциональна  $r^{-1}$  и интеграл от неё по объёму расходится. Таким образом, условие конечности энергии волны, необходимое для существования захваченных волн, удовлетворяется только при  $\Lambda_e^2 < 0$ . В этом случае возмущение полного давления во внешней области даётся выражением

$$P = A_e K_m(r|\Lambda_e|), \quad (1.3.18)$$

где  $A_e$  – произвольная постоянная, а  $K_m$  – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка  $m$  (функция Макдональда). После этого из уравнения аналогичного уравнению (1.3.15), но записанного для внешней области, следует, что радиальное смещение плазмы даётся выражением

$$\xi_r = \frac{A_e |\Lambda_e| K'_m(r|\Lambda_e|)}{\rho_e (\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2)}. \quad (1.3.19)$$

Подставляя уравнения (1.3.16)-(1.3.19) в граничные условия (1.3.2), получаем систему двух линейных однородных алгебраических уравнений для  $A_i$  и  $A_e$ . Эта система имеет нетривиальные решения только когда её определитель равен нулю. Это условие даёт дисперсионное уравнение

$$\frac{\Lambda_i J'_m(R\Lambda_i)}{\rho_i(\omega^2 - V_{Ai}^2 k^2) J_m(R\Lambda_i)} = \frac{|\Lambda_e| K'_m(R|\Lambda_e|)}{\rho_e(\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2) K_m(R|\Lambda_e|)}. \quad (1.3.20)$$

В общем случае это дисперсионное уравнение можно решить только численно. Однако в некоторых случаях возможно аналитическое решение. В частности, такое решение можно получить в длинноволновом приближении когда  $kR \ll 1$ . Если дополнительно предположить, что  $R|\Lambda_i| \ll 1$  и  $R|\Lambda_e| \ll 1$ , то можно использовать приближённые выражения для функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя, справедливые при малых значениях аргумента (Abramowitz and Stegun 1964):

$$\begin{aligned} J_m(x) \approx I_m(x) \approx \frac{x^m}{2^m m!}, \quad K_0(x) \approx -\ln \frac{x}{2}, \\ K_m(x) \approx \frac{2^{m-1}(m-1)!}{x^m} \quad (m > 0). \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Используя эти соотношения получим из дисперсионного уравнения (1.3.20)

$$\omega^2 = C_k^2 k^2, \quad C_k^2 = \frac{\rho_i V_{Ai}^2 + \rho_e V_{Ae}^2}{\rho_0 + \rho_e}, \quad m \geq 1. \quad (1.3.22)$$

В частном случае, когда магнитное поле вне трубки отсутствует, т. е. когда  $V_{Ae} = 0$ , этот результат для изгибных волн ( $m = 1$ ) был впервые получен Рютовым и Рютовой (1976). Как видим, в длинноволновом приближении фазовая скорость как изгибных так и всех желобковых мод равна  $C_k$ . В случае симметричной моды анализ несколько сложнее. Прежде всего, используем соотношения (Abramowitz and Stegun 1964)

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad I'_0(x) = I_1(x), \quad K'_0(x) = -K_1(x). \quad (1.3.23)$$

После этого, с помощью уравнения (1.3.21) получим из уравнения (1.3.20)

$$\frac{(C_{Si}^2 + V_{Ai}^2)(\omega^2 - C_{Ti}^2 k^2)}{(\omega^2 - C_{Si}^2 k^2)} = -\frac{R^2 \rho_e}{\rho_0} (\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2) \ln \frac{R|\Lambda_e|}{2}. \quad (1.3.24)$$

Когда  $kR \rightarrow 0$ , правая часть этого уравнения стремится к нулю. Отсюда следует, что  $\omega^2$  близко к  $C_{Ti}^2 k^2$ . После этого, с помощью регулярного метода

возмущений, получим

$$\omega^2 \approx C_{Ti}^2 k^2 + \frac{R^2 k^4 \rho_e C_{Si}^4 (C_{Ti}^2 - V_{Ae}^2)}{\rho_i (C_{Si}^2 + V_{Ai}^2)^2} \ln \frac{R^2 k^2 |C_{Ti}^2 - C_{Se}^2| |C_{Ti}^2 - V_{Ae}^2|}{(C_{Se}^2 + V_{Ae}^2) |C_{Ti}^2 - C_{Te}^2 k^2|}. \quad (1.3.25)$$

Приближённое выражение для частоты длинных симметричных волн,  $\omega \approx C_{Ti} k$ , было впервые получено Defouw (1976).

На Рис. 1.3.3 показана зависимость различных симметричных и изгибных волновых мод, поддерживаемых магнитной трубкой, от волнового числа для параметров, характерных для солнечной короны. Поскольку в короне магнитное давление много больше плазменного давления, величина магнитного поля вне трубки приблизительно совпадает с величиной магнитного поля внутри трубки. Плотность внутри трубки больше плотности вне трубки. Поэтому  $V_{Ai} < V_{Ae}$ . Кроме того, скорость звука в короне много меньше альвеновской скорости. На Рис. 1.3.3 видно, что все волновые моды можно разделить на быстрые с фазовыми скоростями больше  $V_{Ai}$  и медленные с фазовыми скоростями порядка скорости звука. Все моды являются объёмными, т.е.  $\Lambda_i^2 > 0$ . Медленные моды существуют при всех волновых числах. Напротив быстрые волновые моды кроме одной существуют только в коротковолновом диапазоне. Единственным исключением является фундаментальная изгибная волновая мода, которая существует при всех волновых числах. Эта мода имеет особое значение поскольку она играет фундаментальную роль в корональной сейсмологии. Диссертация посвящена исследованию свойств этой волновой моды.

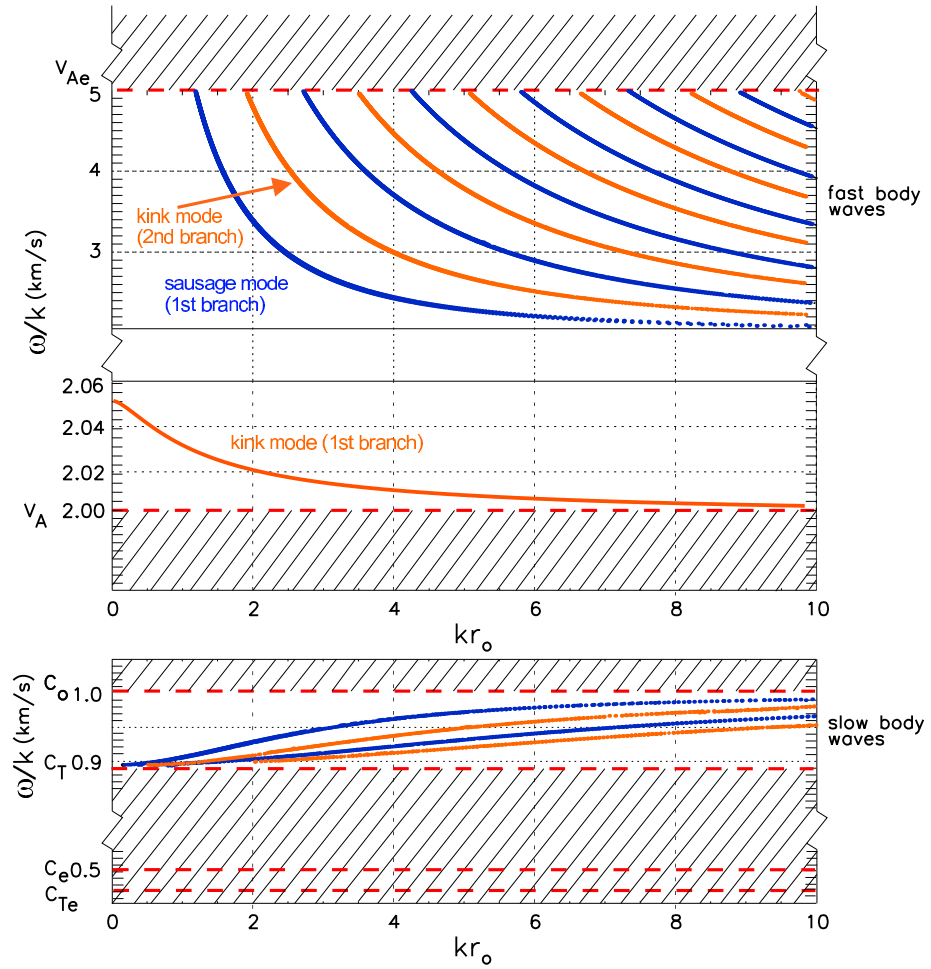


Рис. 1.3.3. Зависимость фазовой скорости волн в магнитной трубке от волнового числа для типичных условий в короне. Синие кривые соответствуют симметричным волновым модам, а красные — изгибным.

## 2. Распространяющиеся волны в магнитных трубках

### 2.1. Введение

В работе Tomczyk et al. (2007) были представлены первые наблюдения распространяющихся изгибных волн в корональных магнитных петлях. Эти наблюдения получены с помощью Коронального Многоканального Поляриметра (Coronal Multi-channel Polarimeter, CoMP) расположенного в Национальной Солнечной Обсерватории в Нью Мексико. CoMP позволяет измерять доплеровский сдвиг частоты излучения и, таким образом, наблюдать движение в направлении луча зрения. Отметим, что Tomczyk et al. (2007) интерпретировали результаты наблюдений в терминах альвеновских волн. Однако позже эта аргументация подверглась критике и было показано, что интерпретация в терминах изгибных волн гораздо лучше соответствует наблюдениям (см. напр. Van Doorselaere et al. 2008a).

Позже изгибные волны в корональных магнитных петлях наблюдались с помощью Atmospheric Imaging Assembly (AIA) на борту Solar Dynamic Observatory (SDO) (McIntosh et al. 2011). AIA позволяет измерять скорость перпендикулярную лучу зрения. В недавно опубликованной статье Threfall et al. (2013) представлены результаты наблюдений распространяющихся изгибных волн в корональных магнитных петлях, полученные одновременно с помощью CoMP и AIA 11 апреля 2012. Найдено прекрасное соответствие результатов двух типов наблюдений.

Распространяющиеся изгибные волны наблюдались также в спикулах с помощью SOT (Solar Optical Telescope) станции Hinode (De Pontieu et al. 2007; He et al. 2009a,b), и с помощью XRT (X-ray Telescope) также на борту Hinode в мягких рентгеновских джетах (Cirtain et al. 2007) и в протуберанцах. Важно отметить, что, в то время как распространяющиеся изгибные волны в корональных магнитных петлях имеют очень малую амплитуду и адекватно описываются линейной теорией, аналогичные волны в протуберанцах могут иметь достаточно большие амплитуды, так что нелинейные эффекты могут оказаться существенными. Что касается изгибных волн в спикулах, то их амплитуды практически всегда велики и для

их описания необходимо использовать нелинейную теорию. Обзор волн и колебаний в протуберанцах дан в статье Arreguı et al. (2012). Наблюдения поперечных волн в магнитных структурах в солнечной атмосфере описаны в работе Mathioudakis et al. (2013).

В этой части диссертации исследуется распространение изгибных волн в магнитных трубках. В следующей главе выводится уравнение описывающее волны малой амплитуды в магнитной трубке с плотностью плазмы и радиусом поперечного сечения меняющимися вдоль трубки. В главе 2.3 исследуется безотражательное распространение изгибных волн в неоднородных магнитных трубках. В главе 2.4 изучается резонансное затухание распространяющихся изгибных волн. В главе 2.5 рассматривается влияние нелинейности на резонансное затухание распространяющихся изгибных волн.

## 2.2. Вывод уравнения для изгибных волн в тонких трубках с переменным сечением

В данной главе представлен вывод уравнения описывающего изгибные волны в тонкой прямой магнитной трубке с переменным сечением. Этот вывод опубликован в работе Ruderman, Verth and Erdélyi (2008).

### 2.2.1. Постановка задачи и невозмущённое состояние

Рассматривается равновесная конфигурация в виде прямой магнитной трубки с круговым сечением. Радиус сечения и плотность плазмы могут меняться вдоль трубки. Однако предполагается, что плотность не меняется в радиальном направлении как внутри так и вне трубки и лишь испытывает скачок на границе трубки. Изгибные волны в трубке описываются линеаризованными уравнениями идеальной магнитной гидродинамики ( $\nu_v = \nu_m = 0$ ) (1.2.2)-(1.2.6) в приближении холодной плазмы ( $p' = 0$ ). В дальнейшем используем цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью магнитной трубки (см. левую часть рис. 2.2.1). В этой системе координат граница трубки задаётся уравнением  $r = R(z)$ . Невозмущённая плотность плазмы определяется уравнением

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_i(z), & r < R(z), \\ \rho_e(z), & r > R(z). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

В дальнейшем предполагается, что  $\rho_e(z) < \rho_i(z)$ . Азимутальная компонента невозмущённого магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  равна нулю, так что  $\mathbf{B}_0 = (B_r, 0, B_z)$ , и  $\mathbf{B}_0$  не зависит от  $\varphi$ . Компоненты невозмущённого магнитного поля могут быть выражены через функцию магнитного потока  $\Psi$ ,

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (2.2.2)$$

Электрический ток  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}_0 / \mu_0$  может иметь только азимутальную компоненту,  $\mathbf{J} = J \mathbf{e}_\varphi$ , где  $\mathbf{e}_\varphi$  – единичный вектор в азимутальном направлении. Радиальная компонента силы Лоренца,  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0$ , равна  $JB_z$ . В приближении холодной плазмы сила Лоренца в равновесии должна быть равна нулю. В дальнейшем предполагаем, что  $B_z \neq 0$ , откуда следует что  $J = 0$ , т.е. равновесное магнитное поле потенциально,  $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$ . Подставляя уравнение (2.2.2) в уравнение  $\nabla \times \mathbf{B}_0$ , получаем, что  $\Psi$  должна удовлетворять уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.2.3)$$

Уравнение границы магнитной трубки имеет вид  $\Psi(r, z) = \Psi_0 = \text{const}$ . В дальнейшем полагаем что

$$\mathbf{B} \rightarrow B_\infty \mathbf{e}_z \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.2.4)$$

где  $B_\infty = \text{const} > 0$  и  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор оси  $z$ .

### 2.2.1a. Магнитная трубка конечной длины

Рассмотрим пример потенциального магнитного поля, которое может рассматриваться как модель корональной магнитной петли длины  $L$ . Соответственно, это поле рассматриваем в области  $|z| \leq L/2$ . Положим

$$\Psi = \frac{1}{2} B_\infty r^2 + \Psi_* r J_1(r/\ell) \cosh(z/\ell), \quad (2.2.5)$$

где  $\Psi_*$  и  $\ell$  – произвольные константы,  $\ell > 0$ . Легко проверить, что функция, определяемая уравнением (2.2.5), удовлетворяет уравнению (2.2.3). Параметр  $\ell$  можно рассматривать как характерный пространственный масштаб изменения магнитного поля. Для компонент магнитного поля получаем

$$B_r = -(\Psi_*/\ell) J_1(r/\ell) \sinh(z/\ell), \quad B_z = B_\infty + (\Psi_*/\ell) J_0(r/\ell) \cosh(z/\ell). \quad (2.2.6)$$

Нетрудно видеть, что это магнитное поле удовлетворяет условию (2.2.4)

Обозначим через  $j_1$  первый положительный нуль функции  $J_1(x)$ ,  $J_1(j_1) = 0$ . Поскольку  $J_0'(x) = -J_1(x)$ , где штрих означает производную,  $J_0(x)$  принимает минимальное значение при  $x = j_1$ . С другой стороны,  $J_0(x)$  принимает максимальное значение равное 1 при  $x = 0$ . Полагая

$$-\ell B_\infty < \Psi_* \cosh(L/2\ell) < \ell B_\infty / |J_0(j_1)| \approx 2.5\ell B_\infty, \quad (2.2.7)$$

получим  $B_z > 0$  везде. Уравнение (2.2.6) принимает особенно простую форму если положить  $\ell \gtrsim L$  и ограничиться только рассмотрением окрестности магнитной трубки в предположении, что трубка тонкая, т.е.  $R(z) \ll L$ . В этом случае  $r/\ell \ll 1$ . Используя приближённые выражения для функций Бесселя, справедливые при малых значениях аргумента (см. уравнение (1.3.21))

$$J_0(x) \approx 1, \quad J_1(x) \approx \frac{x}{2}, \quad (2.2.8)$$

получим выражения для компонент магнитного поля,

$$B_r \approx -\frac{r\Psi_*}{2\ell^2} \sinh\left(\frac{z}{\ell}\right), \quad B_z \approx B_\infty + \frac{\Psi_*}{\ell} \cosh\left(\frac{z}{\ell}\right). \quad (2.2.9)$$

Уравнение границы трубки в этом случае записывается в виде

$$R(z) \approx \ell \sqrt{\frac{2\Psi_0}{\ell^2 B_\infty + \ell\Psi_* \cosh(z/\ell)}}. \quad (2.2.10)$$

Здесь  $\Psi_0 > 0$  (напомним, что точное уравнение границы имеет вид  $\Psi(r, z) = \Psi_0$ ). Заметим, что трубка является расширяющейся [ $R(0) < R(\pm L/2)$ ], если  $\Psi_* > 0$ , и сужающейся [ $R(0) > R(\pm L/2)$ ], если  $\Psi_* < 0$ . Условие, что трубка тонкая,  $R(z) \ll L$ , записывается в виде

$$\Psi_0 \ll \frac{L^2(\ell B_\infty + \Psi_*)}{4\ell}. \quad (2.2.11)$$

Определим степень расширения трубки как  $\lambda = R(0)/R_f$ , где  $R_f = R(\pm L/2)$  — радиус трубки у оснований. С помощью уравнения (2.2.10) получим

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{\ell B_\infty + \Psi_* \cosh(L/2\ell)}{\ell B_\infty + \Psi_*}}. \quad (2.2.12)$$

Уравнение (2.2.7) гарантирующее, что  $B_z > 0$  всюду, может быть приведено к виду

$$\lambda^2 < \lambda_M^2 = \frac{[1 - J_0(j_1)] \cosh(L/2\ell)}{1 - J_0(j_1) \cosh(L/2\ell)} \approx \frac{1.4 \cosh(L/2\ell)}{1 + 0.4 \cosh(L/2\ell)}. \quad (2.2.13)$$



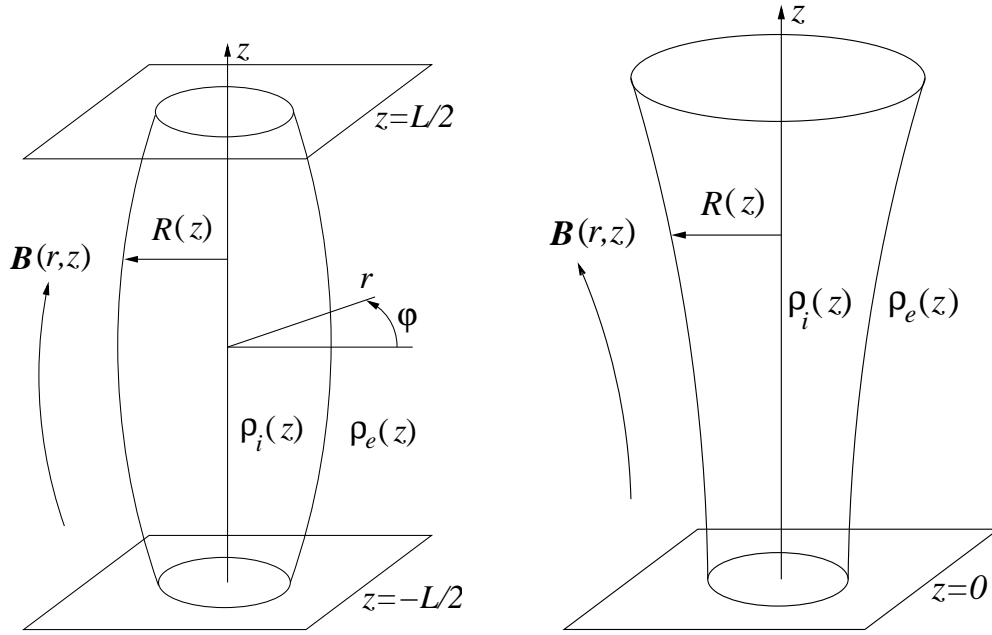


Рис. 2.2.1. **слева:** Расширяющаяся магнитная трубка длины  $L$ . Магнитное поле внутри и вне трубки описывается функцией магнитного потока определяемой уравнением (2.2.5); **справа:** Полубесконечная расширяющаяся магнитная трубка. Магнитное поле внутри и вне трубки описывается функцией магнитного потока определяемой уравнением (2.2.15).

Нетрудно заметить, что  $\lambda_M$  является монотонно возрастающей функцией параметра  $L/\ell$ ,  $\lambda_M \rightarrow 1$  при  $L/\ell \rightarrow 0$ , и  $\lambda_M \rightarrow [1 - 1/J_0(j_1)]^{1/2} \approx 1.87$  при  $L/\ell \rightarrow \infty$ . Используя уравнения (2.2.10) и (2.2.12), можно переписать уравнение (2.2.10) в виде

$$R(z) \approx R_a \lambda \sqrt{\frac{\cosh(L/2\ell) - 1}{\cosh(L/2\ell) - \lambda^2 + (\lambda^2 - 1) \cosh(z/\ell)}}. \quad (2.2.14)$$

Типичная форма магнитной трубки длины  $L$  с  $\lambda > 1$  показана в левой части рис. 2.2.1.

Отметим важное свойство рассматриваемой модели: она может описывать только магнитные трубки с относительно небольшой степенью расширения, определённо меньшей чем 1.87. Однако это свойство присуще только данной частной модели. Существуют решения уравнения (2.2.3) описывающие магнитные трубки конечной длины с большей степенью расширения.

### 2.2.1b. Полубесконечная магнитная трубка

Рассмотрим другой пример потенциального магнитного поля, кото-

рый может рассматриваться как модель расширяющейся магнитной трубки в хромосфере. Соответственно, магнитное поле рассматриваем в области  $z \geq 0$ . Функция магнитного потока задаётся уравнением

$$\Psi = \frac{1}{2}B_\infty r^2 + \Psi_* r J_1(r/\ell) e^{-z/\ell}, \quad (2.2.15)$$

где  $\Psi_*$  и  $\ell$  – положительные произвольные константы и  $\ell$  может рассматриваться как характерный пространственный масштаб изменения магнитного поля. Для компонент магнитного поля получаем

$$B_r = (\Psi_*/\ell) J_1(r/\ell) e^{z/\ell}, \quad B_z = B_\infty + (\Psi_*/\ell) J_0(r/\ell) e^{z/\ell}. \quad (2.2.16)$$

Условие, что  $B_z > 0$  во всей области  $z \geq 0$ , записывается в виде

$$\ell B_\infty / \Psi_* > |J_0(j_1)| \approx 2.5. \quad (2.2.17)$$

Радиус трубки,  $R(z)$ , определяется уравнением  $\Psi(R(z), z) \equiv \Psi_0$ . Из этого тождества следует, что  $R(z) \rightarrow R_\infty = \sqrt{2\Psi_0/B_\infty}$  при  $z \rightarrow \infty$ . Используя уравнение (2.2.8), получим в приближении тонкой трубки для компонент магнитного поля и радиуса трубки

$$B_r \approx \frac{r\Psi_*}{2\ell^2} e^{-z/\ell}, \quad B_z \approx B_\infty + \frac{\Psi_*}{\ell} e^{-z/\ell}. \quad (2.2.18)$$

$$R(z) \approx R_\infty \sqrt{\frac{\ell B_\infty}{\ell B_\infty + \Psi_* e^{-z/\ell}}}. \quad (2.2.19)$$

В данной модели условие, что трубка тонкая принимает совсем простой вид:  $R_\infty \ll \ell$ . Для степени расширения трубки получим

$$\lambda = \frac{R_\infty}{R_f} = \sqrt{\frac{\ell B_\infty + \Psi_*}{\ell B_\infty}}, \quad (2.2.20)$$

где  $R_f = R(0)$ . В соответствии с неравенством (2.2.17) степень расширения трубки в данной модели не может превышать  $[1 + 1/J_0(j_1)]^{1/2} \approx 1.125$ . Однако, как и в случае конечной трубки, это ограничение присуще только данной модели. В других моделях полубесконечных трубок степень расширения может быть значительно больше. Кроме того, даже в рассматриваемой модели степень расширения может быть значительно больше если вместо условия  $B_z > 0$  всюду наложить более слабое условие  $B_z > 0$  только в самой трубке и в её непосредственной окрестности. Типичная форма полубесконечной расширяющейся трубки показана в правой части рис. 2.2.1.

В дальнейшем рассматриваем изгибные волны в произвольной тонкой магнитной трубке. Однако на невозмущённое состояние налагается условие  $B_z > 0$  всюду. Обозначая характерную длину волны через  $L$ , запишем условие тонкой трубки в виде  $R(z)/L = O(\epsilon)$ , где  $\epsilon \ll 1$ . Поскольку ось трубки является магнитной линией,  $\Psi(0, z) = \text{const}$ . Без ограничения общности можно положить  $\Psi(0, z) = 0$ . В приближении тонкой трубки, внутри и в её окрестности функцию  $\Psi(r, z)$  можно аппроксимировать первым ненулевым членом её разложения в ряд Тейлора по переменной  $r$ . В соответствии с уравнением (2.2.2) он пропорционален  $r^2$ . Таким образом,

$$\Psi \approx \frac{1}{2}r^2 h(z), \quad (2.2.21)$$

где функция  $h(z)$  связана с уравнением границы трубки соотношением

$$h(z)R^2(z) = 2\Psi_0 = \text{const}. \quad (2.2.22)$$

Для компонент магнитного поля имеем приближённые выражения

$$B_r = -\frac{r}{2}h'(z), \quad B_z = h(z). \quad (2.2.23)$$

где штрих обозначает производную. Напомним, что уравнения (2.2.21) и (2.2.23) справедливы только внутри магнитной трубки и в её окрестности, где  $r/L = O(\epsilon)$ . После этого с помощью уравнения (2.2.23) получим

$$B_0 = \sqrt{B_r^2 + B_z^2} = B_z + O(\epsilon^2) = h(z) + O(\epsilon^2). \quad (2.2.24)$$

### 2.2.2. Преобразование линейных уравнений магнитной гидродинамики

В приближении холодной плазмы малые возмущения плазмы полностью описываются уравнениями (1.2.10) и (1.2.12). Уравнение (1.2.9) служит для определения возмущения плотности по известному смещению плазмы. В цилиндрических координатах имеем  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_r, \xi_\varphi, \xi_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_r, b_\varphi, b_z)$ . Вводя параллельные и перпендикулярные компоненты  $\boldsymbol{\xi}$  и  $\mathbf{b}$ ,

$$\xi_{\parallel} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{B}_0/B_0, \quad \xi_{\perp} = (B_{0z}\xi_r - B_{0r}\xi_z)/B_0, \quad (2.2.25)$$

$$b_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}_0/B_0, \quad b_{\perp} = (B_{0z}b_r - B_{0r}b_z)/B_0, \quad (2.2.26)$$

а также возмущение магнитного давления

$$P = \frac{1}{\mu_0} B_0 b_{\parallel} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}_0, \quad (2.2.27)$$

перепишем уравнения (1.2.10) и (1.2.12) с  $\nu_v = \nu_m = 0$  и  $p' = 0$  в компонентах в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 \rho_0}{B_0} \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} &= \mu_0 B_r \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P}{B_0^2} \right) - \mu_0 B_z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{P}{B_0^2} \right) \\ &+ r B_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_{\perp}}{r B_0} \right) + B_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{b_{\perp}}{B_0} \right), \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

$$\mu_0 \rho_0 \frac{\partial^2 \xi_{\varphi}}{\partial t^2} = \frac{B_r}{r} \frac{\partial(r b_{\varphi})}{\partial r} + B_z \frac{\partial b_{\varphi}}{\partial z} - \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad (2.2.29)$$

$$B_0 b_{\perp} = B_z \frac{\partial(B_0 \xi_{\perp})}{\partial z} + \frac{B_r}{r} \frac{\partial(r B_0 \xi_{\perp})}{\partial r}, \quad (2.2.30)$$

$$b_{\varphi} = \frac{\partial(B_r \xi_{\varphi})}{\partial r} + \frac{\partial(B_z \xi_{\varphi})}{\partial z}, \quad (2.2.31)$$

$$\mu_0 P = B_r \frac{\partial(B_0 \xi_{\perp})}{\partial z} - \frac{B_z}{r} \frac{\partial(r B_0 \xi_{\perp})}{\partial r} - \frac{B_0^2}{r} \frac{\partial \xi_{\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (2.2.32)$$

Из уравнения (1.2.10) следует что  $\xi_{\parallel} = 0$ .

В дальнейшем удобно вместо независимой переменной  $r$  использовать переменную  $\Psi$ , так что  $r = r(\Psi, z)$ . С помощью уравнения (2.2.2) получим для производных произвольной функции  $f$  следующие соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = r B_z \frac{\partial f}{\partial \Psi}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_r = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{\Psi} - r B_r \frac{\partial f}{\partial \Psi}, \quad (2.2.33)$$

где нижние индексы  $r$  и  $\Psi$  у производных означают что они берутся, соответственно, при  $r = \text{const}$  и  $\Psi = \text{const}$ . Дифференцируя тождество  $\Psi \equiv \Psi(r(\Psi, z), z)$  по  $z$  и используя уравнение (2.2.2), получим

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{B_r}{B_z}. \quad (2.2.34)$$

Дифференцируя тождество  $\Psi \equiv \Psi(r(\Psi, z), z)$  по  $z$  и используя уравнения (2.2.2) и (2.2.34), находим

$$\frac{\partial r}{\partial \Psi} = \frac{1}{r B_z}. \quad (2.2.35)$$

С помощью уравнений (2.2.33)-(2.2.35) и  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  (2.2.28)-(2.2.32) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{B_0^2 B_r}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{r B_0^4}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial \Psi} + \frac{r B_0^2 B_z}{\mu_0 \rho_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b_{\perp}}{r B_0} \right), \quad (2.2.36)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} = \frac{B_z}{\mu_0 r \rho_0} \frac{\partial(r b_\varphi)}{\partial z} - \frac{B_0^2}{r \rho_0} \frac{\partial Q}{\partial \varphi}, \quad (2.2.37)$$

$$b_\perp = \frac{B_z}{r B_0} \frac{\partial(r u)}{\partial z}, \quad (2.2.38)$$

$$b_\varphi = r B_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi_\varphi}{r} \right), \quad (2.2.39)$$

$$Q = \frac{B_r}{\mu_0 B_0^2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{r}{\mu_0} \frac{\partial u}{\partial \Psi} - \frac{B_z u}{\mu_0 r B_0^2} - \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (2.2.40)$$

где

$$u = B_0 \xi_\perp, \quad Q = \frac{P}{B_0^2}. \quad (2.2.41)$$

Исключая  $b_\perp$  и  $b_\varphi$  из уравнений (2.2.36)-(2.2.39), получим уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{r B_0^2 B_z}{\mu_0 \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{B_z}{r^2 B_0^2} \frac{\partial(r u)}{\partial z} \right) + \frac{B_0^2}{\rho_0} \left( B_r \frac{\partial Q}{\partial z} - r B_0^2 \frac{\partial Q}{\partial \psi} \right), \quad (2.2.42)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} = \frac{B_z}{\mu_0 r \rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ r^2 B_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi_\varphi}{r} \right) \right] - \frac{B_0^2}{r \rho_0} \frac{\partial Q}{\partial \varphi}. \quad (2.2.43)$$

Уравнения (2.2.40), (2.2.42) и (2.2.43) образуют замкнутую систему уравнений для  $u$ ,  $\xi_\varphi$  и  $Q$ . Она справедлива для любого невозмущённого магнитного поля определяемого уравнениями (2.2.1) и (2.2.2). Если взять  $\Psi$  и  $\mathbf{B}_0$ , определяемые уравнениями (2.2.21) и (2.2.23), то система уравнений (2.2.40), (2.2.42) и (2.2.43) существенно упрощается. В этом случае функция  $r(\Psi, z)$  задаётся формулой

$$r = \sqrt{\frac{2\Psi}{h(z)}}. \quad (2.2.44)$$

После этого, с помощью выражений (2.2.23), (2.2.24) и (2.2.44), уравнения (2.2.40), (2.2.42) и (2.2.43) приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{h\sqrt{h}}{\rho_0} \left[ \frac{h}{\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{u}{\sqrt{h}} \right) - \sqrt{2\Psi} \left( \frac{h'}{2} \frac{\partial Q}{\partial z} + h^2 \frac{\partial Q}{\partial \Psi} \right) \right], \quad (2.2.45)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} = \frac{h\sqrt{h}}{\rho_0} \left[ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 (\xi_\varphi \sqrt{h})}{\partial z^2} - \frac{h}{\sqrt{2\Psi}} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right], \quad (2.2.46)$$

$$Q = \frac{-1}{\mu_0 \sqrt{2h\Psi}} \left( \frac{h'\Psi}{h^2} \frac{\partial u}{\partial z} + 2\Psi \frac{\partial u}{\partial \Psi} + u + h \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (2.2.47)$$

Эта система используется в следующем разделе для вывода уравнения, описывающего изгибные волны в тонкой магнитной трубке.

### 2.2.3. Вывод уравнения для изгибных волн

Пусть характерные пространственные масштабы изменения возмущений в радиальном и аксиальном направлениях равны, соответственно,  $R_*$  и  $L$ , где  $R_*$  – некоторое значение  $R(z)$ , например,  $R(0)$ . В приближении тонкой трубки  $R_*/L = O(\epsilon)$ . Для того, чтобы иметь одинаковые масштабы изменения для обеих пространственных переменных, вводим масштабированную аксиальную переменную  $Z = \epsilon z$ . Характерный период возмущений равен  $L/V_*$ , где  $V_*$  – характерная фазовая скорость. Это время в  $\epsilon^{-1}$  раз больше чем характерное время посчитанное по радиусу,  $R_*/V_*$ . В соответствии с этим вводим масштабированное время  $T = \epsilon t$ . В дальнейшем рассматриваем только изгибные волны. В соответствии с этим полагаем что возмущения всех величин пропорциональны  $e^{i\varphi}$ . После этого уравнения (2.2.45)-(2.2.47) приводятся к виду

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \frac{h\sqrt{h}}{\rho} \left[ \epsilon^2 \frac{h}{\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left( \frac{u}{\sqrt{h}} \right) - \sqrt{2\Psi} \left( \frac{\epsilon^2}{2} \frac{dh}{dZ} \frac{\partial Q}{\partial Z} + h^2 \frac{\partial Q}{\partial \Psi} \right) \right], \quad (2.2.48)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial T^2} = \frac{h\sqrt{h}}{\rho} \left[ \frac{\epsilon^2}{\mu_0} \frac{\partial^2 (\xi_\varphi \sqrt{h})}{\partial Z^2} - \frac{ih}{\sqrt{2\Psi}} Q \right], \quad (2.2.49)$$

$$Q = \frac{-1}{\mu_0 \sqrt{2h\Psi}} \left( \epsilon^2 \frac{\Psi}{h^2} \frac{dh}{dZ} \frac{\partial u}{\partial Z} + 2\Psi \frac{\partial u}{\partial \Psi} + u + ih\xi_\varphi \right). \quad (2.2.50)$$

Система уравнений (2.2.48)-(2.2.50) содержит малый параметр  $\epsilon^2$ . В соответствии с этим ищем решение в виде разложений по  $\epsilon^2$ . Из уравнения (2.2.49) следует что  $Q \sim \epsilon^2$ , поэтому разложение для  $Q$  начинаем с члена пропорционального  $\epsilon^2$ :

$$u = u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \quad \xi_\varphi = \xi_{\varphi 1} + \epsilon^2 \xi_{\varphi 2} + \dots, \quad Q = \epsilon^2 Q_1 + \epsilon^4 Q_2 + \dots \quad (2.2.51)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (2.2.48)-(2.2.50) и собирая члены главного порядка, получим

$$\frac{h}{\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left( \frac{u_1}{\sqrt{h}} \right) - h^2 \sqrt{2\Psi} \frac{\partial Q_1}{\partial \Psi} - \frac{\rho_0}{h\sqrt{h}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T^2} = 0, \quad (2.2.52)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 (\xi_{\varphi 1} \sqrt{h})}{\partial Z^2} - \frac{ih}{\sqrt{2\Psi}} Q_1 - \frac{\rho_0}{h\sqrt{h}} \frac{\partial^2 \xi_{\varphi 1}}{\partial T^2} = 0, \quad (2.2.53)$$

$$2\Psi \frac{\partial u_1}{\partial \Psi} + u_1 + ih\xi_{\varphi 1} = 0. \quad (2.2.54)$$

Исключая  $\xi_{\varphi 1}$  из уравнений (2.2.53) и (2.2.54), находим

$$Q_1 = \frac{2\Psi}{h\mu_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{\mu_0\rho_0}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \right) \frac{\partial U}{\partial \Psi}, \quad (2.2.55)$$

где

$$U = \sqrt{\frac{2\Psi}{h}} u_1. \quad (2.2.56)$$

Подстановка выражения для  $Q_1$  в уравнение (2.2.52) даёт

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{\mu_0\rho_0}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \right) \left[ 4\Psi \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \Psi \frac{\partial U}{\partial \Psi} \right) - U \right] = 0. \quad (2.2.57)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} - \frac{\mu_0\rho_0}{h^2} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} = 0. \quad (2.2.58)$$

Поскольку, в соответствии с уравнением (2.2.24), величина  $h/\sqrt{\mu_0\rho_0}$  равна альвеновской скорости с точностью до  $\epsilon^2$ , уравнение (2.2.58) описывает альвеновские волны внутри трубки при  $\rho_0 = \rho_i$ , и вне трубки при  $\rho_0 = \rho_e$ . В настоящей главе рассматриваются только изгибные волны, а альвеновские волны исключаются из рассмотрения. В этом случае единственным решением уравнения (2.2.58) является  $f = 0$ . В результате из уравнения (2.2.57) следует

$$4\Psi \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \Psi \frac{\partial U}{\partial \Psi} \right) - U = 0. \quad (2.2.59)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$U = U_1(Z)\Psi^{1/2} + U_2(Z)\Psi^{-1/2}, \quad (2.2.60)$$

где  $U_1(Z)$  и  $U_2(Z)$  – произвольные функции. Поскольку уравнение границы трубки имеет вид  $\Psi = \Psi_0$ , области внутри и вне трубки задаются, соответственно, неравенствами  $\Psi < \Psi_0$  и  $\Psi > \Psi_0$ . Решение внутри трубки должно быть регулярным при  $\Psi = 0$ , отсюда

$$U = U_1(Z)\Psi^{1/2}. \quad (2.2.61)$$

С другой стороны, возмущения должны затухать при удалении от трубки. Поэтому решение вне трубки имеет вид

$$U = U_2(Z)\Psi^{-1/2}. \quad (2.2.62)$$

Используем граничные условия. Первое условие – непрерывность  $\xi_{\perp}$  на границе трубки. Отсюда в первом приближении по  $\epsilon^2$  следует, что функция  $U$  непрерывна на границе трубки и, следовательно,

$$U_2(Z) = \Psi_0 U_1(Z). \quad (2.2.63)$$

Второе граничное условие – непрерывность  $P$  на границе трубки из которого в первом приближении по  $\epsilon^2$  следует непрерывность на границе трубки функции  $Q$ . С помощью уравнений (2.2.55) и (2.2.61)-(2.2.63) из этого условия получим

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial T^2} - C_k^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial Z^2} = 0, \quad (2.2.64)$$

где

$$C_k^2 = \frac{2B^2(z)}{\mu_0[\rho_i(z) + \rho_e(z)]}. \quad (2.2.65)$$

Из (2.2.22), (2.2.41), (2.2.56) и (2.2.61) находим

$$U_1 = \text{const} \times \frac{\xi_{\perp}}{R(z)} + O(\epsilon^2). \quad (2.2.66)$$

Возвращаясь к исходным переменным и используя (2.2.66), уравнение (2.2.64) в данном приближении можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - C_k^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = 0, \quad \eta = \frac{\xi_{\perp}}{R(z)}. \quad (2.2.67)$$

Это уравнение описывает как распространяющиеся, так и стоячие изгибные волны в прямой тонкой магнитной трубке с радиусом сечения и плотностью плазмы, меняющимися вдоль трубки. Оно является обобщением уравнения выведенного в работе *Dymova and Ruderman (2005)* для трубки с постоянным радиусом сечения.

#### 2.2.4. Выводы

В данной главе рассмотрены быстрые изгибные колебания магнитных трубок с круговым поперечным сечением и плотностью плазмы и радиусом сечения меняющимися вдоль трубки. Предполагалось, что ось трубки – прямая, а её концы заморожены в плотную хромосферную плазму. Также предполагалось, что трубка тонкая, т.е. отношение её радиуса к длине



порядка  $\epsilon \ll 1$ . С помощью метода асимптотических разложений выведено волновое уравнение для смещения оси трубки. Это уравнение является обобщением аналогичного уравнения для трубки с постоянным радиусом сечения, которое было получено ранее в работе *Dumova and Ruderman (2005)*.

### **2.3. Безотражательное распространение изгибных волн в корональных магнитных петлях**

Как уже отмечалось, распространяющиеся изгибные волны регулярно наблюдаются в корональных магнитных петлях. Характерной особенностью этих волн является то, что они распространяются от оснований петель к их вершине, в то время как волны распространяющиеся в обратном направлении не наблюдаются. Отсутствие волны отражённой от противоположного конца петли объясняется затуханием волн. В результате волна распространяющаяся от основания к вершине петли затухает до того как она достигнет другого основания петли. Следует отметить, что магнитные петли неоднородны. В частности, плотность плазмы изменяется вдоль петли. Длины наблюдаемых волн сравнимы с характерным масштабом неоднородности. В этих условиях, вообще говоря, можно ожидать появления волны отражённой от неоднородности. Эта волна должна была бы распространяться в направлении противоположном направлению распространения основной волны. Целью анализа в этой главе является объяснение явления отсутствия отражённой волны.

Хотя, в общем случае, при распространении волн в неоднородных волноводах происходит отражение волн, имеются исключения из этого правила. При определённых формах изменения скорости распространения волн вдоль волновода возможно безотражательное распространение волн. Безотражательное распространение волн вдоль неоднородных волноводов исследовалось в приложениях к физике плазмы (*Гинзбург, 1960*), океанологии (*Бреховских, 1973; Власенко, 1987; Vlasenko et al., 2002; Didenkulova, Pelinovsky, and Soomere, 2008; Grimshaw, Pelinovsky, and Talipova, 2010*), акустике (*Ibragimov and Rudenko, 2004*) и физике атмосферы (*Petrukhin, Pelinovsky, and Batsyna, 2011*). Недавно *Petrukhin, Pelinovsky, and Talipova (2012)* исследовали безотражательное распространение акустических волн в солнечной атмосфере, а *Cally (2012)* исследовал безотражательное рас-

пространение альфвеновских волн. В этой главе будет исследовано безотражательное распространение изгибных волн в магнитных трубках моделирующих корональные магнитные петли. Результаты представленные в настоящей главе опубликованы в работе Ruderman, Pelinovsky, Petrukhin and Talipova (2013).

### 2.3.1. Общая теория безотражательного распространения волн в неоднородных волноводах

Рассмотрим волновое уравнение с переменной скоростью распространения волн:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (2.3.1)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$u(z, t) = A(z) \Phi(\tau(z), t), \quad (2.3.2)$$

где  $A(z)$ ,  $\tau(z)$  и  $\Phi(\tau, t)$  – функции которые надо определить. Очевидно, что любая функция  $u(z, t)$  может быть записана в такой форме, так что уравнение (2.3.2) не налагает никаких ограничений на решение уравнения (2.3.1). Подставляя уравнение (2.3.2) в уравнение (2.3.1), получим

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 A \left( \frac{d\tau}{dz} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = c^2 \left( 2 \frac{dA}{dz} \frac{d\tau}{dz} + A \frac{d^2 \tau}{dz^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + c^2 \frac{d^2 A}{dz^2} \Phi. \quad (2.3.3)$$

Теперь рассмотрим это уравнение как уравнение для  $\Phi(\tau, t)$  и определим функции  $A(z)$  и  $\tau(z)$  таким образом чтобы уравнение (2.3.1) свелось к уравнению Клейна-Гордона. Прежде всего положим

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{c}, \quad \tau(z) = \int \frac{dz}{c(z)}, \quad (2.3.4)$$

где выбран положительный знак для  $d\tau/dz$ , что соответствует волне распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ . Чтобы получить уравнение Клейна-Гордона необходимо избавиться от первого члена в правой части уравнения (2.3.3). Для этого положим

$$2 \frac{dA}{dz} \frac{d\tau}{dz} + A \frac{d^2 \tau}{dz^2} = 0. \quad (2.3.5)$$

Интегрируя это уравнение получим

$$A(z) = A_0 c^{1/2}(z), \quad (2.3.6)$$

гда  $A_0$  — произвольная постоянная. Поскольку  $u(z, t)$  является произведением  $A$  и  $\Phi$ , без ограничения общности можно положить  $A_0 = 1$ . В результате уравнение (2.3.3) сводится к уравнению Клейна-Гордона с одним переменным коэффициентом:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = \frac{c^2}{A} \frac{d^2 A}{dz^2} \Phi. \quad (2.3.7)$$

Нашей целью является получение уравнения Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами. Для этого налагаем условие

$$c^2 \frac{d^2 A}{dz^2} = \beta A, \quad (2.3.8)$$

где  $\beta$  — некоторая постоянная. После этого уравнение (2.3.7) становится уравнением с постоянными коэффициентами,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = \beta \Phi. \quad (2.3.9)$$

Подставляя уравнение (2.3.6) в уравнение (2.3.8) получим уравнение для  $c(z)$ ,

$$2c \frac{d^2 c}{dz^2} - \left( \frac{dc}{dz} \right)^2 = 4\beta. \quad (2.3.10)$$

Сделаем подстановку  $q = dc/dz$  и будем рассматривать  $q$  как функцию от  $c$ . В результате получим линейное уравнение для  $q^2$ ,

$$\frac{dq^2}{dc} - \frac{q^2}{c} = \frac{4\beta}{c}. \quad (2.3.11)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q^2 = 4(Mc - \beta), \quad (2.3.12)$$

где  $M$  — произвольная постоянная. Подставляя этот результат в соотношение  $dc/dz = q$  и интегрируя полученное уравнение получим

$$\int \frac{dc}{\sqrt{Mc - \beta}} = \pm 2z. \quad (2.3.13)$$

Теперь рассмотрим два случая:

а)  $M \neq 0$ . В этом случае уравнение (2.3.13) сводится к

$$c = M(z + N)^2 + \frac{\beta}{M}, \quad (2.3.14)$$

где  $N$  — произвольная постоянная. Поскольку  $c > 0$ , при  $M < 0$  должно быть  $\beta < 0$ . При  $M > 0$ ,  $\beta$  может иметь произвольный знак, однако, при  $\beta < 0$ ,  $c(z)$  определено не для всех значений  $z$ .

б)  $M = 0$ . В этом случае  $\beta < 0$  и уравнение (2.3.13) сводится к

$$c = \pm 2\sqrt{|\beta|}(z + N). \quad (2.3.15)$$

Как видим, волновое уравнение (2.3.1) сводится к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами если  $c(z)$  линейная или квадратичная функция.

Отметим что при  $\beta = 0$  уравнение (2.3.9) является волновым уравнением с постоянными коэффициентами и имеет хорошо известное решение Даламбера. При  $\beta \neq 0$  уравнение (2.3.9) допускает решение в форме монохроматической волны,  $\Phi \propto \exp[i(k\tau - \omega t)]$ , где  $\omega^2 = k^2 - \beta$ , так что волна описываемая этим решением является диспергирующей. При  $\beta < 0$  имеется частота образования,  $\omega_c = \sqrt{-\beta}$ , так что только волны с частотой больше  $\omega_c$  могут распространяться в среде. С другой стороны, при  $\beta > 0$  в среде могут распространяться волны любой частоты.

### 2.3.2. Изгибные волны в корональных магнитных петлях

В настоящем разделе общая теория безотражательного распространения волн в неоднородных волноводах применяется к изгибным волнам в корональных магнитных петлях. Используем модель корональной петли в виде магнитной трубки с плотностью плазмы и радиусом поперечного сечения изменяющимися вдоль трубки. Как было показано в главе 2.2, распространение изгибных волн в этой модели описывается уравнением (2.2.67). Предполагаем, что петля имеет форму полукруга расположенного в вертикальной плоскости, и она погружена в изотермическую атмосферу (см. рис. 2.3.1). Также считаем, что температура плазмы внутри и вне петли одна и та же. Из этого предположения следует, что, хотя плотность плазмы изменяется вдоль петли, отношение плотностей плазмы внутри и вне петли постоянно,  $\rho_i/\rho_e = \zeta = \text{const}$ . В дальнейшем полагаем что  $\zeta > 1$ . Зависимость плотности от высоты в солнечной атмосфере даётся барометрической формулой

$$\rho_i = \rho_f \exp(-h/H), \quad (2.3.16)$$

где  $H$  — шкала высот и  $\rho_f$  — плотность плазмы внутри петли у основания петли. Высота в солнечной атмосфере связана с расстоянием  $z$  вдоль петли

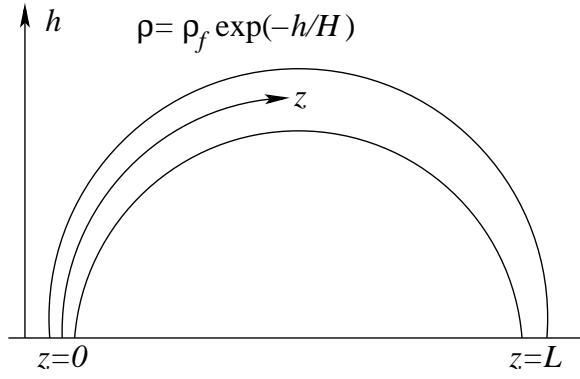


Рис. 2.3.1. Петля в форме полукруга погружённая в изотермическую атмосферу.

отсчитываемым от её левого основания формулой

$$h = \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi z}{L}. \quad (2.3.17)$$

Подставляя уравнение (2.3.17) в уравнение (2.3.16), получим

$$\rho_i = \rho_f \exp \left( -\frac{L}{\pi H} \sin \frac{\pi z}{L} \right). \quad (2.3.18)$$

Используя уравнение (2.2.24), преобразуем уравнение (2.2.22) к виду

$$B_0(z)R^2(z) = B_f R_f^2, \quad (2.3.19)$$

где  $B_f$  и  $R_f$  — магнитное поле и радиус сечения петли у основания петли. Используя это уравнение и уравнение (2.3.18), перепишем уравнение (2.2.65) в виде

$$C_k = C_f \left( \frac{R_f}{R(z)} \right)^2 \exp \left( \frac{L}{2\pi H} \sin \frac{\pi z}{L} \right), \quad C_f = B_f \sqrt{\frac{2\zeta}{\mu_0 \rho_f (\zeta + 1)}}, \quad (2.3.20)$$

где  $C_f = C_k(0)$ . В дальнейшем полагаем, что профиль скорости  $C_k(z)$  симметричен по отношению к вершине петли. Этому условию удовлетворяет профиль скорости задаваемый уравнение (2.3.14) с  $N = -L/2$ . Сравнивая уравнение (2.3.14) с  $N = -L/2$  с (2.3.20), получим выражение для  $R(z)$ ,

$$\lambda(z) \equiv \frac{R(z)}{R_f} = \sqrt{\frac{M^2 L^2 + 4\beta}{M^2 (2z - L)^2 + 4\beta}} \exp \left( \frac{L}{4\pi H} \sin \frac{\pi z}{L} \right), \quad (2.3.21)$$

где было использовано соотношение  $R(0) = R_f$  для того, чтобы выразить  $C_f$  через  $M$  и  $\beta$ . Условие  $C_k(z) > 0$  при  $z \in [0, L]$  удовлетворяется если

$$M > 0, \quad \beta > 0, \quad (2.3.22)$$

или

$$M < 0, \quad 4\beta < -M^2L^2. \quad (2.3.23)$$

В дальнейшем, в соответствии с наблюдательными данными, предполагаем что  $\lambda(z)$  монотонно возрастает при  $z \in [0, L/2]$  и монотонно убывает при  $z \in [L/2, L]$ . Это условие сводится к

$$\operatorname{sgn}(\beta) \left\{ 8H(2z - L) - \cos \frac{\pi z}{L} \left[ (2z - L)^2 + \frac{4\beta}{M^2} \right] \right\} < 0, \quad z \in [0, L/2]. \quad (2.3.24)$$

Очевидно оно удовлетворяется при  $\beta > 0$ . Если  $M$  и  $\beta$  удовлетворяют условию (2.3.23), то, как нетрудно показать, (2.3.24) эквивалентно неравенству

$$\beta < -\frac{1}{4}LM^2(L + 8H). \quad (2.3.25)$$

Если  $\beta$  удовлетворяет (2.3.25), то оно также удовлетворяет условию (2.3.23).

Степень расширения петли,  $\lambda_0 = \lambda(0)$ , задаётся выражением

$$\lambda_0 = \sqrt{1 + \frac{M^2L^2}{4\beta}} \exp\left(\frac{L}{4\pi H}\right). \quad (2.3.26)$$

Нетрудно видеть, что зависимость  $\lambda$  от безразмерного расстояния вдоль петли,  $Z = z/L$ , определяется двумя безразмерными параметрами:  $M^2L^2/\beta$  и отношением высоты петли к шкале высот,  $\kappa = L/\pi H$ . С помощью уравнения (2.3.26) получим

$$\frac{M^2L^2}{\beta} = 4\lambda_0^2 e^{-\kappa/2} - 4. \quad (2.3.27)$$

Подставляя этот результат в уравнение (2.3.21), перепишем его в безразмерных переменных:

$$\lambda(Z) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2 - e^{\kappa/2}}(2Z - 1)^2 + e^{\kappa/2}} \exp\left(\frac{\kappa}{4} \sin(\pi Z)\right). \quad (2.3.28)$$

Из уравнения (2.3.27) следует, что  $\beta > 0$  при  $\lambda_0 > e^{\kappa/4}$  и  $\beta < 0$  в противном случае. В этом случае неравенство (2.3.25) сводится к

$$\lambda_0 > \frac{e^{\kappa/4}}{\sqrt{1 + \pi\kappa/8}} \equiv \lambda_m. \quad (2.3.29)$$

Нетрудно показать что  $\lambda_m > 1$ . Таким образом, в рассматриваемой модели, степень расширения петли может принимать любое значение из интервала

$(\lambda_m, \infty)$ . Величина  $\lambda_m$  является возрастающей функцией  $\kappa$ . При возрастании  $\kappa$  от  $1/2$  до  $2$  величина  $\lambda_m$  изменяется от  $1.036$  до  $1.234$ . Таким образом, в рассматриваемой модели, корональная петля может иметь вполне реальную степень расширения не превышающую  $1.5$  даже для корональных петель с высотой превышающей шкалу высот в короне.

Выбирая монохроматическое решение уравнения (2.3.9), в соответствии с уравнениями (2.3.2) и (2.3.6), получим для смещения оси магнитной петли

$$\eta(t, z) = CR(z)C_k^{1/2}(z) \exp(i(k\tau(z) - \omega t)), \quad (2.3.30)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Таким образом, амплитуда колебаний  $a(z)$  пропорциональна  $R(z)C_k^{1/2}(z)$ . После этого, используя уравнение (2.3.20), получим

$$a(z) = a_f \exp\left(\frac{L}{4\pi H} \sin \frac{\pi z}{L}\right), \quad (2.3.31)$$

где  $a_f = a(0)$ .

Если  $\lambda_0 > e^{\kappa/4}$  то  $\beta > 0$ . В этом случае частота обрезания отсутствует, т.е. вдоль петли могут распространяться изгибные волны любой частоты. При  $\lambda_0 < e^{\kappa/4}$  имеется частота обрезания равная  $\omega_c = \sqrt{-\beta}$ . Выразим  $\omega_c$  через параметры магнитной петли. Используя уравнение (2.3.14) с  $z = 0$  и  $N = -L/2$  и уравнение (2.3.27) получим

$$M^2 = C_f^{-2} \lambda_0^4 \beta^2 e^{-\kappa}.$$

Исключая  $M$  из этого уравнения и уравнения (2.3.27) находим  $\beta$  и получаем

$$\omega_c = \frac{2C_f e^{\kappa/4}}{\lambda_0^2} \sqrt{e^{\kappa/2} - \lambda_0^2}. \quad (2.3.32)$$

Частота обрезания  $\omega_c$  принимает максимальное значение при  $\lambda_0 = \lambda_m$ . Это максимальное значение равно

$$\omega_{cM} = \frac{2C_f e^{\kappa/4}}{L\lambda_m^2} \sqrt{e^{\kappa/2} - \lambda_m^2} = \frac{C_f}{4H} \sqrt{1 + \frac{8}{\pi\kappa}}. \quad (2.3.33)$$

Когда  $\kappa$  возрастает от  $1/2$  до  $2$ , безразмерная величина  $\omega_{cM}H/C_f$  убывает от  $0.617$  до  $0.377$ . Если принять в качестве типичных корональных величин  $H = 60$  Мм и  $C_f = 1000$  км с<sup>-1</sup>, то получим для минимального периода

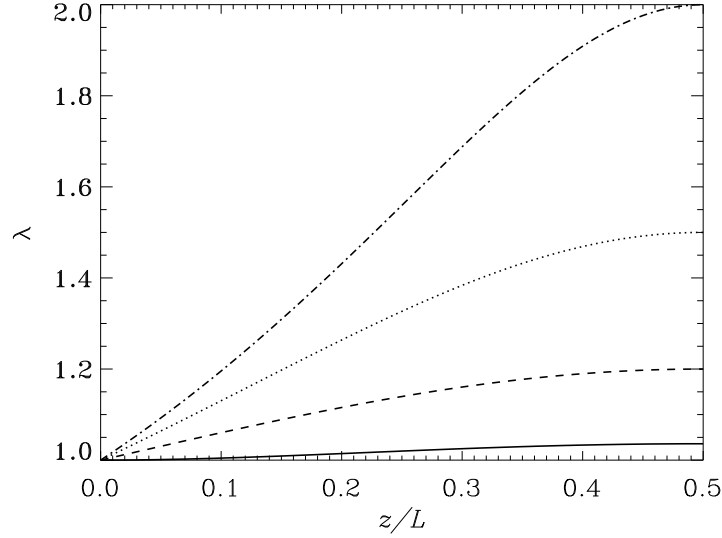


Рис. 2.3.2. Зависимость безразмерного радиуса поперечного сечения корональной петли  $\lambda$  от длины вдоль оси петли  $z$  для  $\kappa = 1/2$ . Поскольку петля симметрична относительно вершины, показана только половина петли. Сплошная, штриховая, точечная и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\lambda_0 = 1.036, 1.2, 1.5,$  и  $2$ . Значение  $\lambda_0 = 1.036$  приблизительно равно  $\lambda_m$ .

обрезания  $2\pi/\omega_{cM}$  величину между 10 и 17 минутами. Как видим, минимальный период обрезания больше периода наблюдаемых распространяющихся волн в корональных петлях хотя, крайне редко, наблюдаются волны с периодами больше 10 минут (см. напр. Aschwanden et al. 2002).

Schrijver et al. (2002) представили результаты 17 наблюдений стоячих поперечных волн в корональных петлях полученных на аппарате Transition Region and Coronal Explorer (TRACE). После этого Aschwanden et al. (2002) провели анализ геометрических параметров корональных петель, в которых наблюдались эти волны. Длины всех петель кроме одной варьировались от 72 Мм до 200 Мм. Если предположить, что петли имели форму полукруга, то получим, что высоты петель изменялись от 23 Мм до 64 Мм. Если, дополнительно, принять, что шкала высоты в короне равна 60 Мм, то получим значения  $\kappa$  между 0.4 и 1.1. В соответствии с этим для  $\kappa$  были выбраны в качестве типичных величин  $\kappa = 1/2, 1$  и  $2$ . Величина  $\kappa = 2$  соответствует петлям с длиной около 400 Мм. Такие очень длинные петли существуют в короне и, возможно, в будущем распространяющиеся изгибные волны будут наблюдаться и в них. На рисунках 2.3.2-2.3.4 показана зависимость  $\lambda$  от  $z/L$  для различных величин  $\kappa$  и  $\lambda_0$ .



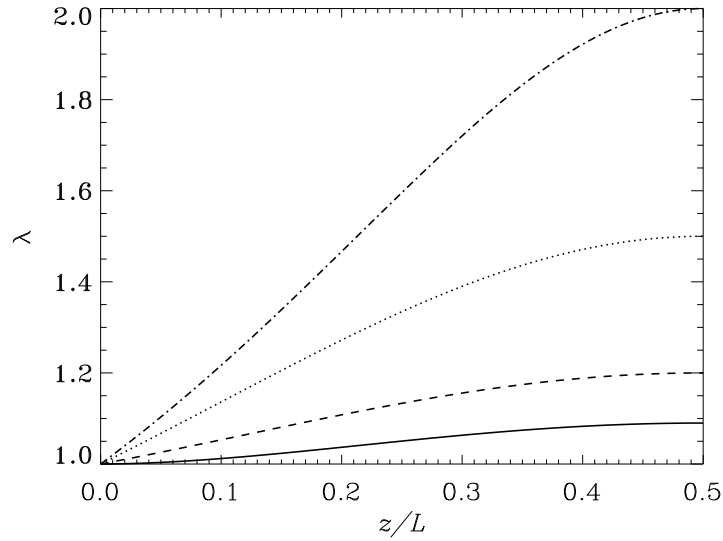


Рис. 2.3.3. Зависимость безразмерного радиуса поперечного сечения корональной петли  $\lambda$  от длины вдоль оси петли  $z$  для  $\kappa = 1$ . Поскольку петля симметрична относительно вершины, показана только половина петли. Сплошная, штриховая, точечная и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\lambda_0 = 1.09, 1.2, 1.5$ , и  $2$ . Значение  $\lambda_0 = 1.09$  приблизительно равно  $\lambda_m$ .

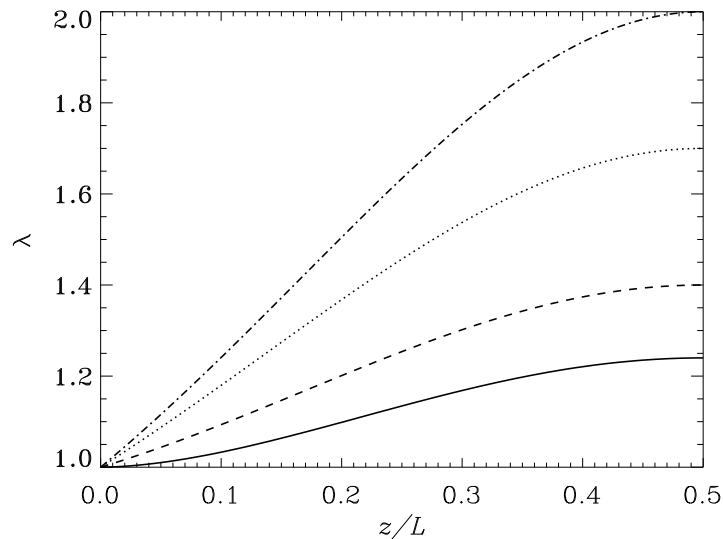


Рис. 2.3.4. Зависимость безразмерного радиуса поперечного сечения корональной петли  $\lambda$  от длины вдоль оси петли  $z$  для  $\kappa = 2$ . Поскольку петля симметрична относительно вершины, показана только половина петли. Сплошная, штриховая, точечная и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\lambda_0 = 1.24, 1.4, 1.7$ , и  $2$ . Значение  $\lambda_0 = 1.24$  приблизительно равно  $\lambda_m$ .

### 2.3.3. Выводы

В этой главе рассмотрено безотражательное распространение быстрых изгибных волн вдоль магнитных трубок в солнечной атмосфере. Рассматривались только прямые тонкие магнитные трубки в приближении холодной плазмы. Предполагалось, что плотность плазмы не меняется в радиальном направлении, однако как плотность так и радиус сечения трубки могут изменяться вдоль трубки. Для описания поперечных колебаний использовалось уравнение (2.2.67), полученное в предыдущей главе. Кратко изложена общая теория одномерного безотражательного распространения волн в неоднородных средах и показано, что волновое уравнение с переменной фазовой скоростью может быть всегда сведено к уравнению Клейна-Гордона с одним переменным коэффициентом. В том случае, когда фазовая скорость линейная или квадратичная функция пространственной переменной, все коэффициенты уравнения Клейна-Гордона постоянны. Общая теория была применена к исследованию распространения быстрых изгибных волн. Рассматривались магнитные петли имеющие форму полукруга. Предполагалось, что петли симметричны относительно вершины и что фазовая скорость изгибных волн является квадратичной функцией расстояния вдоль петли. Это предположение определяет зависимость радиуса поперечного сечения петли от расстояния вдоль петли. Модель содержит два свободных параметра: отношение высоты петли к атмосферной шкале высот  $\kappa$  и коэффициент расширения петли  $\lambda_0$ , равный отношению радиусов поперечного сечения в апексе и у основания петли. Было сделано достаточно естественное предположение, что радиус поперечного сечения возрастает с высотой. Это предположение накладывает ограничение на интервал возможных значений  $\lambda_0$ :  $\lambda_0 > \lambda_m > 1$ , где  $\lambda_m$  — монотонно возрастающая функция  $\kappa$ . Однако это ограничение не является слишком сильным. Даже при  $\kappa = 2$  имеем  $\lambda_m \approx 1.234$ .

Важным свойством построенной модели является тот факт, что, при  $\lambda_0 < e^{\kappa/4}$ , имеется частота обрезания. Монохроматические волны могут распространяться вдоль петли только когда их частота больше частоты обрезания. В то же время при  $\lambda_0 > e^{\kappa/4}$  частота обрезания отсутствует и волны с произвольной частотой могут распространяться вдоль петли. Заметим, что для типичных параметров корональных петель, частота обрезания меньше частот волн наблюдаемых в петлях.

## 2.4. Резонансное затухание линейных изгибных волн

В предыдущих главах рассматривалось распространение изгибных волн вдоль магнитной трубки с резкой границей, т.е. с границей являющейся тангенциальным разрывом. Очевидно, что реальные магнитные трубки в атмосферах Солнца и звёзд не имеют резких границ. Вместо этого имеются переходные области где плотность непрерывно изменяется от более высоких значений внутри трубки к более низким значениям вне её.

Включение в модель магнитной трубки переходной области с непрерывным изменением плотности приводит к новому явлению, называемому резонансным затуханием волн. Для того чтобы дать качественное описание данного явления, предположим, что в начальный момент в трубке создано возмущение, которое вне трубки и в области с постоянной плотностью внутри трубки совпадает с одной из собственных волновых мод. Для определённости будем считать, что это изгибная мода и использовать приближение холодной плазмы. Что касается возмущения в переходной неоднородной области, то, в длинноволновом приближении, оно может быть достаточно произвольным с единственным ограничением, что характерный размер изменения возмущений всех величин равен толщине переходной области. Если переходная область отсутствует, т.е. трубка имеет резкую границу, то возмущение будет распространяться вдоль трубки без изменения формы. Наличие неоднородной переходной области приводит к изменению формы волны. В длинноволновом приближении возмущение распространяется со скоростью

$$C_k^2 = \frac{\rho_i V_{Ai}^2 + \rho_e V_{Ae}^2}{\rho_i + \rho_e}, \quad (2.4.1)$$

где  $\rho_i$  — плотность плазмы в однородной области внутри трубки,  $\rho_e$  — плотность плазмы вне трубки, причём  $\rho_i > \rho_e$ . Альвеновская скорость внутри и вне трубки определяется формулой  $V_{Ai,e} = B_0(\mu_0 \rho_{i,e})^{-1/2}$ , где  $B_0$  — величина магнитного поля. Для простоты полагаем, что плотность в переходной области меняется монотонно. Тогда в цилиндрических координатах с осью  $z$ , совпадающей с осью трубки, альвеновская скорость  $V_A$  является монотонно возрастающей функцией радиальной координаты  $r$ . Легко видеть что  $V_{Ai} < C_k < V_{Ae}$ . Поэтому существует такая поверхность  $r = r_A$ , где  $V_A(r_A) = C_k$ . Эта поверхность называется резонансной поскольку на ней глобальная волновая мода находится в резонансе с локальными альвеновскими колебаниями. Эволюция начального возмущения происхо-

дит следующим образом. Амплитуда волны вне трубки и в области с постоянной плотностью внутри трубки постепенно уменьшается. Она также уменьшается и в переходной области вдали от резонансной поверхности. Одновременно амплитуда волны вблизи резонансной поверхности растёт и уменьшается пространственный масштаб изменения возмущённых величин в радиальном направлении, т.е. появляются большие градиенты. На больших временах возмущения вдали от резонансной поверхности полностью затухают и вся энергия первоначального возмущения концентрируется в окрестности резонансной поверхности. Таким образом, первоначальное возмущение совпадающее с изгибной волной вне переходной области затухает. Это явление называется резонансным поглощением.

На достаточно больших временах движение в окрестности резонансной поверхности характеризуется большой амплитудой колебаний скорости и магнитного поля в направлении поперёк невозмущённого магнитного поля и очень малыми амплитудами колебаний радиальной скорости, возмущения плотности и магнитного давления. Поэтому движение плазмы в окрестности резонансной поверхности является квазиальвеновским колебанием. Это движение не является в точности альвеновским колебанием поскольку возмущение плотности хотя и мало, но всё-таки отлично от нуля. Возмущение плотности в точности равно нулю только на резонансной поверхности.

В рамках идеальной магнитной гидродинамики характерный масштаб изменения возмущений в окрестности резонансной поверхности с течением времени стремится к нулю, а градиенты, соответственно, к бесконечности. Однако в реальной плазме всегда присутствует хотя бы небольшая диссипация в виде вязкости, конечной проводимости и теплопроводности. Диссипация останавливает процесс уменьшения характерного масштаба в радиальном направлении и формирования больших градиентов. Ситуация здесь аналогична укрупнению начального возмущения в нелинейной газодинамике, где диссипация также останавливает укрупнение волны.

В случае слабо диссипативной плазмы характерный масштаб изменения возмущений в окрестности резонансной поверхности может быть очень малым, а радиальные градиенты, соответственно, очень большими. Что касается амплитуды колебаний, то здесь надо различать два случая. В первом случае предполагается, что колебания в системе являются вынужденными. В этом случае амплитуда колебаний растёт до тех пор, пока диссипация в

окрестности резонансной поверхности не уравнивает внешний поток энергии. Эта амплитуда тем больше, чем меньше диссипация. Она может достигать очень больших значений, что делает необходимым учёт нелинейности при описании колебаний в окрестности резонансной поверхности. Во втором случае колебания магнитной трубки вызываются начальным возмущением. В этом случае амплитуда колебаний в окрестности резонансной поверхности определяется энергией начального возмущения и, при малой диссипации, не зависит от величины диссипации.

Наличие больших градиентов в окрестности резонансной поверхности позволяет эффективно диссипировать волновую энергию даже в слабо диссипативной плазме. В слабо диссипативной плазме эффективность диссипации не зависит от величины диссипативных коэффициентов. Это свойство также роднит резонансные волны с ударными волнами. Возможность эффективно диссипировать волновую энергию в слабо диссипативной плазме привлекла к резонансным МГД волнам внимание исследователей занимавшихся управляемой термоядерной реакцией (см. напр. Grossmann and Tataronis 1973; Tataronis and Grossmann 1973). Было предложено использовать диссипацию резонансных волн для дополнительного нагрева термоядерной плазмы. Позже эта идея была отвергнута ввиду технических трудностей.

По-видимому, первым кто рассматривал резонансные МГД волны в приложении к солнечной физике был Ionson (1978). В его работе, а также в нескольких последующих работах других авторов, резонансные МГД волны рассматривались в связи с теорией волнового нагрева солнечной короны. Hollweg and Yang (1988) предложили резонансное поглощение в качестве механизма затухания (в то время гипотетических) изгибных колебаний корональных магнитных петель и вычислили декремент затухания. При этом они использовали метод ранее развитый для исследования резонансного затухания других видов колебаний, например, электростатических волн в плазме (см. напр. Sedláček 1971) или затухания Ландау (см. напр. Арцимович и Сагдеев 1979; Чен 1987). В соответствии с этим методом Hollweg and Yang использовали идеальную МГД для описания резонансного затухания. Затухание связано с сингулярностью преобразования Лапласа решения начальной задачи на римановой поверхности этого преобразования. Эта сингулярность расположена на неосновном листе римановой поверхности. Математически этот метод вполне корректен. Однако появле-

ние затухания выглядит как математический трюк поскольку физические процессы в окрестности резонансной поверхности, которые приводят к затуханию, не рассматриваются.

Mok and Einaudi (1985) и Goossens et al. (1992) применили другой подход. Они использовали диссипативную МГД для исследования резонансного затухания МГД волн. При этом предполагалось, что в начальный момент возбуждается нормальная мода диссипативной МГД. Механизм резонансного затухания работает только в слабо диссипативной плазме (точный смысл слов “слабо диссипативная плазма” будет дан ниже). В такой плазме диссипация важна только в тонком диссипативном слое охватывающем резонансную поверхность. В результате для исследования затухания волны можно использовать метод сращиваемых асимптотических разложений. В этом методе движение плазмы описывается диссипативными МГД уравнениями в диссипативном слое и идеальными МГД уравнениями вне этого слоя. Решение найденное в работах Mok and Einaudi (1985) и Goossens et al. (1992) справедливо, когда диссипация мала, но не слишком мала. Точная формулировка этого условия также будет дана ниже. Ruderman et al. (1995) модифицировали анализ таким образом что он стал справедлив при сколь угодно малой диссипации. При этом рассматривались волны на поверхности плоского переходного слоя. Tirry and Goossens (1996) обобщили этот анализ на случай волн в магнитных трубках. Достаточно полный обзор теории резонансного затухания МГД волн дан в работе Goossens et al. (2011). В следующей главе будет представлен анализ резонансного затухания распространяющихся изгибных волн в магнитных трубках.

#### 2.4.1. Постановка задачи

Рассматривается невозмущённое состояние почти аналогичное тому что показано на Рис. 1.3.1 в рассматривалось и Разделе 1.3. Однако вместо резкой границы между внутренней и внешней областями имеется переходный слой, определяемый неравенством  $R - \ell/2 < r < R + \ell/2$  в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью магнитной трубки. В этом слое плотность убывает от  $\rho_i$  внутри магнитной трубки до  $\rho_e$  вне магнитной трубки. Таким образом, в переходном слое  $\rho_0 = \rho_t(r)$ , где  $\rho_t(r)$  — монотонно убывающая функция,  $\rho_t(R - \ell/2) = \rho_i$  и  $\rho_t(R + \ell/2) = \rho_e$ .

Кроме того, для упрощения вычислений используется приближение холодной плазмы. Это, в частности, означает что  $B_e = B_i$ . Плазма считается идеально проводящей, так что единственный диссипативный механизм присутствующий в модели это вязкость. Дополнительный учёт конечной проводимости не влияет на скорость резонансного затухания волн.

Возмущения описываются уравнениями (1.2.9)-(1.2.13) с  $p_0 = p' = 0$ . Поскольку рассматриваются изгибные волны, то возмущения всех величин полагаются пропорциональными  $e^{i\varphi}$ . После этого уравнения (1.2.10) и (1.2.12) записываются в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial b_r}{\partial z} + \rho_0 \nu_v \frac{\partial^3 \xi_r}{\partial t \partial r^2}, \quad (2.4.2)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} = -\frac{iP}{r} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} + \rho_0 \nu_v \frac{\partial^3 \xi_\varphi}{\partial t \partial r^2}, \quad (2.4.3)$$

$$b_r = B_0 \frac{\partial \xi_r}{\partial z}, \quad b_\varphi = B_0 \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z}, \quad (2.4.4)$$

$$\mu_0 P = -\frac{B_0^2}{r} \left( \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + i\xi_\varphi \right). \quad (2.4.5)$$

Напомним что  $P = B_0 b_z / \mu_0$ . Из уравнения (1.2.10) следует, что  $\xi_z = 0$ . Считается, что волна возбуждается монохроматическим драйвером у основания полубесконечной магнитной трубки и затем распространяется вдоль трубки. При этом её амплитуда постепенно убывает с расстоянием за счёт резонансного затухания. В соответствии с этим полагаем, что возмущения всех величин пропорциональны  $\exp[i(kz - \omega t)]$ , где  $\omega$  — действительная величина, а  $k$  — комплексная. Исключая  $b_r$  и  $b_\varphi$  сводим (2.4.2)-(2.4.5) к системе уравнений для  $\xi_r$ ,  $\xi_\varphi$  и  $P$ :

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) \xi_r = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r} + i\nu_v \omega \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2}, \quad (2.4.6)$$

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) \xi_\varphi = \frac{iP}{r\rho_0} + i\nu_v \omega \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial r^2}, \quad (2.4.7)$$

$$\mu_0 P = -\frac{\rho_0 V_A^2}{r} \left( \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + i\xi_\varphi \right), \quad (2.4.8)$$

Эти уравнения используются в дальнейшем для исследования резонансного затухания распространяющихся изгибных волн.

### 2.4.2. Вычисление декремента

В дальнейшем предполагаем, что длина волны много больше радиуса магнитной трубки, так что отношение этих двух величин порядка  $\epsilon \ll 1$ . После этого вводим “растягивающие” пространственную  $z_1 = \epsilon z$  и временную  $t_1 = \epsilon t$  переменные. Введём масштабированные волновое число и частоту,  $K = \epsilon^{-1}k$  и  $\Omega = \epsilon^{-1}\omega$ . После этого уравнения (2.4.6) и (2.4.7) переписываются в виде

$$\epsilon^2 (\Omega^2 - V_A^2 K^2) \xi_r = \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dr} + \frac{i\epsilon R \Omega C_k}{Re} \frac{d^2 \xi_r}{dr^2}, \quad (2.4.9)$$

$$\epsilon^2 (\Omega^2 - V_A^2 K^2) \xi_\varphi = \frac{iP}{r\rho_0} + \frac{i\epsilon R \Omega C_k}{Re} \frac{d^2 \xi_\varphi}{dr^2}, \quad (2.4.10)$$

где  $Re = RC_k/\nu_v$  — число Рейнольдса. Кроме того, считаем что переходный слой тонкий,  $\ell/R \ll 1$ . В дальнейшем будет показано, что отношение мнимой части  $K$  к действительной порядка  $\ell/R$ . Наконец предполагаем, что диссипация слабая,  $Re \gtrsim \epsilon^{-1}$ . Ниже на число Рейнольдса  $Re$  будет наложено более сильное ограничение.

Из уравнений (2.4.9) и (2.4.10) следует, что  $P = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Далее все вычисления проводим в главном порядке по  $\epsilon$ . В этом приближении из уравнения (2.4.8) следует, что

$$\frac{d(r\xi_r)}{dr} + i\xi_\varphi = 0. \quad (2.4.11)$$

#### 2.4.3а. Решение в диссипативном слое

Поскольку диссипация очень слабая, её необходимо учитывать только в тонком диссипативном слое, охватывающем резонансную поверхность  $r = r_A$ . Напомним, что  $V_A(r_A) = C_k$ . Толщина диссипативного слоя много меньше  $\ell$ . Это означает, что характерный масштаб изменения возмущений всех величин в диссипативном слое много меньше  $\ell$ . В соответствии с этим в диссипативном слое уравнение (2.4.11) можно переписать в приближённом виде

$$\frac{d\xi_r}{dr} + \frac{i\xi_\varphi}{r_A} = 0. \quad (2.4.12)$$

Кроме того при дифференцировании уравнения (2.4.9) по  $r$  можно прене-



бречь производными от невозмущённых величин. В результате получим

$$\epsilon^2 (\Omega^2 - V_A^2 K^2) \frac{d\xi_r}{dr} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{i\epsilon R \Omega C_k}{Re} \frac{d^3 \xi_r}{dr^3}. \quad (2.4.13)$$

Складывая это уравнение с уравнением (2.4.10) умноженным на  $i/r_A$  и учитывая уравнение (2.4.12) находим

$$\frac{d^2 P}{dr^2} - \frac{P}{r_A^2} = 0. \quad (2.4.14)$$

Решение (2.4.14) записывается в виде  $P = c_1 e^{r/r_A} + c_2 e^{-r/r_A}$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные. Из решения следует, что изменение  $P$  пропорционально малой величине — отношению толщины диссипативного слоя к  $r_A$ , поэтому в этом слое можно считать магнитное давление постоянной величиной.

В диссипативном слое можно использовать приближение

$$V_A^2(r) = C_k^2 + \Delta(r - r_A). \quad (2.4.15)$$

Поскольку  $\rho_t(r)$  — монотонно убывающая функция,  $V_A(r)$  — монотонно возрастающая функция и  $\Delta > 0$ . Запишем волновое число в виде  $K = K_r + iK_i$ . При отсутствии переходного слоя ( $\ell = 0$ )  $K_r = C_k/\Omega$ . При  $0 < \ell \ll R$  имеем  $K_r \approx C_k/\Omega$ . Учитывая что  $|K_i| \ll K_r$  с помощью уравнения (2.4.15), получим

$$\Omega^2 - V_A^2 K^2 \approx -\frac{\Delta \Omega^2}{C_k^2} (r - r_A) - 2iC_k \Omega K_i. \quad (2.4.16)$$

Подставляя этот результат в уравнение (2.4.10) и вводя безразмерные переменные

$$s = \frac{r - r_A}{\delta_A}, \quad \Lambda = \frac{2C_k^3 k_i}{\omega \delta_A \Delta}, \quad (2.4.17)$$

где

$$\delta_A = C_k \left( \frac{R}{\omega \Delta Re} \right)^{1/3}, \quad (2.4.18)$$

находим

$$\frac{d^2 \xi_\varphi}{ds^2} - (is - \Lambda) \xi_\varphi = -\frac{C_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 \delta_A R \Delta}, \quad (2.4.19)$$

где  $\rho_A = \rho(r_A)$  и  $P = P(r_A)$ . Введём преобразование Фурье по  $s$ :

$$\tilde{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\sigma s} ds, \quad f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\sigma) e^{i\sigma s} d\sigma. \quad (2.4.20)$$

Применяя это преобразование к уравнению (2.4.19), получим

$$\frac{d\tilde{\xi}_\varphi}{d\sigma} + (\Lambda - \sigma^2) \tilde{\xi}_\varphi = -\frac{2\pi C_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 \delta_A R \Delta} \delta(\sigma), \quad (2.4.21)$$

где  $\delta(\sigma)$  – дельта-функция. Решение этого уравнения, убывающее при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , записывается в виде

$$\tilde{\xi}_\varphi = \frac{2\pi C_k^2 P_A}{\omega^2 \delta_A \rho_A R \Delta} \begin{cases} e^{\sigma^3/3 - \Lambda\sigma}, & \sigma < 0, \\ 0, & \sigma > 0. \end{cases} \quad (2.4.22)$$

Применяя обратное преобразование Фурье находим

$$\xi_\varphi(s) = -\frac{C_k^2 P_A F_\Lambda(s)}{\omega^2 \delta_A \rho_A R \Delta}, \quad F_\Lambda(s) = \int_0^\infty \exp(\Lambda\sigma - i\sigma s - \frac{1}{3}\sigma^3) d\sigma. \quad (2.4.23)$$

Теперь из уравнения (2.4.11) следует, что

$$\xi_r(s) = \frac{C_k^2 P_A G_\Lambda(s)}{\omega^2 \rho_A R^2 \Delta}, \quad G_\Lambda(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-i\sigma s} - 1}{\sigma} \exp(\Lambda\sigma - \frac{1}{3}\sigma^3) d\sigma, \quad (2.4.24)$$

где было использовано приближение  $r \approx R$  и опущена постоянная интегрирования. Функции  $G_\Lambda(s)$  с  $\Lambda = 0$  и  $F_\Lambda(s)$  с  $\Lambda = 0$  были впервые введены, соответственно, в диссертации Boris (1968) и в работе Goossens et al. (1995) для описания волнового движения в диссипативном слое при вынужденных колебаниях. Эти функции также приближённо описывают волновые движения в диссипативном слое в случае затухающих колебаний при малом  $\Lambda$ . Формально условие, что  $\Lambda$  мало записывается в виде  $\Lambda \ll 1$ , однако в действительности данное приближение хорошо работает при  $\Lambda \lesssim 1$ . Движение в диссипативном слое в случае быстро затухающих колебаний с  $\Lambda > 1$  в плоской геометрии было впервые исследовано в работе Ruderman et al. (1995) и обобщено на случай цилиндрической геометрии в работе Tirry (1996). Однако формально функции  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  с  $\Lambda \neq 0$  были впервые введены в обзорной статье Goossens et al. (2011). Поведение функций  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  с большим значением  $\Lambda$  качественно отличается от поведения при малых значениях  $\Lambda$ . На рисунках 2.4.1 и 2.4.2 показано поведение действительных и мнимых частей  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  при  $\Lambda = 0$  и  $\Lambda = 5$  соответственно. Отметим, что поведение функций  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  при  $\Lambda < 1$  качественно совпадает с их поведением при  $\Lambda = 0$ .

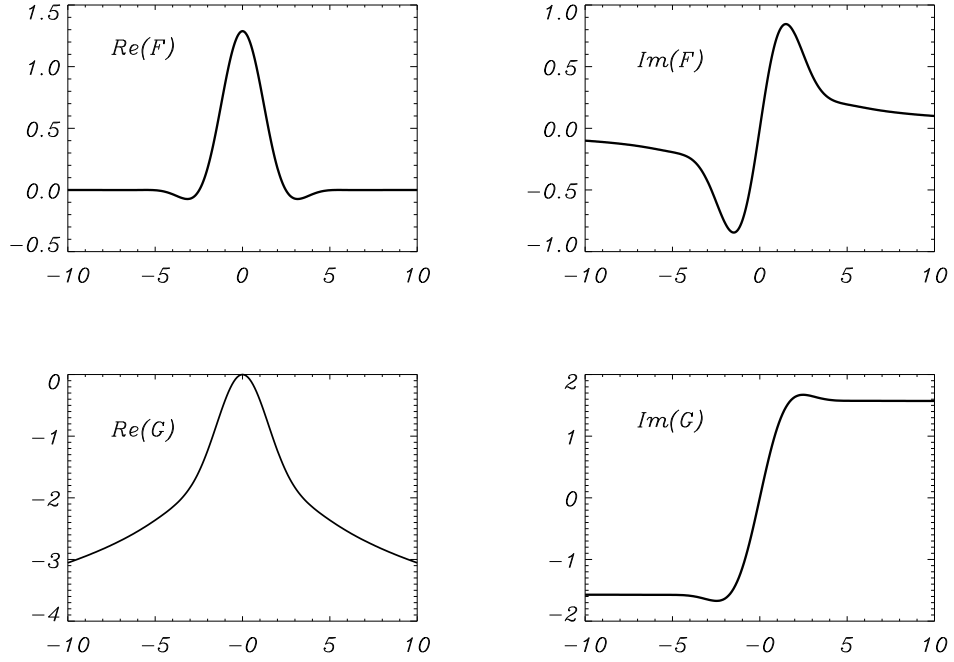


Рис. 2.4.1. Действительные и мнимые части функций  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  при  $\Lambda = 0$ .

В дальнейшем потребуется выражение для скачка  $\xi_r$  поперёк диссипативного слоя

$$\begin{aligned}
 [[\xi_r]] &= \lim_{s \rightarrow \infty} [\xi_r(s) - \xi_r(-s)] \\
 &= -\frac{2iC_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 R^2 \Delta} \int_0^\infty \frac{\sin(\sigma s)}{\sigma} \exp(\Lambda \sigma - \frac{1}{3}\sigma^3) d\sigma \\
 &= -\frac{2iC_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 R^2 \Delta} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma}{\sigma} \exp(\Lambda \sigma s^{-1} - \frac{1}{3}\sigma^3 s^{-1}) d\sigma \\
 &= -\frac{2iC_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 R^2 \Delta} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma}{\sigma} d\sigma = -\frac{\pi i C_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 R^2 \Delta}. \quad (2.4.25)
 \end{aligned}$$

Учитывая, что вариацией магнитного давления поперёк диссипативного слоя можно пренебречь, получим

$$[[\xi_r]] = -\frac{\pi i C_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 R^2 \Delta}, \quad [[P]] = 0. \quad (2.4.26)$$

В работе Sakurai et al. (1991) эти формулы получили название “формулы связи.”

### 2.4.3b. Решение в переходной области

В этом разделе вычисляется вариация радиального смещения  $\xi_r$  поперёк переходного слоя. Вне диссипативного слоя в уравнениях (2.4.9) и

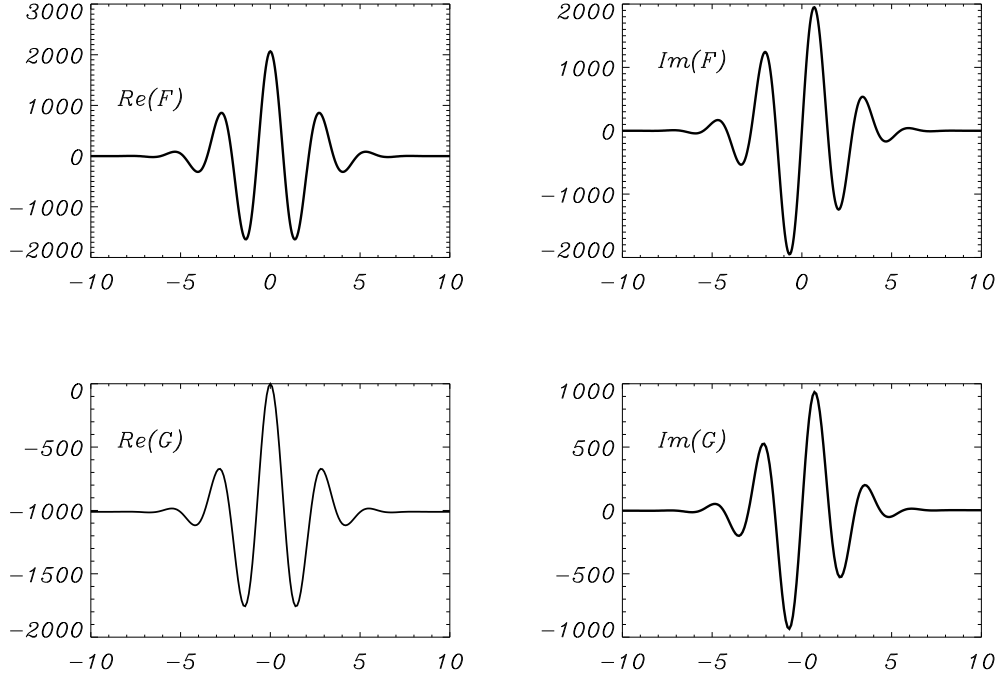


Рис. 2.4.2. Действительные и мнимые части функций  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  при  $\Lambda = 5$ .

(2.4.10) можно пренебречь диссипативными членами. После этого из уравнения (2.4.10) следует

$$\xi_\varphi = \frac{iP_A}{r\rho_0(\omega^2 - V_A^2 k_r^2)}, \quad (2.4.27)$$

где  $k_r = \epsilon K_r$  (здесь было учтено что  $|K_i| \ll |K_r|$ ). Вне диссипативного слоя величины  $\xi_r$  и  $\xi_\varphi$  одного порядка. С учётом этого из уравнений (2.4.9) (с отброшенным последним членом в правой части) и (2.4.27) следует, что изменение возмущения магнитного давления в переходном слое порядка  $P(l/R)$ . Это означает, что пренебрежение зависимостью  $P$  от  $r$  в переходном слое приводит к относительной погрешности порядка  $l/R$ . Отсюда из уравнения (2.4.11) получим приближённое выражение

$$\xi_r = \begin{cases} \xi_r(R - \ell/2) + \frac{P_A}{R^2} \int_{R-\ell/2}^r \frac{dr'}{\rho_0(r') [\omega^2 - V_A^2(r') k_r^2]}, & r < r_A, \\ \xi_r(R + \ell/2) - \frac{P_A}{R^2} \int_r^{R+\ell/2} \frac{dr'}{\rho_0(r') [\omega^2 - V_A^2(r') k_r^2]}, & r > r_A. \end{cases} \quad (2.4.28)$$

Из этого уравнения следует, что изменение  $\xi_r$  поперёк диссипативного слоя равно

$$[\xi_r] = \delta\xi_r - \frac{P_A}{R^2} \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{dr'}{\rho_0(r') [\omega^2 - V_A^2(r') k_r^2]}, \quad (2.4.29)$$

где  $\mathcal{P}$  обозначает главную часть интеграла по Коши, а  $\delta\xi_r$  — изменение  $\xi_r$  поперёк переходного слоя, определяемое выражением

$$\delta\xi_r = \xi_r(R + \ell/2) - \xi_r(R - \ell/2). \quad (2.4.30)$$

Сравнивая уравнения (2.4.26) и уравнения (2.4.29), получим

$$\delta\xi_r = -\frac{\pi i C_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 R^2 \Delta} + \frac{P_A}{R^2} \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{dr'}{\rho_0(r') [\omega^2 - V_A^2(r') k_r^2]}. \quad (2.4.31)$$

В дальнейшем увидим, что при  $r = R - \ell/2$  справедлива оценка  $\xi_r \sim \xi_\varphi$ . Тогда из уравнения (2.4.11) следует, что в части переходного слоя вне диссипативного слоя, определяемой неравенством  $R - \ell/2 < r < r_A$ , относительное изменение  $\xi_r$  порядка  $\ell/R$ . Поскольку решение линейной задачи определяется с точностью до умножения на произвольную комплексную константу, можно без ограничения общности считать что  $P$  — действительная величина при  $r = R - \ell/2$ . Тогда, в соответствии с уравнением (2.4.11),  $\xi_\varphi$  является чисто мнимой величиной при  $r = R - \ell/2$ . Ниже из решения в области  $r \leq R - \ell/2$  увидим, что  $\xi_r$  является действительной величиной при  $r = R - \ell/2$ . Тогда, в области  $R - \ell/2 < r < r_A$ , отношение действительной части  $\xi_\varphi$  к мнимой части порядка  $\ell/R$ . Из уравнения (2.4.11) следует, что, в области  $R - \ell/2 < r < r_A$ , отношение мнимой части  $\xi_r$  к действительной порядка  $l/R$ . Из уравнения (2.4.10) следует, что при  $r = R - \ell/2$ , величина  $\xi_\varphi$  порядка  $P/\epsilon^2 \rho_i V_{Ai}^2$ , и аналогичная оценка верна для  $\xi_r$ . Из уравнения (2.4.26) получим оценку для скачка  $\xi_r$  поперёк диссипативного слоя  $[\xi_r] \sim \ell P/\epsilon^2 \rho_i R V_{Ai}^2$ . Теперь нетрудно видеть что отношение мнимой части  $\xi_r$  к действительной части в области  $r_A < r < R + \ell/2$  также порядка  $\ell/R$ . После этого из уравнения (2.4.9) следует что отношение мнимой части вариации магнитного давления к действительной части порядка  $l/R$ . Это означает, что, в первом приближении по малому параметру  $l/R$ , вариация магнитного давления в неоднородном слое является действительной.

### 2.4.3с. Решение в однородных областях

Получим решения в областях с постоянной плотностью. Движение в однородных областях описывается уравнениями (2.4.9) и (2.4.10) без членов пропорциональными вторым производным в правой части и уравнением (2.4.11). Умножая уравнение (2.4.9) на  $r$ , дифференцируя результат по

$r$  и складывая полученное выражение с уравнением (2.4.10), умноженным на  $i$ , получим

$$r \frac{d}{dr} r \frac{dP}{dr} - P = 0. \quad (2.4.32)$$

Решение, регулярное при  $r = 0$ , имеет вид

$$P = \frac{rP_-}{R}, \quad (2.4.33)$$

где  $P_-$  — константа. В соответствии с предположением, сделанным в предыдущем разделе, что  $P$  при  $r = R - \ell/2$  действительная величина, получаем из (2.4.33) что  $P_-$  также действительная константа. Решение стремящееся к нулю при  $r \rightarrow \infty$  имеет вид

$$P = \frac{RP_+}{r}. \quad (2.4.34)$$

После этого из уравнения (2.4.9) с опущенным диссипативным членом в правой части получим

$$\xi_r = \begin{cases} \frac{P_-}{\rho_i R (\omega^2 - V_{Ai}^2 k^2)}, & r \leq R - \ell/2, \\ \frac{-RP_+}{\rho_e r^2 (\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2)}, & r \geq R + \ell/2. \end{cases} \quad (2.4.35)$$

Заметим, что из этого уравнения и уравнения (2.4.11) следует что  $|\xi_\varphi| \approx |\xi_r|$  при  $r = R - \ell/2$ .

#### 2.4.3d. Сращивание решений

Используя соотношения (2.4.32) и уравнение (2.4.28), получаем

$$\begin{aligned} \frac{P_+}{\rho_e (\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2)} + \frac{P_-}{\rho_i (\omega^2 - V_{Ai}^2 k^2)} &= \frac{\pi i C_k^2 P_A}{\rho_A \omega^2 R \Delta} \\ &- \frac{P_A}{R} \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{dr'}{\rho_0(r') [\omega^2 - V_A^2(r') k_r^2]}, \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

Учитывая, что

$$\delta P = P_+ - P_- = O(\ell/R), \quad (2.4.37)$$

замечаем, что отношение правой части уравнения (2.4.36) к его левой части порядка  $\ell/R$ . В дальнейшем представим  $k$  в виде

$$k = k_0 + (\ell/R)k_1. \quad (2.4.38)$$

В главном приближении по малому параметру  $\ell/R$  из уравнений (2.4.36) и (2.4.37) следует, что  $k_0^2 = \omega^2/C_k^2$ . В дальнейшем рассматриваем волны распространяющиеся в положительном направлении оси  $z$ , поэтому  $k_0 = \omega/C_k$ . В следующем приближении по  $\ell/R$  получим

$$k_1 = \frac{\pi i \omega \rho_A C_k (\rho_i - \rho_e)^2}{2\ell \Delta (\rho_i + \rho_e)^3} + \frac{\omega R C_k (\rho_i - \rho_e) \delta P}{8\ell \rho V_A^2 P_A} - \frac{\omega C_k^3 (\rho_i - \rho_e)^2}{16\ell \rho V_A^2} \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{dr'}{\rho_0(r') [C_k^2 - V_A^2(r')]}. \quad (2.4.39)$$

Поскольку в предыдущем разделе было показано, что  $\delta P$  — действительная величина в главном порядке по малому параметру  $\ell/R$ , в этом приближении мнимая часть  $k_1$  даётся первым членом в правой части уравнения (2.4.39). Таким образом, в первом приближении по  $\ell/R$  декремент равен

$$\gamma_{\text{prop}} = (\ell/R) \Im(k_1) = \frac{\pi \omega \rho_A C_k (\rho_i - \rho_e)^2}{2R \Delta (\rho_i + \rho_e)^3}, \quad (2.4.40)$$

где  $\Im$  обозначает мнимую часть величины.

### 2.4.3. Обсуждение результатов

Длина затухания, равная расстоянию, на котором амплитуда волны убывает в  $e$  раз, равна  $1/\gamma_{\text{prop}}$ . Для типичных условий в короне  $\rho_i$  существенно больше чем  $\rho_e$ . Это позволяет использовать оценки  $\rho_i - \rho_e \sim \rho_i + \rho_e$  и  $\rho_A \sim (\rho_i - \rho_e)/2$ . После этого, используя оценку  $\Delta \sim C_k^2/\ell$ , получим

$$\gamma_{\text{prop}} \sim \frac{\omega}{C_k} \frac{\ell}{R}. \quad (2.4.41)$$

Таким образом, отношение длины затухания  $1/\gamma_{\text{prop}}$  к длине волны  $2\pi C_k/\omega$  порядка  $R/\ell$ . Отметим, что длина затухания не зависит от величины диссипации характеризуемой числом Рейнолдса  $Re$ . Это означает, что возможно эффективное затухание волн даже в плазме с очень малой диссипацией.

Как было показано ранее, решение описывающее волновое движение в диссипативном слое имеет качественно разный вид при  $\Lambda < 1$  и  $\Lambda > 1$ . Нетрудно получить оценку  $\Lambda \sim (\epsilon Re)^{1/3} (\ell/R)^{5/3}$ . Таким образом, переход от монотонному к осцилляторному поведению в диссипативном слое при возрастании  $Re$  происходит когда  $Re$  переходит через критическое значение  $Re_c$  определяемое выражением

$$Re_c = \epsilon^{-1} (R/\ell)^5, \quad (2.4.42)$$

где  $\epsilon = R\omega/C_k$ . При  $Re < Re_c$  волновое движение в диссипативном слое качественно совпадает с движением имеющим место в случае вынужденных колебаний, а поведение функций  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  качественно совпадает с поведением показанным на Рис. 2.4.1. При этом, как видно на Рис. 2.4.1, характерный масштаб изменения функций  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  равен единице, что соответствует  $\delta_A$  в размерных переменных. Отметим, что концепция диссипативного слоя имеет смысл только когда его толщина много меньше толщины переходного слоя, т.е. при  $\delta_A \ll \ell$ . Это условие эквивалентно

$$Re \gg \epsilon^{-1}(R/\ell)^2. \quad (2.4.43)$$

Это то самое более сильное ограничение на число Рейнольдса, которое упоминалось после уравнения (2.4.10). Теперь можно уточнить смысл условия, при котором плазма является слабо диссипативной. Оно сводится к выполнению неравенства (2.4.43).

Как уже упоминалось, при переходе  $Re$  через  $Re_c$  поведение функций  $F_\Lambda(s)$  и  $G_\Lambda(s)$  описывающих движение в диссипативном слое начинает качественно меняться и, при  $Re$  в несколько раз превышающем  $Re_c$ , качественно совпадает с поведением, показанным на Рис. 2.4.2. На Рис. 2.4.2 видно, что диссипативный слой определяется неравенством  $|s| \lesssim 5 = \Lambda$ . Численно показано, что аналогичная оценка верна при  $\Lambda \gtrsim 3$ . Таким образом, при  $Re > Re_c$  ширина диссипативного слоя порядка  $\Lambda$  в безразмерных переменных, что в размерных переменных соответствует

$$\delta_A \Lambda \sim \frac{\ell^2}{R}. \quad (2.4.44)$$

При этом характерный масштаб изменения возмущений в радиальном направлении не превышает  $\delta_A$  и, при больших значениях  $Re$ , может быть заметно меньше толщины диссипативного слоя.

Для типичных условий в солнечной короне  $Re \gg Re_c$ , так что характерный масштаб изменения возмущений в радиальном направлении много меньше толщины диссипативного слоя. Декремент найденный в данном разделе вычислен в предположении что волна является собственной модой диссипативной МГД. В возмущении создаваемом внешним драйвером у основания полубесконечной магниной трубки характерный масштаб изменения возмущений в радиальном направлении порядка  $\ell$ . Таким образом, вблизи драйвера возмущение определённо не описывается собственной модой. По мере распространения возмущения вдоль трубки градиенты в радиальном направлении возрастают вследствие фазового смешения. Однако,



для типичных условий в солнечной короне, градиенты достигают величин соответствующих собственной моде на расстояниях по крайней мере на два порядка величины превышающих длину волны. С другой стороны, наблюдения распротрвняющихся волн, например, в корональных магнитных петлях, показывают, что они затухают на расстоянии нескольких длин волн. В работе Hood et al. (2013) задача о распространении затухающих волн решена без предположения, что волна является собственной модой. В результате показано, что на расстоянии порядка длины волны затухание происходит медленнее, чем затухание собственной моды. Однако затем амплитуда достаточно хорошо описывается формулой  $A = A_0 \exp(-\gamma_{\text{prop}} z)$ . Таким образом, хотя длина затухания, вычисленная на основе предположения, что волна является собственной модой несколько меньше реальной длины затухания, она даёт для неё достаточно хорошее приближение. Работа Hood et al. (2013) здесь не излагается поскольку и метод решения задачи и результаты аналогичны методу и результатам работы Ruderman and Terradas (2013), посвящённой резонансному затуханию стоячих волн в магнитных трубках.

В соответствии с уравнением (2.4.40) длина затухания волны обратно пропорциональна её частоте. Основываясь на этом свойстве резонансного затухания, Terradas et al. (2010a) предложили рассматривать его как естественный фильтр удаляющий высокочастотную часть спектра из широкополосного возмущения в виде изгибающей волны.

Soler et al. (2011a) исследовали резонансное затухание распространяющихся изгибных волн в магнитной трубке с плотностью, меняющейся вдоль трубки. При этом использовалось ВКБ приближение, т.е. предполагалось что длина волны много меньше характерной длины неоднородности. В этой работе, в частности, было показано что, в том случае, когда плотность убывает в направлении распространения волны, резонансное затухание и изменение плотности вдоль трубки имеют противоположный эффект: затухание приводит к уменьшению амплитуды волны, а изменение плотности — к увеличению амплитуды. Таким образом, при определённых условиях, два эффекта могут компенсировать друг друга.

Наконец, Soler et al. (2011b) исследовали влияние течения плазмы присутствующего в невозмущённом состоянии на резонансное затухание распространяющихся изгибных волн в магнитной трубке однородной в продольном направлении. Анализ был проведён в приближении тонкой трубки

и тонкой переходной области (ТТП приближение) аналитически и в общем случае численно. Основным результатом является зависимость длины затухания от направления распространения волны. Для волны распространяющейся в направлении течения эта длина больше чем в случае статического равновесия, а для волны распространяющейся против течения — меньше.

#### 2.4.4. Выводы

В этой главе исследовано распространение изгибных волн вдоль магнитной трубки с постоянным радиусом сечения. Трубка однородна в продольном направлении и состоит из центральной области однородной также и в радиальном направлении и переходного слоя где плотность убывает от её значения внутри трубки до значения в окружающей среде. Исследование проведено в ТТП приближении. Это означает что длина волны много больше радиуса сечения трубки, а толщина переходной области много меньше радиуса сечения трубки. Предполагалось также, что диссипация мала и должна учитываться только в тонком диссипативном слое, охватывающем резонансную поверхность где скорость распространения изгибной волны совпадает с локальной альвеновской скоростью. Точное условие малости диссипации даётся неравенством (2.4.43).

Уравнения диссипативной МГД решены в диссипативном слое. Показано, что возмущение магнитного давления практически не меняется поперёк магнитного поля. С помощью решения диссипативной МГД вычислено изменение радиального смещения плазмы поперёк диссипативного слоя. Формулы определяющие изменение радиального смещения и возмущения магнитного давления поперёк диссипативного слоя называются формулами связи. С их помощью определено изменение радиального смещения поперёк неоднородной переходной области. Из решений уравнений идеальной МГД во внутренней однородной области и внешней области получено второе выражение для изменения радиального смещения поперёк неоднородной переходной области. С помощью сравнения двух решений получено выражение для декремента распространяющихся волн  $\gamma_{\text{prop}}$ . Показано, что отношение длины затухания  $1/\gamma_{\text{prop}}$  к длине волны порядка радиуса трубки к толщине неоднородного слоя,  $R/\ell \gg 1$ . Другим важным результатом является то, что  $\gamma_{\text{prop}}$  пропорционален частоте волны  $\omega$ . Это означает что

резонансное затухание может служить фильтром удаляющим высокочастотную составляющую широкополосного возмущения.

## 2.5. Влияние нелинейности на резонансное затухание изгибных волн

В предыдущей главе исследовалось резонансное затухание изгибных волн, распространяющихся по магнитным трубкам. При этом, использовалось линейное описание возмущений. Обычно распространяющиеся изгибные волны в корональных петлях имеют очень малую амплитуду, так что использование линейного описания вполне оправдано. Что касается распространяющихся изгибных волн в протуберанцах и спикулах, то довольно часто они имеют достаточно большую амплитуду, так что учёт нелинейности может оказаться существенным. В этой главе исследуется влияние нелинейности на распространение изгибных волн в магнитных трубках. Впервые распространение нелинейных изгибных волн было исследовано в работе Ruderman (1992a). В этой работе рассматривалось распространение нелинейных волн вдоль однородной магнитной трубки с учётом дисперсии волн. Дисперсионная поправка в дисперсионном уравнении для изгибных волн пропорциональна  $(R/L)^2$ . Обычно в приложениях к волнам в солнечной атмосфере  $R/L \lesssim 0.1$ , так что дисперсия волн очень слабая. Гораздо более существенным является эффект резонансного затухания волн, связанный с неоднородностью трубки в радиальном направлении. Поэтому в данной главе пренебрегаем эффектом дисперсии, но учитываем резонансное затухание. Результаты этого исследования опубликованы в статье Ruderman et al. (2010). Данная глава является единственной, где используются уравнения для несжимаемой а не для холодной плазмы. Это приближение больше подходит для приложений к волнам в солнечной фотосфере. Исследование распространения нелинейных волн по магнитным трубкам было мотивировано наблюдениями движущихся магнитных образований (moving magnetic features, MMF) вокруг солнечных пятен. В работах Ruytova et al. (1997) и Ruytova and Hogenaar (2007) была высказана гипотеза, что эти образования являются изгибными волнами, распространяющимися по магнитным трубкам в области полутени. Однако следует отметить, что относительное возмущение плотности в изгибных волнах порядка относительного смещения оси трубки, умноженного на  $(R/L)^2$ . Таким образом, в длинноволно-

вом приближении возмущение плотности очень мало. Поэтому результаты исследования распространения длинных изгибных волн в приближении холодной плазмы и в приближении несжимаемой плазмы качественно совпадают.

### 2.5.1. МГД уравнения в Лагранжевых переменных

В данной главе используются Лагранжевы переменные  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . Введём вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , определяющий положение бесконечно малого объёма плазмы и вектор смещения  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Вектор  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{a})$  удовлетворяет начальным условиям  $\mathbf{x}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{a}$ , так что  $\boldsymbol{\xi}(0, \mathbf{a}) = 0$ . Предполагается, что плазма несжимаемая и её плотность  $\rho$  не зависит от времени,  $\rho = \rho(\mathbf{a})$ . Учитывается вязкость плазмы, но при этом плазма считается бесконечно проводящей.

Как известно, уравнение индукции для бесконечно проводящей жидкости может быть проинтегрировано, и магнитное поле  $\mathbf{B}$  может быть выражено через вектор смещения  $\boldsymbol{\xi}$  (см. напр. Moffatt, 1978):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} = B_{0j} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a_j} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}, \quad (2.5.1)$$

где  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(0, \mathbf{a})$  и  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial a_1}, \frac{\partial}{\partial a_2}, \frac{\partial}{\partial a_3} \right)$ . Уравнение движения в Лагранжевых переменных записывается в виде (см. напр. Temam and Miranville, 2005)

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \Pi_{ji}}{\partial a_j}. \quad (2.5.2)$$

где  $\Pi_{ji}$  — номинальный тензор Пиолы-Киргофа. В несжимаемой среде тензор  $\Pi_{ji}$  связан с тензором напряжений Коши  $T_{ji}$ , используемым в Эйлеровском описании движения сплошной среды, соотношением

$$\Pi_{ji} = T_{ki} \frac{\partial a_j}{\partial x_k}. \quad (2.5.3)$$

В дальнейшем для обозначения тензоров используем специальный жирный шрифт. Например,  $\mathbf{\Pi}$  обозначает тензор Пиолы-Киргофа. Заметим, что тензор Пиолы-Киргофа используемый в книге Temam and Miranville (2005) равен  $\mathbf{\Pi}^T$ , где верхний индекс  $T$  означает транспонирование.

Тензор напряжений Коши равен сумме трёх тензоров, тензора давления, электромагнитного тензора Максвелла и тензора вязкости,

$$T_{ki} = -\tilde{p}\delta_{ki} + \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \delta_{ki} + B_k B_i \right) + \eta_0 W_{ki}, \quad (2.5.4)$$

где  $\tilde{p}$  — давление плазмы,  $\delta_{ki}$  — дельта-символ Кронекера,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость свободного пространства и  $\eta_0$  — динамический коэффициент вязкости. Тензор вязкости  $W_{ki}$  задаётся выражением

$$W_{ki} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (2.5.5)$$

где  $v_i$  — компоненты скорости  $\mathbf{v}$  связанной с вектором смещения соотношением  $\mathbf{v} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$ . Компоненты силы вязкости равны

$$\frac{\partial W_{ki}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right). \quad (2.5.6)$$

При выводе этого выражения учитывалось, что, в силу несжимаемости среды,  $\partial v_k / \partial x_k = 0$ . Из уравнения (2.5.6) следует, что, вместо тензора  $W_{ki}$ , в уравнения (2.5.4) можно подставить тензор

$$W'_{ki} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t \partial a_l} \frac{\partial a_l}{\partial x_k}. \quad (2.5.7)$$

Введём полное невозмущённое давление (плазменное плюс магнитное),  $P_0$ , и его возмущение,  $P$ ,

$$P_0 = p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0}, \quad P = p + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{b}|^2, \quad (2.5.8)$$

где  $p_0$  — невозмущённое давление плазмы и  $p = \tilde{p} - p_0$ . Теперь выражение для тензора напряжений Коши может быть записано в инвариантной форме:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 - P \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \mathbf{b}) + \eta_0 \mathbf{W}', \quad (2.5.9)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор с компонентами  $\delta_{ji}$ ,  $\mathbf{b} \mathbf{b}$  — диадное произведение двух векторов, компоненты модифицированного тензора вязкости  $\mathbf{W}'$  задаются уравнением (2.5.7), а невозмущённый тензор  $\mathbf{T}_0$  определяется выражением

$$\mathbf{T}_0 = -P_0 \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0. \quad (2.5.10)$$

В невозмущённом состоянии ( $\boldsymbol{\xi} = 0$ )  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{T}_0$ , так что  $\mathbf{T}_0$  удовлетворяет условию равновесия

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_0 = 0. \quad (2.5.11)$$

В дальнейшем для обозначения матриц используем тот же шрифт что и для обозначения тензоров, но дополнительно снабжаем буквы шапочкой. Например,  $\hat{\mathbf{I}}$  обозначает единичную матрицу. В несжимаемой среде определитель матрицы с элементами  $\partial x_i / \partial a_j$  равен единице. Это условие можно записать в виде

$$\det(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{U}}) = 1, \quad (2.5.12)$$

где матрица  $\hat{\mathbf{U}}$  имеет компоненты  $\partial \xi_i / \partial a_j$ . Введём тензор  $\mathbf{A}$  с компонентами  $A_{ij} = \partial a_i / \partial x_j$ . Этот тензор удовлетворяет уравнению

$$[\mathbf{I} + (\nabla \boldsymbol{\xi})^T] \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (2.5.13)$$

Теперь уравнение (2.5.3) можно переписать в виде

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}, \quad (2.5.14)$$

а выражение для  $\mathbf{W}'$  даётся формулой

$$\mathbf{W}' = \mathbf{A}^T \cdot \nabla \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}. \quad (2.5.15)$$

Используя уравнение (2.5.1), получим

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} B_j = B_{0k} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = B_{0k} \delta_{ki} = B_{0i}. \quad (2.5.16)$$

С помощью этого результата и уравнения (2.5.1) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \mathbf{b}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}_0 [\mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}]. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Применяя формулу Якоби для определителя неособой матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  зависящей от параметра  $\tau$ ,

$$\frac{d[\det(\hat{\mathbf{M}})]}{d\tau} = \det(\hat{\mathbf{M}}) \text{tr} \left( \frac{d\hat{\mathbf{M}}}{d\tau} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \right),$$

где ‘tr’ означает след матрицы, можно доказать тождество

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) = 0,$$

справедливое в случае несжимаемой среды. Используя это тождество и уравнения (2.5.8), (2.5.9), (2.5.11), (2.5.14), (2.5.15) и (2.5.17), перепишем уравнение (2.5.2) в инвариантной форме

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = & \nabla P_0 - \mathbf{A}^T \cdot \nabla (P_0 + P) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [\mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}] \\ & + \eta_0 (\mathbf{A}^T \cdot \nabla) \cdot \left( \mathbf{A}^T \cdot \nabla \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Уравнения (2.5.12) и (2.5.18) составляют замкнутую систему уравнений описывающих движение плазмы в Лагранжевых переменных. Эта система была выведена в декартовых координатах. Однако она записана в инвариантной форме и поэтому может быть использована в любых криволинейных координатах.

### 2.5.2. Постановка задачи

В дальнейшем рассматриваем распространение нелинейных изгибных волн по тонкой прямой магнитной трубке. В невозмущённом состоянии имеется полубесконечная трубка радиуса  $R$  окружённая кольцевой областью с толщиной  $\ell$ . Предполагается что кольцевая область тонкая,  $\ell \ll R$ . Таким образом, как и в предыдущих главах, используется приближение тонкой трубки и тонкого переходного слоя (ТТТП приближение). Введём цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  и положим  $a_1 = r, a_2 = \varphi, a_3 = z$ . Единичные векторы этой координатной системы обозначим как  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$  и  $\mathbf{e}_z$ . Ось  $z$  совпадает с осью трубки. Невозмущённое магнитное поле везде параллельно оси трубки,  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ . Невозмущённые плотность и магнитное поле постоянны внутри трубки,  $\rho = \rho_i = \text{const}, B_0 = B_i = \text{const}$  при  $r < R$ . Снаружи, вне кольцевой области, плотность также постоянна, а магнитное поле отсутствует,  $\rho = \rho_e = \text{const}, B_0 = 0$  for  $r > R + \ell$ . В кольцевой области  $\rho$  монотонно изменяется от  $\rho_i$  до  $\rho_e$ , а  $B_0$  убывает от  $B_i$  до нуля. Таким образом, невозмущённое состояние несколько отличается от использованного в предыдущей главе. Для рассматриваемого невозмущённого состояния уравнение равновесия (2.5.11) принимает форму

$$P_0 = p_0 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_0|^2 = \text{const}. \quad (2.5.19)$$

Альвеновская скорость постоянна внутри трубки,  $V_A = V_{Ai} = B_i (\mu_0 \rho_i)^{-1/2}$  for  $r < R$ . Предполагаем, что  $V_A$  монотонно убывает от  $V_{Ai}$  до нуля в тонкой

кольцевой области.

Запишем уравнения движения плазмы в цилиндрических координатах. Единственной проблемой является определение выражения для  $\nabla \xi$ . Обычно даётся выражение для величины  $\mathbf{w} \cdot \nabla \xi$  (см. напр. Goedbloed and Poedts 2004). Однако нетрудно получить выражение для величины  $\nabla \xi$  используя выражение для  $\mathbf{w} \cdot \nabla \xi$ . Для этого достаточно положить в этом выражении  $\mathbf{w}$  равным последовательно первому, второму и третьему единичным векторам криволинейной системы координат. В результате этой процедуры получим что матрица тензора  $\nabla \xi$ , которую обозначим как  $[\nabla \xi]$ , в цилиндрической системе координат даётся выражением

$$[\nabla \xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - \frac{\xi_\varphi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial z} & \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.5.20)$$

С помощью соотношения (2.5.20) легко получить условие несжимаемости (2.5.12) в явной форме

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - \frac{\xi_\varphi}{r} & 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial z} & \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} & 1 + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{vmatrix} = 1. \quad (2.5.21)$$

Наилучший способ определить явное выражение для третьего члена в правой части уравнения (2.5.18), это использовать для вывода декартовы координаты. В результате получим

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [\mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \xi] = \rho V_A^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}. \quad (2.5.22)$$

Используя этот результат запишем компоненты уравнения (2.5.18) в цилиндрических координатах

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \rho V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} - A_{11} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{A_{21}}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - A_{31} \frac{\partial P}{\partial z} + \eta_0 f_r, \quad (2.5.23)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} = \rho V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial z^2} - A_{12} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{A_{22}}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - A_{32} \frac{\partial P}{\partial z} + \eta_0 f_\varphi, \quad (2.5.24)$$



$$\rho \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial t^2} = \rho V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial z^2} - A_{13} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{A_{23}}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - A_{33} \frac{\partial P}{\partial z} + \eta_0 f_z. \quad (2.5.25)$$

Здесь  $A_{11}, \dots, A_{33}$  — компоненты тензора  $\mathbf{A}$  которые даются выражениями (A.1)-(A.9) в Дополнении А, и

$$\mathbf{f} = (\mathbf{A}^T \cdot \nabla) \cdot \left( \mathbf{A}^T \cdot \nabla \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right). \quad (2.5.26)$$

Уравнения (2.5.21) и (2.5.23)-(2.5.25) используются в следующем разделе для вывода нелинейного уравнения описывающего распространение изгибных волн.

### 2.5.3. Вывод нелинейного уравнения для изгибных волн

В этом разделе выводится нелинейное уравнение для изгибных волн в магнитной трубке. Для вывода используется асимптотический метод развитый в работах Taniuti and Wei (1968), Kakutani et al. (1968) и Taniuti (1974) (так называемый reductive perturbation method). Предполагается, что волна возбуждается у основания полубесконечной трубки ( $z = 0$ ) и затем распространяется в положительном направлении оси  $z$ . Также предполагается, что амплитуда волны мала,  $|\boldsymbol{\xi}|/R = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$  в областях  $r < R$  и  $r > R + \ell$  (в дальнейшем увидим, что  $\boldsymbol{\xi}$  может быть порядка  $R$  в неоднородной кольцевой области). В этом случае нелинейные эффекты проявляются на расстоянии порядка  $\varepsilon^{-1}L$ , где  $L$  — характерная длина возмущения. В предыдущей главе было показано что отношение длины волны к длине затухания порядка  $\ell/R$ . Целью данного раздела является вывод уравнения, которое описывает баланс между нелинейностью и диссипацией волны. Поэтому считаем, что длина диссипации и длина, на которой проявляются нелинейные эффекты одного порядка, и полагаем  $\ell/R = \varepsilon$ . Кроме того рассматриваем длинные волны с длиной волны много больше радиуса магнитной трубки и полагаем  $R/L \lesssim \varepsilon$ .

Последнее предположение означает, что отношение характерных размеров в радиальном и продольном направлениях меньше либо порядка  $\varepsilon$ . В соответствии с этим введём “растягивающую” переменную в направлении  $z$ ,  $z_1 = \varepsilon z$ . Если пренебречь небольшой дисперсией, связанной с конечной толщиной магнитной трубки, то, в линейном приближении, волна возбуждаемая у основания трубки будет распространяться в положительном направлении оси  $z$  без изменения формы со скоростью  $C_k$ , определяемой

формулой (см. напр. Рютов и Рютова 1976, Edwin and Roberts 1983, а также уравнение (1.3.23) в Разделе 1.3)

$$C_k^2 = \frac{\rho_i V_{Ai}^2}{\rho_e + \rho_i}. \quad (2.5.27)$$

Нелинейность и затухание влияют на волну только на больших расстояниях от основания петли, в то время как локально она описывается линейным бездиссипативным решением. Таким образом, характерное время быстрой эволюции волны такое же как и в случае линейной волны и равно  $L/C_k \sim \varepsilon^{-1}R/C_k$ . К тому же, локально волна распространяется без изменения формы. Основываясь на этом анализе вводим “растянутое” время,  $t_1 = \varepsilon t$ , и “бегущую” переменную  $\tau = t_1 - z_1/C = \varepsilon(t - z/C)$ , где  $C = C_k + O(\varepsilon)$ . Точное выражение для  $C$  будет найдено позже. В заключении, для того чтобы учесть изменение формы волны в результате действия нелинейности и затухания вводим “медленную” переменную в направлении оси  $z$ ,  $Z = \varepsilon z_1 = \varepsilon^2 z$ .

Для того чтобы вывести нелинейное уравнение описывающее распространение изгибных волн решаем систему уравнений (2.5.21) и (2.5.23)-(2.5.25) отдельно во внутренней области ( $r < R$ ), во внешней области ( $r > R + \ell$ ), и в кольцевой области ( $R < r < R + \ell$ ), а затем сращиваем решения в областях перекрытия.

### 2.5.3а. Решение во внутренней области

Преполагается, что вязкость мала и её учёт необходим только в области больших градиентов. В дальнейшем увидим, что такие градиенты появляются только в неоднородной кольцевой области, поэтому во внутренней и внешней областях вязкостью можно пренебречь. Используя оценки типа  $\partial P/\partial z = O(P/L)$  для производных по  $z$  всех переменных входящих в уравнения (2.5.23)-(2.5.25), получаем из этих уравнений оценки

$$\xi_z/R = O(\varepsilon^2), \quad P/(\rho_i V_{Ai}^2) = O(\varepsilon^3). \quad (2.5.28)$$

Учитывая эти оценки, запишем уравнения (2.5.21), (2.5.23) и (2.5.24) в новых переменных

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) - \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) = O(\varepsilon^3), \quad (2.5.29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \rho_i \left( 1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\rho_i V_{Ai}^2}{C} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{\partial P}{\partial r} \\ - \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = O(\varepsilon^5), \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \rho_i \left( 1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\rho_i V_{Ai}^2}{C} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau \partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \\ - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = O(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

При выводе уравнения (2.5.30) использовалось уравнение (2.5.29). Решение системы (2.5.29)-(2.5.31) ищем в виде разложений в ряды по  $\varepsilon$ . В соответствии с оценками (2.5.28) эти разложения записываются в виде

$$\begin{aligned} u_r &= \varepsilon u_r^{(1)} + \varepsilon^2 u_r^{(2)} + \dots, \\ u_\varphi &= \varepsilon u_\varphi^{(1)} + \varepsilon^2 u_\varphi^{(2)} + \dots, \\ P &= \varepsilon^3 P^{(1)} + \varepsilon^4 P^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (2.5.29)-(2.5.31) и собирая члены наименьшего порядка по  $\varepsilon$ , получим

$$\frac{\partial(r u_r^{(1)})}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.5.33)$$

$$\rho_i \left( 1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} = 0, \quad (2.5.34)$$

$$\rho_i \left( 1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_\varphi^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.5.35)$$

Введём разложение в ряд Фурье по  $\varphi$ ,

$$f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\varphi}.$$

В этом разложении члены с  $|m| = 1$  соответствуют изгибной волне, а члены с  $|m| > 1$  — желобковым волнам. Член с  $m = 0$  соответствует симметричной волне. Поскольку в длинноволновом приближении фазовая скорость этой волны отличается от  $C$ , она слабо взаимодействует с изгибной волной и желобковыми волнами. Поэтому в дальнейшем симметричную волну исключаем из рассмотрения и полагаем  $f_0 = 0$ .

Подставляя разложения Фурье в уравнения (2.5.33)-(2.5.35) получим

$$\frac{\partial(ru_{rm}^{(1)})}{\partial r} + imu_{\varphi m}^{(1)} = 0, \quad (2.5.36)$$

$$\rho_i \left(1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2}\right) \frac{\partial^2 u_{rm}^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial P_m^{(1)}}{\partial r} = 0, \quad (2.5.37)$$

$$\rho_i \left(1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2}\right) \frac{\partial^2 u_{\varphi m}^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{im}{r} P_m^{(1)} = 0. \quad (2.5.38)$$

Исключая  $u_{\varphi m}^{(1)}$  и  $P_m^{(1)}$  из этой системы получим уравнение для  $u_{rm}^{(1)}$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^3(ru_{rm}^{(1)})}{\partial r \partial \tau^2} - m^2 \frac{\partial^2 u_{rm}^{(1)}}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2.5.39)$$

В дальнейшем предполагаем, что возбуждение волны при  $z = 0$  начинается в некоторый момент времени, а до этого плазма находится в состоянии покоя. Это означает, что все возмущения должны затухать при  $\tau \rightarrow -\infty$ . Решение уравнения (2.5.39) удовлетворяющее этому условию и регулярное при  $r = 0$  имеет вид

$$u_{rm}^{(1)} = U_m(\zeta, \tau) r^{|m|-1}, \quad (2.5.40)$$

где  $U_m(\zeta, \tau)$  – произвольная функция. После этого несложно получить выражения для остальных переменных:

$$u_{\varphi m}^{(1)} = iU_m r^{|m|-1} \operatorname{sgn} m, \quad (2.5.41)$$

$$P_m^{(1)} = -\rho_i \frac{C^2 - V_{Ai}^2}{|m|C^2} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \tau^2} r^{|m|}. \quad (2.5.42)$$

В следующем приближении по  $\varepsilon$  с помощью уравнения (2.5.43) получим из уравнений (2.5.29)-(2.5.31)

$$\frac{\partial(ru_r^{(2)})}{\partial r} + \frac{\partial u_{\varphi}^{(2)}}{\partial \varphi} = r \left( \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial u_{\varphi}^{(1)}}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} - u_{\varphi}^{(1)} \right), \quad (2.5.43)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \left(1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2}\right) \frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial P^{(2)}}{\partial r} = & -\frac{2\rho_i V_{Ai}^2}{C} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \tau \partial \zeta} \\ & + \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \left( 1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_\varphi^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P^{(2)}}{\partial \varphi} = - \frac{2\rho_i V_{Ai}^2}{C} \frac{\partial^2 u_\varphi^{(1)}}{\partial \tau \partial \zeta} \\ + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} - u_\varphi^{(1)} \right) \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (2.5.45)$$

Коэффициент Фурье произведения двух функций связан с коэффициентами Фурье этих функций формулой

$$(fg)_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k f_{m-k}. \quad (2.5.46)$$

Используя эту формулу и уравнения (2.5.40)-(2.5.42), преобразуем уравнения (2.5.43)-(2.5.45) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru_{rm}^{(2)})}{\partial r} + imu_{\varphi m}^{(2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-3} \chi_{mk} \\ \times (|k| - 1)(|m - k| - 1) U_k U_{m-k}, \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \left( 1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_{rm}^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial P_m^{(2)}}{\partial r} = - \frac{2\rho_i V_{Ai}^2}{C} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \zeta \partial \tau} r^{|m|-1} \\ - \frac{\rho_i (C^2 - V_{Ai}^2)}{C^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-3} \chi_{mk} (|k| - 1) U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \left( 1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_{\varphi m}^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{im}{r} P_m^{(2)} = - \frac{2\rho_i V_{Ai}^2}{C} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \zeta \partial \tau} r^{|m|-1} \operatorname{sgn} m \\ - \frac{i\rho_i (C^2 - V_{Ai}^2)}{C^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-3} \chi_{mk} (k - \operatorname{sgn} k) U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

где

$$\chi_{mk} = 1 - \operatorname{sgn}[k(m - k)]. \quad (2.5.50)$$

При выводе уравнений (2.5.47)-(2.5.49) использовался тот факт, что  $\chi_{mk} \neq 0$  только когда  $k(m - k) < 0$ , и в том случае, когда это условие выполнено, имеет место соотношение  $|k| + |m - k| = |2k - m|$ . Исключая  $u_{\varphi m}^{(2)}$  и  $P_m^{(2)}$  из уравнений (2.5.47)-(2.5.49) получим уравнение для  $u_{rm}^{(2)}$ . В Дополнении В

показано, что это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^2(r u_{rm}^{(2)})}{\partial r \partial \tau} - m^2 \frac{\partial u_{rm}^{(2)}}{\partial \tau} &= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-3} \chi_{mk} \\ &\times (|k| - 1)(|m - k| - 1) \left[ m U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \operatorname{sgn} k \right. \\ &\left. + (|m - k| - 1) \frac{\partial}{\partial \tau} (U_k U_{m-k}) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.51)$$

Общее решение этого уравнения равно сумме частного решения и общего решения однородного уравнения регулярного при  $r = 0$ . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rm}^{(2)}}{\partial \tau} &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-3} \chi_{mk} \left[ m U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \operatorname{sgn} k \right. \\ &\left. + (|k| - 1) \frac{\partial}{\partial \tau} (U_k U_{m-k}) \right] + \frac{\partial \tilde{U}_m}{\partial \tau} r^{|m|-1}, \end{aligned} \quad (2.5.52)$$

где  $\tilde{U}_m(\zeta, \tau)$  — произвольная функция. При выводе этого уравнения использовалось тождество

$$(|2k - m| - 2)^2 - m^2 = 4(|k| - 1)(|m - k| - 1) \quad (2.5.53)$$

справедливое при  $k(m - k) < 0$ . В Дополнении В показано что выражение для  $P_m^{(2)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} P_m^{(2)} &= \frac{2\rho_i V_{Ai}^2}{|m|C} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \zeta \partial \tau} r^{|m|} - \frac{\rho_i(C^2 - V_{Ai}^2)}{2mC^2} \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-2} \chi_{mk} \left[ (k - \operatorname{sgn} k) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_k U_{m-k}) \right. \\ &\left. + m U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} \right] - \rho_i \frac{C^2 - V_{Ai}^2}{|m|C^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}_m}{\partial \tau^2} r^{|m|}. \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

### 2.5.3b. Решение во внешней области

Внешняя область определяется неравенством  $r > R + \ell$ . Разделим эту область на две части: внутреннюю внешнюю область и внешнюю внешнюю область. Для этого введём малый параметр  $\varepsilon_1$  удовлетворяющий условию  $R/L \ll \varepsilon_1 \ll 1$ . Внутренняя внешняя область определяется неравенством  $R + \ell < r \lesssim \varepsilon_1^{-1} R$ , а внешняя внешняя область — неравенством  $r \gtrsim \varepsilon_1^{-1} R$ .

Поскольку обе области содержат точки удовлетворяющие оценке  $r \sim \varepsilon_1^{-1}R$ , они пересекаются.

Во внешней области  $r$  может быть порядка или даже больше чем  $L$ , так что в этой области характерный масштаб в радиальном направлении равен  $L$ , т.е. он совпадает с характерным масштабом в направлении оси  $z$ . Это означает, что необходимо ввести новую растягивающую переменную в радиальном направлении аналогичную растягивающей переменной  $z_1$ . Обозначим эту переменную через  $r_1 = \varepsilon r$ . В дальнейшем рассматриваем возмущения затухающие при  $r \rightarrow \infty$  на характерном масштабе равном  $R$ . Это означает, что амплитуда возмущений во внешней области мала и волновое движение можно описывать в линейном приближении. Соответствующую систему уравнений получим, линеаризуя уравнения (2.5.21) и (2.5.23)-(2.5.25), пренебрегая диссипативными членами и преобразуя полученную систему уравнений к растягивающим переменным  $t_1, r_1$  и  $z_1$ . В результате имеем

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial(r_1 u_r)}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z_1} = 0, \quad (2.5.55)$$

$$\varepsilon \rho_e \frac{\partial^2 u_r}{\partial t_1^2} = -\frac{\partial P}{\partial r_1}, \quad (2.5.56)$$

$$\varepsilon \rho_e \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t_1^2} = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \quad (2.5.57)$$

$$\varepsilon \rho_e \frac{\partial^2 u_z}{\partial t_1^2} = -\frac{\partial P}{\partial z_1}. \quad (2.5.58)$$

Напомним, что во внешней области  $B_0 = 0$ . Представляя все переменные в виде рядов Фурье по  $\varphi$  и исключая  $u_{rm}, u_{zm}$  и  $P_m$ , получим уравнение для  $u_{\varphi m}$ ,

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial(r_1 u_{\varphi m})}{\partial r_1} - \frac{m^2}{r_1^2} u_{\varphi m} + \frac{\partial^2 u_{\varphi m}}{\partial z_1^2} = 0. \quad (2.5.59)$$

Коэффициенты Фурье остальных величин выражаются через  $u_{\varphi m}$  следующими формулами:

$$u_{rm} = -\frac{ir_1}{m} \frac{\partial u_{\varphi m}}{\partial r_1}, \quad u_{zm} = -\frac{ir_1}{m} \frac{\partial u_{\varphi m}}{\partial z_1}, \quad (2.5.60)$$

$$P_m = \frac{i\varepsilon r_1 \rho_e}{m} \frac{\partial^2 u_{\varphi m}}{\partial t_1^2}.$$

Предполагаем, что все функции заданы при  $z_1 = 0$ . В частности,  $u_{\varphi m} = u_{\varphi m}^0(r_1, t_1)$  при  $z_1 = 0$ . В дальнейшем также считаем, что  $u_{\varphi m}^0(r_1, t_1)$  достаточно быстро стремится к нулю при  $r_1 \rightarrow \infty$ . Введём  $\hat{u}_{\varphi m} = u_{\varphi m} - u_{\varphi m}^0 e^{-cz_1}$ , где  $c$  – произвольная положительная постоянная. Подставляя это выражение в уравнение (2.5.59), получим

$$\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial(r_1 \hat{u}_{\varphi m})}{\partial r_1} - \frac{m^2}{r_1^2} \hat{u}_{\varphi m} + \frac{\partial^2 \hat{u}_{\varphi m}}{\partial z_1^2} = g(r_1, t_1) e^{-cz_1}, \quad (2.5.61)$$

где

$$g(r_1, t_1) = -\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial(r_1 u_{\varphi m}^0)}{\partial r_1} + \frac{m^2}{r_1^2} u_{\varphi m}^0 - c^2 u_{\varphi m}^0. \quad (2.5.62)$$

Поскольку  $\hat{u}_{\varphi m} = 0$  при  $z_1 = 0$ , к этой функции можно применить синус-преобразование Фурье. Это преобразование также применяется к  $e^{-cz_1}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\varphi m}(r_1, z_1, t_1) &= \int_0^\infty \tilde{u}_{\varphi m}(r_1, \kappa, t_1) \sin(\kappa z_1) d\kappa, \\ e^{-cz_1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa \sin(\kappa z_1)}{c^2 + \kappa^2} d\kappa. \end{aligned} \quad (2.5.63)$$

Заметим, что второе уравнение в (2.5.63) справедливо только при  $z_1 > 0$ . Подставляя уравнение (2.5.63) в уравнение (2.5.61), находим

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} r_1 \frac{\partial(r_1 \tilde{u}_{\varphi m})}{\partial r_1} - \frac{m^2}{r_1} \tilde{u}_{\varphi m} - \kappa^2 r_1 \tilde{u}_{\varphi m} = \frac{2\kappa r_1 g(r_1, t_1)}{\pi(c^2 + \kappa^2)}. \quad (2.5.64)$$

Однородное уравнение, соответствующее этому уравнению является модифицированным уравнением Бесселя для функции  $r_1 \tilde{u}_{\varphi m}$ , так что его общее решение это линейная комбинация модифицированных функций Бесселя первого и второго рода,  $I_m(\kappa r_1)$  и  $K_m(\kappa r_1)$ , делённая на  $r_1$ . Используя метод вариации произвольных постоянных, нетрудно получить решение уравнения (2.5.64) стремящееся к нулю при  $r_1 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\varphi m} &= \frac{2\kappa}{\pi r_1 (c^2 + \kappa^2)} \int_{r_1}^\infty (r')^2 g(r', t_1) [I_m(\kappa r') K_m(\kappa r_1) \\ &\quad - I_m(\kappa r_1) K_m(\kappa r')] dr' + C_m(\kappa, t_1) K_m(\kappa r_1), \end{aligned} \quad (2.5.65)$$

где  $C_m(\kappa, t_1)$  – произвольная функция. Для того чтобы последний член в правой части уравнения Eq. (2.5.65) был регулярным при  $\kappa = 0$ , полагаем что функция  $\kappa^{-m} C_m(\kappa, t_1)$  ограничена при  $\kappa \rightarrow 0$ . Подставляя уравнение (2.5.62) в уравнение (2.5.65), после несложных вычислений перепишем



последнее уравнение в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\varphi m} = & -\frac{2\kappa u_{\varphi m}^0(r_1, t_1)}{\pi(c^2 + \kappa^2)} - \frac{2\kappa}{\pi r_1} \int_{r_1}^{\infty} (r')^2 u_{\varphi m}^0(r', t_1) \\ & \times [I_m(\kappa r') K_m(\kappa r_1) - I_m(\kappa r_1) K_m(\kappa r')] dr' + C_m(\kappa, t_1) K_m(\kappa r_1). \end{aligned} \quad (2.5.66)$$

Обратное преобразование Фурье с использованием второго уравнения в (2.5.62) даёт

$$\begin{aligned} u_{\varphi m} = & \hat{u}_{\varphi m} + u_{\varphi m}^0 e^{-cz_1} = \int_0^{\infty} C_m(\kappa, t_1) K_m(\kappa r_1) \sin(\kappa z_1) d\kappa \\ & - \frac{2}{\pi r_1} \int_0^{\infty} \kappa \sin(\kappa z_1) d\kappa \int_{r_1}^{\infty} (r')^2 u_{\varphi m}^0(r', t_1) \\ & \times [I_m(\kappa r') K_m(\kappa r_1) - I_m(\kappa r_1) K_m(\kappa r')] dr'. \end{aligned} \quad (2.5.67)$$

Решение во внешней области необходимо только для того, чтобы получить граничные условия для решения во внутренней области. Для этого используем метод сращиваемых асимптотических разложений (см. напр. Bender and Orszag 1987). В соответствии с этим методом находим внутреннее разложение, являющееся решением во внутренней области, и внешнее разложение являющееся решением во внешней области. Для сращивания внутреннего и внешнего решений необходимо найти так называемые внутреннее разложение внешнего решения и внешнее разложение внутреннего решения. Чтобы получить первое разложение подставляем  $r_1 = \varepsilon r$  во внешнее разложение заданное уравнениями (2.5.61) и Eq. (2.5.67), а затем раскладываем его в степенной ряд по  $\varepsilon$ . С помощью асимптотической формулы (Abramowitz and Stegun 1964)

$$K_m(x) \sim 2^{m-1} (m-1)! x^{-m},$$

справедливой при  $x \rightarrow +0$ , получим

$$\begin{aligned} u_{rm} \sim \bar{u}_{rm} r^{-m-1}, \quad u_{\varphi m} \sim \bar{u}_{\varphi m} r^{-m-1}, \\ u_{zm} \sim \bar{u}_{zm} r^{-m}, \quad P_m \sim \bar{P}_m r^{-m}, \end{aligned} \quad (2.5.68)$$

где  $\bar{u}_{rm}$ ,  $\bar{u}_{\varphi m}$ ,  $\bar{u}_{zm}$  и  $\bar{P}_m$  — функции  $t_1$  и  $z_1$ . Выражения для этих функций не приводятся поскольку они не используются в дальнейшем. Внешнее разложение внутреннего разложения получается подстановкой  $r = \varepsilon^{-1} r_1$  во внутренне разложение и разложением полученных выражений по степеням  $\varepsilon$ . Условие сращивания заключается в том, что внешнее разложение

внутреннего разложения совпадает с внутренним разложением внешнего разложения после подстановки  $r_1 = \varepsilon r$  в первое разложение (или, что эквивалентно, после подстановки  $r = \varepsilon^{-1} r_1$  во второе разложение). Из уравнения (2.5.68) следует, что необходимым условием срачивания является стремление решения во внутренней внешней области к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Поэтому в дальнейшем ищем решение во внешней области стремящееся к нулю на бесконечности.

Анализ в оставшейся части этого раздела аналогичен анализу в предыдущем разделе. Однако теперь отыскивается не решение регулярное при  $r = 0$ , а решение стремящееся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Это решение имеет вид

$$u_{rm}^{(1)} = W_m(\zeta, \tau) r^{-|m|-1}, \quad (2.5.69)$$

где  $W_m(\zeta, \tau)$  – произвольная функция. Выражения для остальных переменных даются уравнениями

$$u_{\varphi m}^{(1)} = -i W_m r^{-|m|-1} \operatorname{sgn} m, \quad (2.5.70)$$

$$P_m^{(1)} = \frac{\rho_e}{|m|} \frac{\partial^2 W_m}{\partial \tau^2} r^{-|m|}. \quad (2.5.71)$$

Во втором приближении получаем уравнения (2.5.43)-(2.5.45). С помощью уравнений (2.5.46) и (2.5.69)-(2.5.71) преобразуем эту систему к виду аналогичному уравнениям (2.5.47)-(2.5.49). Решение этих преобразованных уравнений является почти полным повторением решения уравнений (2.5.47)-(2.5.49), так что можно опустить все детали решения и представить только окончательный результат. Радиальное смещение плазмы и возмущение полного давления даются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{rm}^{(2)}}{\partial \tau} = & -\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-|2k-m|-3} \chi_{mk} \left[ m W_{m-k} \frac{\partial W_k}{\partial \tau} \operatorname{sgn} k \right. \\ & \left. + (|k| + 1) \frac{\partial}{\partial \tau} (W_k W_{m-k}) \right] + \frac{\partial \widetilde{W}_m}{\partial \tau} r^{-|m|-1}, \end{aligned} \quad (2.5.72)$$

$$\begin{aligned} P_m^{(2)} = & -\frac{\rho_e}{2m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-|2k-m|-2} \chi_{mk} \left[ m W_k \frac{\partial^2 W_{m-k}}{\partial \tau^2} \right. \\ & \left. + (|k| + 1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (W_k W_{m-k}) \operatorname{sgn} k \right] + \frac{\rho_e}{|m|} \frac{\partial^2 \widetilde{W}_m}{\partial \tau^2} r^{-|m|}, \end{aligned} \quad (2.5.73)$$

где  $\widetilde{W}_m(\zeta, \tau)$  — произвольная функция. Выражение для  $u_{\varphi m}^{(2)}$  не приводится поскольку оно не используется в дальнейшем.

### 2.5.3с. Решение в кольцевой области

В этом разделе отыскивается решение в кольцевой области  $R < r < R + \ell$ . Как и в линейной теории резонансного затухания важную роль играет поверхность альвеновского резонанса  $r = r_A$ , где  $r_A$  определяется уравнением  $V_A(r_A) = C$ . Учёт нелинейности не влияет на физическую картину взаимодействия глобальной изгибной волны с локальными альвеновскими колебаниями, приводящему к резонансному затуханию изгибной волны.

В приближении линейной МГД движение в резонансном (или, что то же самое, диссипативном) слое было исследовано в предыдущем разделе. Было показано что концепция резонансного слоя может быть использована только при достаточно слабой диссипации, когда число Рейнольдса удовлетворяет неравенству  $Re \gg \epsilon^{-1} \epsilon^{-2}$  (напомним что  $\epsilon = R/L$  где  $L$  — длина волны). Было также показано, что волновое движение в диссипативном слое качественно отличается в двух случаях: когда  $Re < Re_c$  и  $Re > Re_c$ , где  $Re_c = \epsilon^{-1} \epsilon^{-5}$ . В дальнейшем для упрощения анализа будем считать что  $\epsilon \sim \varepsilon$ . Хотя, фактически,  $\epsilon$  может быть в несколько раз меньше чем  $\varepsilon$ , это не сильно повлияет на оценки  $Re$  и  $Re_c$ .

Режим волнового движения в диссипативном слое, который имеет место при  $Re < Re_c$  можно назвать квази-стационарным потому, что волновое движение в резонансном слое практически такое же как в стационарном резонансном слое, существующем в случае вынужденных колебаний. В этом случае толщина резонансного слоя определяется диссипацией. Она порядка  $Re^{-1/3}(\ell RL)^{1/3} = \ell Re^{-1/3} \epsilon^{-1/3} \varepsilon^{-2/3} \ll \ell$ .

При  $Re > Re_c$  режим волнового движения в диссипативном слое может быть охарактеризован как нестационарный (см. напр. Ruderman et al. 1995, Tirry et al. 1996). В этом случае толщина резонансного слоя не зависит от величины диссипации и по порядку величины равна  $\ell^2/R = O(\varepsilon \ell)$ . Волновое движение в резонансном слое качественно отличается от движения в случае вынужденных колебаний.

Для того чтобы сделать анализ справедливым для обоих режимов волнового движения в резонансном слое положим  $Re^{-1/3} = \varepsilon^2/\bar{\nu}$ , где  $\bar{\nu} \gg \varepsilon$ . При этом  $\bar{\nu} \lesssim 1$  соответствует квази-стационарному режиму, а

$\bar{\nu} \gg 1$  – нестационарному. Резонансный слой определяется неравенством  $|r - r_A| \lesssim \varepsilon \ell / \nu$ , где  $\nu = \min(1, \bar{\nu})$ , а часть кольцевой области вне резонансного слоя – неравенством  $|r - r_A| \gtrsim \varepsilon \ell / \nu$ . Поскольку волновое движение вне резонансного слоя качественно отличается от движения внутри резонансного слоя, уравнения решаются отдельно вне и внутри резонансного слоя, а затем два решения сращиваются в области перекрытия отределяемой неравенством  $|r - r_A| \sim \varepsilon \ell / \nu$ .

(i) *Решение вне резонансного слоя*

В кольцевой области вне резонансного слоя характерный масштаб в радиальном направлении равен  $\ell$ . Поскольку  $\ell/R = O(\varepsilon)$ , необходимо ввести новую растягивающую переменную  $\xi = \varepsilon^{-1}(r - R)$ . Так как  $u_z$  и  $P$  должны быть непрерывны на границах кольцевой области, оценки (2.5.28) верны также и в кольцевой области. Вязкость важна только в резонансном слое, а вне этого слоя вязкостью можно пренебречь. После этого, используя оценки (2.5.28), перепишем уравнения (2.5.21), (2.5.23) и (2.5.24) в новых переменных

$$(R + \varepsilon\xi) \frac{\partial u_r}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \varepsilon u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) = O(\varepsilon^3), \quad (2.5.74)$$

$$\varepsilon^3 \rho \left( 1 - \frac{V_A^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2} + \frac{\partial P}{\partial \xi} - \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = O(\varepsilon^5), \quad (2.5.75)$$

$$\varepsilon^2 \rho \left( 1 - \frac{V_A^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon^3 \frac{\rho V_A^2}{C} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{1}{R + \varepsilon\xi} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\varepsilon^{-1}}{R + \varepsilon\xi} \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right] = O(\varepsilon^5). \quad (2.5.76)$$

Решение уравнений (2.5.74)-(2.5.76) отыскивается в виде разложений, определяемых уравнением (2.5.32). В первом приближении получим из уравнений (2.5.74) и (2.5.75)

$$\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \xi} = 0. \quad (2.5.77)$$

Таким образом,  $u_r^{(1)}$  и  $P^{(1)}$  не зависят от  $\xi$ . Используя это из уравнения (2.5.76) в первом приближении находим

$$\rho \left( 1 - \frac{V_A^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_\varphi^{(1)}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.5.78)$$

Во втором приближении получим из уравнений (2.5.74) и (2.5.75)

$$R \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial \xi} = -u_r^{(1)} - \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} - u_\varphi^{(1)} \right), \quad (2.5.79)$$

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi} - \rho \left( 1 - \frac{V_A^2}{C^2} \right) \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \tau^2}. \quad (2.5.80)$$

Из уравнения (2.5.78) следует, что функция  $u_\varphi^{(1)}$  сингулярна при  $r = r_A$ . При  $|r - r_A| \lesssim \varepsilon$  эта переменная порядка  $\varepsilon^{-1}$ , так что оценка  $u_\varphi = O(\varepsilon)$  не выполняется. Этот результат даёт дополнительное основание для утверждения, что движение внутри резонансного слоя требует отдельного рассмотрения.

(ii) *Решение в резонансном слое*

Поскольку толщина резонансного слоя порядка  $\varepsilon \ell / \nu = O(\varepsilon^2 R / \nu)$ , естественно ввести новую растягивающую переменную  $\sigma = \nu \varepsilon^{-2} (r - r_A)$ . Если  $\nu = O(1)$ , то толщина резонансного слоя порядка  $\varepsilon \ell$ . В этом случае из уравнения (2.5.78) следует, что  $u_\varphi^{(1)} / R = O(\varepsilon^{-1})$  на границе резонансного слоя, т.е.  $u_\varphi$  порядка единицы в этом слое. Несмотря на то, что движение в резонансном слое происходит в основном в азимутальном направлении, так что расстояние от произвольного бесконечно малого объёма плазмы до оси трубки остаётся почти неизменным,  $u_r$  порядка единицы в том случае, когда  $u_\varphi$  порядка единицы. Это ясно видно на Рис. 2.5.1. Если в начальный момент радиальная координата бесконечно малого объёма плазмы равна  $r$ , то радиальная координата этого объёма в возмущённом состоянии равна  $[(u_r + r)^2 + u_\varphi^2]^{1/2}$ . Поскольку изменение радиальной координаты любого бесконечно малого объёма порядка  $\varepsilon$ , получаем  $(u_r + r)^2 + u_\varphi^2 = r^2 [1 + O(\varepsilon)]$ . К тому же,  $r = r_A [1 + O(\varepsilon^2)]$  для любого бесконечно малого объёма в резонансном слое. Из этого анализа следует, что удобно ввести новые переменные,  $\theta$  и  $h$ , определяемые уравнениями

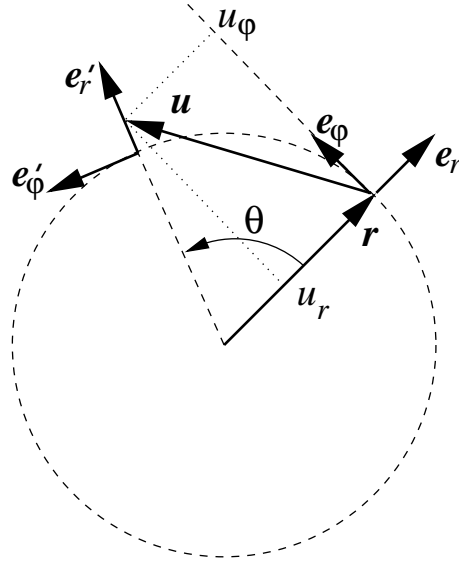


Рис. 2.5.1. Иллюстрация смещения бесконечно малого объёма плазмы. Ясно видно что изменение радиальной координаты бесконечно малого объёма мало, а  $u_r$  и  $u_\varphi$  велики.

$$u_r = (r_A + \varepsilon h) \cos \theta - r, \quad u_\varphi = (r_A + \varepsilon h) \sin \theta. \quad (2.5.81)$$

Характерный масштаб изменения функции  $V_A^2(r)$  равен  $\ell$ . Поскольку толщина резонансного слоя много меньше чем  $\ell$ , в нём можно использовать приближённое выражение

$$C^2 - V_A^2(r) = (\varepsilon^2/\nu)\bar{\Delta}\sigma, \quad \bar{\Delta} = -\frac{dV_A^2}{d\xi} = -\varepsilon\frac{dV_A^2}{dr}. \quad (2.5.82)$$

Для  $\bar{\Delta}$  справедлива оценка  $\bar{\Delta} = O(C^2/R)$ .

Получим приближённое выражение для силы вязкости  $\eta_0 \mathbf{f}$ . При этом удерживаем только самые большие члены в выражении для силы вязкости. Прежде всего заметим что первая оценка в уравнении (2.5.28),  $u_z/R = O(\varepsilon^2)$ , верна и в резонансном слое. Используя эту оценку и уравнения (А.1)-(А.9) из Дополнения А, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \nabla = & \nu \varepsilon^{-2} \left\{ \mathbf{e}_r \left[ \left( 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial u_r}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.83)$$

При выводе этого выражения все члены порядка меньшего чем  $\nu \varepsilon^{-2}$  отбрасывались. Введём  $\vartheta = \varphi + \theta$  и рассмотрим  $\sigma' = \sigma$  и  $\vartheta$  в качестве независимых переменных вместо  $\sigma$  и  $\varphi$ . Введём также единичные векторы (см.

Fig. 2.5.1)

$$\mathbf{e}'_r = \mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\varphi \sin \theta, \quad \mathbf{e}'_\varphi = -\mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\varphi \cos \theta. \quad (2.5.84)$$

После этого уравнение (2.5.83) переписывается в очень компактной форме:

$$(\varepsilon^2/\nu)\mathbf{A} \cdot \nabla = \mathbf{e}'_r \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \sigma'}. \quad (2.5.85)$$

Используя уравнения (2.5.81) и (2.5.84), и снова оставляя только доминантные члены, получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial u_r}{\partial t} \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \mathbf{e}_\varphi = r_A \frac{\partial \theta}{\partial t} \mathbf{e}'_\varphi. \quad (2.5.86)$$

Производные единичных векторов по  $\varphi$  даются выражениями (см. Goedbloed and Poods 2004)

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r,$$

а производные по  $r$  и  $z$  равны нулю. С помощью этих формул можно показать, что

$$\frac{\partial \mathbf{e}'_r}{\partial \sigma'} = \frac{\partial \mathbf{e}'_\varphi}{\partial \sigma'} = 0. \quad (2.5.87)$$

После этого

$$(\varepsilon^2/\nu)(\mathbf{A}^T \cdot \nabla) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = r_A \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial \sigma'} \mathbf{e}'_r \mathbf{e}'_\varphi. \quad (2.5.88)$$

Поскольку  $Re = \bar{\nu}^3 \varepsilon^{-6}$ , удобно ввести масштабированную вязкость  $\bar{\eta}_0 = \bar{\nu}_0^3 \varepsilon^{-6} \eta_0 = RC$ . Используя уравнения (2.5.85), (2.5.86) и (2.5.88), окончательно получаем

$$\eta_0 \mathbf{f} = \varepsilon^3 \nu^2 \bar{\nu}^{-3} \bar{\eta}_0 r_A \mathbf{e}'_\varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \sigma'} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau \partial \sigma'} \right). \quad (2.5.89)$$

С помощью уравнений (A.1)-(A.9) из Дополнения A и первой оценки в уравнении (2.5.28) запишем уравнение сохранения массы (2.5.20) в новых переменных

$$\frac{\partial u_r}{\partial \sigma} \left( r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\varepsilon^2}{\nu} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) = O(\varepsilon^3/\nu). \quad (2.5.90)$$

Подставляя уравнение (2.5.81) в уравнение (2.5.90) и используя новые переменные  $\sigma'$  и  $\vartheta$ , приведём уравнение (2.5.90) к виду

$$(r_A + \varepsilon h) \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \frac{\partial h}{\partial \sigma'} = (\varepsilon/\nu) r_A + O(\varepsilon^2/\nu). \quad (2.5.91)$$

Снова используя оценку  $u_z/R = O(\varepsilon^2)$  и принимая во внимание уравнение (2.5.82), запишем уравнения (2.5.23) и (2.5.24) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^5 \rho \left( \frac{\bar{\Delta}\sigma}{\nu C^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + \frac{\nu}{r} \left( r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r + O(\varepsilon^3) \right) \frac{\partial P}{\partial \sigma} \\ - \frac{1}{r} \left( \nu \frac{\partial u_\varphi}{\partial \sigma} + O(\varepsilon^3) \right) \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \varepsilon^2 \eta_0 f_r = O(\varepsilon^6/\nu), \end{aligned} \quad (2.5.92)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^5 \rho \left( \frac{\bar{\Delta}\sigma}{\nu C^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau \partial \zeta} \right) - \frac{\nu}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi + O(\varepsilon^3) \right) \frac{\partial P}{\partial \sigma} \\ + \frac{1}{r} \left( \nu \frac{\partial u_r}{\partial \sigma} + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \right) \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \varepsilon^2 \eta_0 f_\varphi = O(\varepsilon^6/\nu). \end{aligned} \quad (2.5.93)$$

Подставим уравнения (2.5.81) и (2.5.89) в (2.5.92) и (2.5.93) и используем  $\sigma'$  и  $\vartheta$  в качестве независимых переменных вместо  $\sigma$  и  $\varphi$ . В результате получим два уравнения для  $\theta$  и  $P$ . Умножая первое из этих уравнений на  $\cos \theta$ , второе на  $\sin \theta$  и складывая результаты, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma'} = O(\varepsilon^5/\nu). \quad (2.5.94)$$

Аналогично, умножая первое уравнение на  $-\sin \theta$ , второе на  $\cos \theta$  и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \rho r_A^2 \left[ \frac{\bar{\Delta}\sigma}{\nu C^2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + 2 \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \left( 1 + \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} \right) \right] \\ + \frac{\partial P}{\partial \vartheta} - \varepsilon^3 \nu^2 \bar{\nu}^{-3} \bar{\eta}_0 r_A^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \sigma'} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau \partial \sigma'} \right) = O(\varepsilon^4/\nu). \end{aligned} \quad (2.5.95)$$

При выводе уравнения (2.5.94) использовалась оценка  $\theta = O(\nu)$ , которая следует из уравнений (2.5.78) и (2.5.81). При выводе уравнения (2.5.95) использовались уравнения (2.5.91) и (2.5.94). Уравнения (2.5.91), (2.5.94) и (2.5.95) являются замкнутой системой для переменных  $h$ ,  $\theta$  и  $P$ .

При изучении распространения поверхностных волн по тонкому переходному слою в линейном приближении Mok and Einaudy (1985) предположили что  $\varepsilon \ll \nu \ll 1$ . Позже Ruderman and Goossens (1993) сделали аналогичное предположение, когда обобщили анализ работы Mok and Einaudy (1985) на нелинейный режим. Ruderman et al. (1995) ослабили предположение сделанное в работе Mok and Einaudy (1985) и развили линейную теорию поверхностных волн на тонком переходном слое справедливую при  $\varepsilon \ll \nu \leq 1$ , что соответствует произвольному  $\bar{\nu}$ . Однако попытка



обобщить их анализ на нелинейный случай приводит к очень сложному нелинейному уравнению (2.5.95). Представляется маловероятным, что это уравнение может быть решено аналитически. Для того чтобы сделать прогресс в аналитическом исследовании проблемы, в дальнейшем сделаем то же предположение, что и в работах Mok and Einaudy (1985) и Ruderman and Goossens (1993), а именно, предположим что  $\varepsilon \ll \nu \ll 1$ . Поскольку теперь  $\theta = O(\nu)$ , можно пренебречь всеми нелинейными членами в уравнении (2.5.85) в первом приближении по малому параметру  $\nu$ . В частности,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = 1 + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \approx 1.$$

Теперь, замечая что  $\bar{\nu} = \nu$  и вводя  $\tilde{P} = \varepsilon^{-3}P$ , в первом приближении по  $\varepsilon$  и  $\nu$ , сводим уравнение (2.5.85) к виду

$$\frac{\rho_A \bar{\Delta} \sigma'}{C^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \bar{\eta}_0 \frac{\partial^3 \theta}{\partial \tau \partial \sigma'^2} = -\frac{\nu}{r_A^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \vartheta}, \quad (2.5.96)$$

где  $\rho_A = \rho(r_A)$ . При выводе этого уравнения использовался тот факт, что отношение второго члена в уравнении (2.5.95) к первому порядка  $\nu$ , так что вторым членом можно пренебречь. Кроме того использовалось равенство  $\sigma = \sigma'$ . В соответствии с уравнением (2.5.94)  $\tilde{P}$  в уравнении (2.5.96) рассматриваем как величину независимую от  $\sigma'$ .

Для решения уравнения (2.5.96) введём преобразование Фурье по  $\tau$ ,

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

Классическое преобразование Фурье применяется к функциям стремящимся к нулю на бесконечности. Однако его можно применять и к периодическим функциям если рассатривать преобразование Фурье как обобщённую функцию. В этом случае преобразование Фурье периодической функции  $f(\tau)$  имеет вид

$$f_\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta(\omega + n\omega_0),$$

где  $f_n$  — коэффициенты Фурье в разложении  $f(\tau)$  в ряд Фурье,  $2\pi/\omega_0$  — период и  $\delta(\omega)$  — дельта-функция Дирака.

Применяя преобразование Фурье к уравнению (2.5.96) получим

$$\rho_A \bar{\Delta} \sigma' \omega^2 \theta_\omega - i\omega \bar{\eta}_0 C^2 \frac{\partial^2 \theta_\omega}{\partial \sigma'^2} = \frac{\nu C^2}{r_A^2} \frac{\partial \tilde{P}_\omega}{\partial \vartheta}. \quad (2.5.97)$$

Это уравнение полностью исследовано в теории стационарных резонансных слоёв которые, появляются при изучении вынужденных колебаний. В частности, Coossens, Ruderman, and Hollweg (1995) показали, что его решение стремящееся к нулю при  $\sigma' \rightarrow \infty$  может быть представлено в виде

$$\theta_\omega = -\frac{i\nu\alpha C^2}{r_A^2\rho_A|\bar{\Delta}|\omega^2} \frac{\partial \tilde{P}_\omega}{\partial \vartheta} F(\alpha\sigma'), \quad (2.5.98)$$

где функция  $F$  и параметер  $\alpha$  даются выражениями

$$\alpha = \left( \frac{\rho|\bar{\Delta}|\omega}{\bar{\eta}_0 C^2} \right)^{1/3}, \quad F(x) = \int_0^\infty \exp(isx \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}) - s^3/3) ds. \quad (2.5.99)$$

В соответствии с уравнением (2.5.94) первые два члена в разложении  $P$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ , определяемом уравнением (2.5.32), не зависят от  $\sigma'$ , т.е.

$$P = \varepsilon^3 P^{(1)}(\vartheta, \tau, \zeta) + \varepsilon^4 P^{(2)}(\vartheta, \tau, \zeta) + \dots \quad (2.5.100)$$

Используя разложение  $h = h^{(1)} + (\varepsilon/\nu)h^{(2)} + \dots$  и уравнения (2.5.81) и (2.5.91), получим

$$u_r = r_A(\cos\theta - 1) + \varepsilon h^{(1)}(\vartheta, \tau, \zeta) \cos\theta + \varepsilon^2 [h^{(2)}(\sigma', \vartheta, \tau, \zeta) - \sigma'/\nu] + \dots \quad (2.5.101)$$

С помощью формулы

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)^{-1} = \left( 1 - \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \quad (2.5.102)$$

находим из уравнения (2.5.91)

$$\frac{\partial h^{(2)}}{\partial \sigma'} = \frac{1}{\nu} \left( 1 - \frac{\partial \theta}{\partial \vartheta} \right). \quad (2.5.103)$$

Теперь из уравнений (2.5.98) и (2.5.103) следует что

$$[h^{(2)} - \sigma'/\nu]_\omega = -\frac{C^2}{r_A^2\rho_A\bar{\Delta}\omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_\omega}{\partial \vartheta^2} G(\alpha\sigma'), \quad (2.5.104)$$

где функция  $G$  даётся выражением (см. Goossens et al. 1995)

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-s^3/3}}{s} \{ \exp(isx \operatorname{sgn}(\bar{\Delta})) - 1 \} ds, \quad (2.5.105)$$

Отметим что функция  $G$  определяется с точностью до произвольной постоянной, которая здесь опущена.

(iii) *Вычисление скачков возмущения полного давления и смещения плазмы*

Основной целью раздела 2.5.3с является вычисление скачков величин  $u_r$  и  $P$  поперёк кольцевой области, определяемых формулами

$$[[u_r]] = u_r(R + \ell) - u_r(R), \quad [[P]] = P(R + \ell) - P(R). \quad (2.5.106)$$

Эти скачки затем используются для того, чтобы связать решения во внутренней и внешней областях. Для их вычисления необходимо срастить в областях перекрытия решения в резонансном слое, полученное в разделе (ii) и вне резонансного слоя, полученное в разделе (i). Области перекрытия определяются неравенством  $\nu^{-1} \ll |\sigma| \ll \varepsilon^{-1}$ , или, что эквивалентно, неравенством  $\varepsilon/\nu \ll |\xi - R| \ll 1$ . Внутренние разложения  $P$  и  $u_r$  определяются уравнениями (2.5.100) и (2.5.101). Для того чтобы получить внешнее разложение внутреннего разложения, подставляем  $\sigma = \nu\varepsilon^{-1}\tilde{\xi}$  с  $\tilde{\xi} = \xi - \varepsilon^{-1}(r_A - R)$  во внутреннее разложение и затем снова раскладываем полученное выражение по степеням  $\varepsilon$  при фиксированном  $\tilde{\xi}$ . С помощью интегрирования по частям и уравнения (2.5.100) нетрудно получить из уравнения (2.5.98)

$$\theta_\omega = \varepsilon\theta_\omega^{(1)} + \dots \equiv \varepsilon \frac{C^2}{r_A^2 \rho_A \bar{\Delta} \omega^2 \tilde{\xi}} \frac{\partial P_\omega^{(1)}}{\partial \vartheta} + \dots \quad (2.5.107)$$

Важным следствием из этого уравнения является оценка  $\theta = O(\varepsilon)$ . После этого из соотношения  $\partial/\partial\vartheta = (\partial\varphi/\partial\vartheta)\partial/\partial\varphi$  и уравнения (2.5.102) следует что можно подставить  $\partial P_\omega^{(1)}/\partial\varphi$  вместо  $\partial P_\omega^{(1)}/\partial\vartheta$  в уравнении (2.5.107). Введём функцию  $\bar{P}^{(1)}$  определяемую уравнением

$$\frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \tau^2} = P^{(1)}. \quad (2.5.108)$$

Поскольку предполагается, что возмущения всех величин стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow -\infty$ , функция  $\bar{P}^{(1)}$  определяется однозначно. После этого из уравнения (2.5.107) следует

$$\theta^{(1)} = -\frac{C^2}{r_A^2 \rho_A \bar{\Delta} \tilde{\xi}} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi}. \quad (2.5.109)$$

Используя уравнения (2.5.102), (2.5.107) и (2.5.109) преобразуем уравнение (2.5.100) к виду

$$P = -\frac{\varepsilon^4 C^2}{r_A^2 \rho_A \bar{\Delta} \tilde{\xi}} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi} + \varepsilon^3 \left[ P^{(1)}(\varphi, \tau, \zeta) + \varepsilon P^{(2)}(\varphi, \tau, \zeta) \right] + \dots, \quad (2.5.110)$$

где многоточие обозначает члены с положительными степенями  $\tilde{\xi}$ . Это внешнее разложение внутреннего разложения функции  $P$ .

Для того чтобы получить внешнее разложение внутреннего разложения функции  $u_r$ , используем асимптотическую формулу (см. Goossens et al. 1995)

$$G(x) = -\ln|x| - \frac{1}{3}(E + \ln 3) + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(\bar{\Delta}x) + \dots, \quad (2.5.111)$$

где  $E \approx 0.577$  – постоянная Эйлера. Используя эту формулу и уравнения (2.5.100), (2.5.104), (2.5.107) и (2.5.109), получим из уравнения (2.5.101) что внешнее разложение внутреннего разложения функции  $u_r$  даётся выражением

$$u_r = \frac{\varepsilon^2 C^2}{r_A^2 \rho_A \bar{\Delta}} \left[ -\frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \left( \frac{C^2}{2r_A \rho_A \bar{\Delta} \tilde{\xi}^2} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tilde{\xi}} \frac{\partial h^{(1)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \left( \ln|\tilde{\xi}| + \frac{E + \ln 3}{3} \right) + \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \varphi^2} \right] + \varepsilon h^{(1)} + \dots, \quad (2.5.112)$$

где теперь  $h^{(1)}$  – функция  $\tau$ ,  $\varphi$  и  $\zeta$ , а многоточие снова обозначает члены с положительными степенями  $\tilde{\xi}$ . Функция  $\Upsilon = \Upsilon(\tau, \varphi, \zeta)$  определяется её преобразованием Фурье

$$\Upsilon_\omega = \bar{P}_\omega^{(1)} \left[ \ln|\alpha \nu \varepsilon^{-1}| + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(\alpha \bar{\Delta} \tilde{\xi}) \right]. \quad (2.5.113)$$

Получим теперь внутреннее разложение внешнего разложения. Начнём с преобразования уравнений (2.5.79) и (2.5.80). С помощью уравнений (2.5.77) и (2.5.78) перепишем уравнения (2.5.79) и (2.5.80) в виде

$$u_r^{(2)} = \frac{-C^2}{\rho R^2 (C^2 - V_A^2)} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{C^2}{2\rho R (C^2 - V_A^2)} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \right) - u_r^{(1)} \frac{\xi}{R} + \frac{C^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \int_{\xi_\pm}^\xi \frac{d\xi'}{\rho (C^2 - V_A^2)} + u_{r\pm}^{(2)}(\tau, \varphi, \zeta), \quad (2.5.114)$$

$$P^{(2)} = -\frac{C^2}{\rho R^2 (C^2 - V_A^2)} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \tau^2} \int_{\xi_\pm}^\xi \rho \left( 1 - \frac{V_A^2}{C^2} \right) d\xi' + P_\pm^{(2)}(\tau, \varphi, \zeta), \quad (2.5.115)$$

где  $\xi_- = 0$ ,  $\xi_+ = \varepsilon^{-1}l$ ,  $u_{r\pm}^{(2)}(\tau, \varphi, \zeta)$  и  $P_\pm^{(2)}(\tau, \varphi, \zeta)$  – произвольные функции, и индексы ‘-’ и ‘+’ относятся к областям слева и справа от резонансного слоя. Далее, подставляем  $\xi = \xi_0 + \varepsilon\sigma/\nu$  с  $\xi_0 = \varepsilon^{-1}(r_A - R)$  в решение

вне резонансного слоя, а затем раскладываем полученные выражения по степеням  $\varepsilon$  при постоянном  $\sigma$ . Для того чтобы сравнить полученные разложения с внешним разложением внутреннего разложения определяемым уравнениями (2.5.110) и (2.5.112), подставляем  $\sigma = (\nu/\varepsilon)(\xi - \xi_0) = (\nu/\varepsilon)\tilde{\xi}$ . В результате получаем внутреннее разложение внешнего разложения записанное в терминах  $\tilde{\xi}$ ,

$$u_{r\pm} = \frac{\varepsilon^2 C^2}{r_A^2 \rho_A \bar{\Delta}} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{P}_{\pm}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \ln |\tilde{\xi}/\tilde{\xi}_{\pm}| - \frac{\partial \bar{P}_{\pm}^{(1)}}{\partial \varphi} \left( \frac{C^2}{2r_A \rho_A \bar{\Delta} \tilde{\xi}^2} \frac{\partial \bar{P}_{\pm}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tilde{\xi}} \frac{\partial u_{r\pm}^{(1)}}{\partial \varphi} \right) \right\} + \varepsilon u_{r\pm}^{(1)} \left( 1 - \varepsilon \frac{\xi_0}{R} \right) + \varepsilon^2 u_{r\pm}^{(2)} + \frac{\varepsilon^2 C^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_{\pm}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \int_{\xi_{\pm}}^{\xi_0} \left( \frac{1}{\rho(C^2 - V_A^2)} - \frac{1}{\rho_A \bar{\Delta} (\xi' - \xi_0)} \right) d\xi' + \dots, \quad (2.5.116)$$

$$P_{\pm} = -\frac{\varepsilon^4 C^2}{r_A^2 \rho_A \bar{\Delta} \tilde{\xi}} \frac{\partial \bar{P}_{\pm}^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial P_{\pm}^{(1)}}{\partial \varphi} + \varepsilon^3 \left( P_{\pm}^{(1)} + \varepsilon P_{\pm}^{(2)} \right) + \dots, \quad (2.5.117)$$

где  $\tilde{\xi}_{\pm} = \xi_{\pm} - \xi_0$ , многоточие обозначает члены с положительными степенями  $\tilde{\xi}$ , а индесы ‘-’ и ‘+’ используются чтобы различать величины относящиеся к внутреннему разложению внешнего разложения от величин относящихся к внешнему разложению внутреннего разложения. При выводе уравнений (2.5.115) и (2.5.116) учитывалось, что  $R = r_A + O(\varepsilon)$ . Сравнивая уравнения (2.5.110) и (2.5.117), получим

$$P_{\pm}^{(1)} = P^{(1)}, \quad P_{\pm}^{(2)} = P^{(2)}. \quad (2.5.118)$$

Сравнение уравнений (2.5.112) и (2.5.116) даёт

$$u_{r\pm}^{(1)} = h^{(1)}, \quad (2.5.119)$$

$$u_{r\pm}^{(2)} = \frac{C^2}{r_A^2 \rho_A \bar{\Delta}} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \left( E + \ln |3\tilde{\xi}_{\pm}^3| \right) + \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \varphi^2} \right) + h^{(1)} \frac{\xi_0}{R} - \frac{C^2}{R^2} \frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \int_{\xi_{\pm}}^{\xi_0} \left( \frac{1}{\rho(C^2 - V_A^2)} - \frac{1}{\rho_A \bar{\Delta} (\xi' - \xi_0)} \right) d\xi'. \quad (2.5.120)$$

Теперь из уравнений (2.5.77), (2.5.118) и (2.5.119) следует

$$\llbracket u_r^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket P^{(1)} \rrbracket = 0, \quad (2.5.121)$$

так что, в первом приближении по  $\varepsilon$ , скачки радиального смещения плазмы и возмущения полного даления отсутствуют. С помощью уравнений (2.5.115) и (2.5.118) получим

$$\llbracket P^{(2)} \rrbracket = -\frac{2}{\rho_e R^2} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial P^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{R}{l C^2} \frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial \tau^2} \int_R^{R+\ell} \rho(C^2 - V_A^2) dr. \quad (2.5.122)$$

При выводе этого уравнения использовалось приближённое равенство  $C \approx C_k$ . Наконец, с помощью уравнений (2.5.114), (2.5.119) и (2.5.120), получим

$$\begin{aligned} \llbracket u_r^{(2)} \rrbracket &= -\frac{2}{\rho_e R^2} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{C^2}{l R} \frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \mathcal{P} \int_R^{R+\ell} \frac{dr}{\rho(C^2 - V_A^2)} \\ &\quad - u_r^{(1)} + \frac{C^2}{R^2 \rho_A \bar{\Delta}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [\Upsilon(R+\ell) - \Upsilon(R)], \end{aligned} \quad (2.5.123)$$

где  $\mathcal{P}$  обозначает главную часть интеграла по Коши. Поскольку  $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\omega)$ , из уравнения (2.5.113) следует, что

$$\Upsilon_\omega(R+\ell) - \Upsilon_\omega(R) = \pi i \bar{P}_\omega^{(1)} \text{sgn}(\bar{\Delta}) \text{sgn}(\omega). \quad (2.5.124)$$

Введём преобразование Гильберта по переменной  $\tau$  (см. напр. Papoulis 1962, Bracewell 1999)

$$\mathcal{L}(f(\tau)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau') d\tau'}{\tau' - \tau}. \quad (2.5.125)$$

После этого, используя связь между преобразованиями Фурье и Гильберта,

$$[\mathcal{L}(f(\tau))]_\omega = -i \text{sgn}(\omega) f_\omega, \quad (2.5.126)$$

окончательно преобразуем уравнение. (2.5.123) к виду

$$\begin{aligned} \llbracket u_r^{(2)} \rrbracket &= -\frac{2}{\rho_e R^2} \frac{\partial \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{\pi C^2}{R^2 \rho_A |\bar{\Delta}|} \mathcal{L} \left( \frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right) \\ &\quad - u_r^{(1)} + \frac{C^2}{l R} \frac{\partial^2 \bar{P}^{(1)}}{\partial \varphi^2} \mathcal{P} \int_R^{R+\ell} \frac{dr}{\rho(C^2 - V_A^2)}. \end{aligned} \quad (2.5.127)$$

При выводе этого уравнения снова использовалось приближённое равенство  $C \approx C_k$ . Уравнения (2.5.121), (2.5.122) и (2.5.127) используются в следующем разделе для того, чтобы связать решения во внутренней ( $r \leq R$ ) и внешней ( $r \geq R + \ell$ ) областях.

2.5.3d. Сращивание решений во внутренней и внешней областях

В этом разделе выражения для скачков радиального смещения плазмы и возмущения полного давления поперёк кольцевой области используются для того, чтобы связать решения во внутренней и внешней областях. Для этого решения во внутренней и внешней областях используются чтобы получить альтернативные выражения для скачков  $u_r$  и  $P$ . Затем эти выражения сравниваются с выражениями для этих скачков определяемых уравнениями (2.5.121), (2.5.122) и (2.5.127).

Используя уравнения (2.5.40), (2.5.42), (2.5.69) и (2.5.71), получим в первом приближении

$$\llbracket u_{rm}^{(1)} \rrbracket = W_m(R + \ell)^{-|m|-1} - U_m R^{|m|-1}, \quad (2.5.128)$$

$$\llbracket P_m^{(1)} \rrbracket = \frac{\rho_e}{|m|} \frac{\partial^2 W_m}{\partial \tau^2} (R + \ell)^{-|m|} + \rho_i \frac{C^2 - V_{Ai}^2}{|m| C^2} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \tau^2} R^{|m|}. \quad (2.5.129)$$

Поскольку, в соответствии с уравнениям (2.5.121), левые части уравнений (2.5.128) и (2.5.129) равны нулю, из этих уравнений следует что

$$W_m = R^{2|m|} (1 + \ell/R)^{|m|+1} U_m, \quad (2.5.130)$$

$$C^2 = \frac{\rho_i V_{Ai}^2}{\rho_i + \rho_e (1 + \ell/R)} \approx C_k^2 \left( 1 - \frac{\rho_e (\ell/R)}{\rho_i + \rho_e} \right) = C_k^2 + O(\varepsilon). \quad (2.5.131)$$

С помощью этих результатов и уравнений (2.5.52), (2.5.54), (2.5.72) и (2.5.73) получим во втором приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \llbracket u_{rm}^{(2)} \rrbracket = & - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R^{|2k-m|-3} [\operatorname{sgn} k - \operatorname{sgn}(m-k)] \left[ m U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \right. \\ & \left. + k \frac{\partial}{\partial \tau} (U_k U_{m-k}) \right] + \frac{\partial \widetilde{W}_m}{\partial \tau} (R + \ell)^{-|m|-1} - \frac{\partial \widetilde{U}_m}{\partial \tau} R^{|m|-1}, \end{aligned} \quad (2.5.132)$$

$$\begin{aligned} \llbracket P_m^{(2)} \rrbracket = & - \frac{2C(\rho_i + \rho_e)}{|m|} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \zeta \partial \tau} R^{|m|} - \frac{\rho_e}{m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R^{|2k-m|-2} \\ & \times \{1 - \operatorname{sgn}[k(m-k)]\} \left[ m U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} + k \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_k U_{m-k}) \right] \\ & + \frac{\rho_e}{|m|} \frac{\partial^2 \widetilde{W}_m}{\partial \tau^2} (R + \ell)^{-|m|} + \rho_i \frac{C^2 - V_{Ai}^2}{|m| C^2} \frac{\partial^2 \widetilde{U}_m}{\partial \tau^2} R^{|m|}. \end{aligned} \quad (2.5.133)$$

При выводе этого уравнения использовалось приближённое равенство  $R + \ell \approx R$ .

Для того чтобы сравнить уравнения (2.5.132) и (2.5.133) с уравнениями (2.5.122) и (2.5.127), необходимо выразить через  $U$  функции  $u_r^{(1)}$  и  $\bar{P}^{(1)}$  вычисленные в кольцевой области, которые присутствуют в правых частях уравнений (2.5.122) и (2.5.127). Поскольку обе эти функции не зависят от  $r$  в кольцевой области, они равны своим значениям при  $r = R$ . Таким образом, коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $u_r^{(1)}$  даются уравнением (2.5.40), а из уравнения (2.5.42) следует

$$\bar{P}_m^{(1)} = -\rho_i \frac{C^2 - V_{Ai}^2}{|m|C^2} R^{|m|} U_m. \quad (2.5.134)$$

После этого сравнение уравнений (2.5.132) и (2.5.133) с уравнениями (2.5.122) и (2.5.127) даёт

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widetilde{W}_m}{\partial \tau} (R + \ell)^{-|m|} - \frac{\partial \widetilde{U}_m}{\partial \tau} R^{|m|} (1 + \ell/R) = -R \frac{\partial \psi_m}{\partial \tau} \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ m [\operatorname{sgn} k - \operatorname{sgn}(m - k)] \psi_{m-k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \right. \\ & \left. + k [\operatorname{sgn} k + \operatorname{sgn}(m - k)] \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi_k \psi_{m-k}) \right\} \\ & - \frac{\rho_e R C^2 |m|}{l} \frac{\partial \psi_m}{\partial \tau} \mathcal{P} \int_R^{R+\ell} \frac{dr}{\rho(C^2 - V_A^2)} + \frac{\pi \rho_e C^2 |m|}{\rho_A |\bar{\Delta}|} \mathcal{L} \left( \frac{\partial \psi_m}{\partial \tau} \right), \end{aligned} \quad (2.5.135)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \widetilde{W}_m}{\partial \tau^2} (R + \ell)^{-|m|} - \frac{\partial^2 \widetilde{U}_m}{\partial \tau^2} R^{|m|} (1 + \ell/R) = \frac{2RC(\rho_i + \rho_e)}{\rho_e} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \zeta \partial \tau} \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ |m| \{1 + \operatorname{sgn}[k(m - k)]\} \psi_k \frac{\partial^2 \psi_{m-k}}{\partial \tau^2} \right. \\ & \left. + k \operatorname{sgn} m \{1 - \operatorname{sgn}[k(m - k)]\} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\psi_k \psi_{m-k}) \right\} \\ & - \frac{|m|R}{\rho_e l C^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \tau^2} \int_R^{R+\ell} \rho(C^2 - V_A^2) dr, \end{aligned} \quad (2.5.136)$$

где  $\psi_m = R^{|m|-1} U_m$ . Из уравнения (2.5.40) следует, что  $\varepsilon \psi(\zeta, \tau, \varphi) = \varepsilon u_r^{(1)}(R, \zeta, \tau, \varphi)$ , т.е.  $\psi$  определяет радиальное смещение поверхности магнитной трубки в первом приближении. При выводе уравнения (2.5.136) использовалось уравнение (2.5.131).



Дифференцируя уравнение (2.5.135) по  $\tau$  и подставляя результат в уравнение (2.5.136), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{2RC(\rho_i + \rho_e)}{\rho_e} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \zeta \partial \tau} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ [\operatorname{sgn} k + \operatorname{sgn}(m-k)] \right. \\
& \times \left[ |m| \psi_k \frac{\partial^2 \psi_{m-k}}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} k - k \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\psi_k \psi_{m-k}) \right] \\
& - [\operatorname{sgn} k - \operatorname{sgn}(m-k)] \left[ m \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \psi_{m-k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \right) \right. \\
& \left. - |k| \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\psi_k \psi_{m-k}) \operatorname{sgn} m \right] \left. \right\} + R \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \tau^2} - \frac{\pi \rho_e C^2 |m|}{\rho_A |\bar{\Delta}|} \mathcal{L} \left( \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \tau^2} \right) \\
& + \frac{|m|R}{\ell} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \tau^2} \mathcal{P} \int_R^{R+\ell} \left[ \frac{\rho_e C^2}{\rho(C^2 - V_A^2)} - \frac{\rho(C^2 - V_A^2)}{\rho_e C^2} \right] dr = 0.
\end{aligned} \tag{2.5.137}$$

В Дополнении С показано как упростить сумму в этом уравнении. С помощью уравнения (С.12) перепишем уравнение (2.5.137) в виде

$$\begin{aligned}
& C \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \zeta \partial \tau} + \frac{q}{2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \tau^2} + \frac{qm}{R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ (\operatorname{sgn} m - \operatorname{sgn} k) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \psi_{m-k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_{m-k}}{\partial \tau} \operatorname{sgn} k \right] + \frac{q|m|}{\ell} \left[ \beta \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \tau^2} - \gamma \mathcal{L} \left( \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial \tau^2} \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.5.138}$$

где

$$\begin{aligned}
& q = \frac{\rho_e}{\rho_i + \rho_e}, \quad \gamma = \frac{\pi \rho_e C^2}{2 \rho_A |\Delta|}, \quad \Delta = \frac{\bar{\Delta}}{\varepsilon} = -\frac{dV_A^2}{dr}, \\
& \beta = \frac{1}{2} \mathcal{P} \int_R^{R+\ell} \left[ \frac{\rho_e C^2}{\rho(C^2 - V_A^2)} - \frac{\rho(C^2 - V_A^2)}{\rho_e C^2} \right] dr.
\end{aligned} \tag{2.5.139}$$

Введём преобразование Гильберта по  $\varphi$  (см. напр. Titchmarsh 1948, Papoulis 1962, Bracewell 1999)

$$\mathcal{H}(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\psi(\varphi') - \psi(\varphi)] \cot \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi'. \tag{2.5.140}$$

После этого, используя выражение для коэффициентов Фурье преобразования Гильберта (Titchmarsh 1948),

$$[\mathcal{H}(\psi)]_m = i\psi_m \operatorname{sgn} m, \tag{2.5.141}$$

и возвращаясь к первоначальным переменным, преобразуем уравне-

ние (2.5.138) к виду (напомним что  $\varepsilon = \ell/R$ )

$$\begin{aligned} C \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + \left(1 + \frac{\ell q}{2R}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{q}{R} \frac{\partial^3}{\partial \varphi \partial t^2} \mathcal{H}(\gamma \mathcal{L}(\psi) - \beta \psi) \\ = \frac{q}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathcal{H} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \psi \mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.142)$$

При выводе этого уравнения была сделана подстановка  $\psi = \varepsilon^{-1} \tilde{\psi}$ , а затем тильда была опущена.

Функция  $\psi(t, \varphi, z)$  определяет радиальное смещение границы трубки. Введём эйлеровы цилиндрические координаты  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{z}$ . Тогда в первом приближении по  $\varepsilon$  имеем  $\tilde{r} = r + u_r$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi + u_\varphi/r$ , и  $\tilde{z} = z + u_z$ . В частности,  $\tilde{r} = R + \psi(t, \varphi, z) + O(\varepsilon^2)$  на границе трубки. Поскольку  $u_r/R = O(\varepsilon)$ ,  $u_\varphi/R = O(\varepsilon)$ , и  $u_z/R = O(\varepsilon^2)$ , выражение для  $\tilde{r}$  на границе трубки может быть приведено к виду  $\tilde{r} = R + \psi(t, \tilde{\varphi}, \tilde{z}) + O(\varepsilon^2)$ . Таким образом,  $\psi$  также описывает форму возмущённой границы трубки в эйлеровых координатах в первом приближении по  $\varepsilon$ .

Линеаризуя уравнение (2.5.142) и полагая  $\psi = \exp[i(m\varphi - \omega + k)]$ , где  $\omega$  — действительная постоянная, получим дисперсионное уравнение

$$k = (1/C_0 - \beta|m|)\omega + i\gamma|m\omega|, \quad (2.5.143)$$

где  $C_0 = C_k[1 - \ell q/R + O(\ell^2/R^2)]$ . Как видим, волна распространяется от источника возмущений, расположенного при  $z = 0$  в положительном направлении оси  $z$  без дисперсии с фазовой скоростью близкой к скорости изгибной волны  $C_k$  (заметим что  $\beta = O(\ell/R)$ ). Имеется небольшая поправка пропорциональная  $\ell/R$  и зависящая от  $|m|$ . Присутствует также пространственное затухание описываемое мнимой частью  $k$ . Поскольку  $\gamma = O(\ell/R)$ , характерная длина затухания пропорциональна длине волны умноженной на  $R/\ell$ . Она также обратно пропорциональна  $|m|$ .

Затухание со временем неосесимметричных колебаний магнитной трубки было исследовано в работе Goossens et al. (1992). В частности, в этой работе было получено выражение для декремента  $\Gamma$  в приближении тонкой трубки. Если в этом выражении положить внешнее магнитное поле равным нулю, то оно принимает вид

$$\Gamma = \frac{\pi^2 \rho_e^2 C_k^3 |m|}{\rho_A |\Delta| R (\rho_i + \rho_e) L},$$

где  $L$  — длина волны. К моменту времени  $\Gamma^{-1}$  амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз. За это время волна пробегает расстояние  $C_k \Gamma^{-1}$ , так

что амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз на расстоянии  $C_k \Gamma^{-1}$  от источника возмущений. Следовательно, пространственный декремент равен  $\Gamma/C_k$ . Принимая во внимание, что  $|\omega| = 2\pi C_k/L$ , нетрудно проверить, что  $\Gamma/C_k = \gamma|m\omega|[1+O(\ell/R)]$ . Таким образом, результаты полученные в настоящем разделе хорошо согласуются с результатами полученными в работе Goossens et al. (1992).

Ruderman (1992a) вывел уравнение описывающее распространение неосесимметричных поверхностных волн по магнитной трубке с резкой границей (см. уравнение (2.29) в этой работе). В этой работе была также учтена слабая дисперсия волн связанная с конечностью радиуса трубки. Сравним уравнение полученное в работе Ruderman (1992a) с уравнением (2.5.142). Для этого, с одной стороны, пренебрежём членом описывающим дисперсию в уравнении (2.29) полученном в Ruderman (1992a), а с другой стороны, положим  $\ell \rightarrow 0$  в уравнении (2.5.142), так что  $\beta = \gamma = 0$ . Затем поменяем местами  $t$  и  $z$  в уравнении (2.5.142). Для этого преобразуем уравнение (2.5.142) к новым переменным,  $z' = ct$  и  $t' = z/c$ . После этого два уравнения, одно – уравнение (2.29) полученное в работе Ruderman (1992a), другое – трансформированное уравнение (2.5.142), в точности совпадают.

Другое интересное сравнение можно сделать если рассмотреть частные решения уравнения (2.5.142) в виде винтовых волн. Эти решения зависят от двух переменных,  $z$  и  $\theta = \varphi - \Omega t$ , где  $\Omega$  – действительная постоянная. После этого уравнение (2.5.142) сводится к уравнению содержащему только две независимые переменные:  $z$  и  $\theta$ . С помощью простого изменения масштаба переменных, это уравнение сводится к уравнению, описывающему распространение длинных нелинейных поверхностных волн по слою в котором изменяется альвеновская скорость, полученному в работе Ruderman and Goossens (1993), а также к уравнению, описывающему распространение длинных нелинейных поверхностных волн по магнитному разрыву в плазме с сильно анизотропной вязкостью, полученному в работе Ruderman (1992b).

Обсудим теперь качественно влияние нелинейности на распространение изгибных волн по магнитной трубке. Если изгибная волна с частотой  $\omega_0$  возбуждается при  $z = 0$ , то, по мере её распространения в положительном направлении оси  $z$ , квадратичная нелинейность присутствующая в уравнении (2.5.142) генерирует более высокие гармоники по  $\varphi$  и  $\tau$ . Эти гармоники являются желобковыми волнами ( $|m| > 1$ ) с частотой кратной

$\omega_0$ . Поскольку, в соответствии с уравнением (2.5.143), скорость затухания пропорциональна  $|m|$  и  $|\omega|$ , этот эффект приводит к ускорению затухания волны. Более подробно этот процесс исследуется в следующем разделе численно.

В Дополнении D показано, что поток волновой энергии проинтегрированный по времени равен  $CR^2(\rho_i + \rho_e)E$ , где  $E$  определяется выражением

$$E = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left[ \mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \int_0^\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} d\varphi' \right] d\varphi. \quad (2.5.144)$$

В Дополнении D также показано, что  $E > 0$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{dE}{dz} = - \frac{q\gamma}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \mathcal{L} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\varphi, \quad (2.5.145)$$

и правая часть этого уравнения отрицательна. Как видим,  $E$  — сохраняющаяся величина в том случае, когда резонансное затухание волны отсутствует ( $\gamma = 0$ ). Также видно, что поток волновой энергии уменьшается вследствие резонансного поглощения.

#### 2.5.4. Результаты численных расчётов

В этом разделе представлены результаты численного исследования влияния нелинейности на затухание волн в магнитной трубке. Для упрощения анализа предполагается, что  $\rho(C^2 - V_A^2)$  — симметричная функция. Это означает, что  $r_A = R + \ell/2$  и  $\rho(C^2 - V_A^2)$  — нечётная функция переменной  $r - r_A$ . Тогда  $\beta = 0$ .

Уравнение (2.5.142) — сложное интегро-дифференциальное уравнение. Его численное решение является довольно трудной задачей. Эта задача существенно упрощается, если ограничиться решениями периодически по времени, поскольку в этом случае уравнение (2.5.142) может быть сведено к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система может быть затем обрезана и легко решена численно, например, с помощью метода Рунге-Кутты.

К сожалению, в общем случае этот подход не работает. Причина этого следующая. В разделе 2.5.3 было предположено, что возмущение трубки начинается в некоторый конечный момент времени, а до этого она находится в покое. Это, в частности, означает что  $\psi = 0$  при  $t < t_0$ , где  $t_0$  — некоторая постоянная. Очевидно, никакая периодическая функция не может удовлетворять этому условию.

Условие что  $u_r^{(1)} = 0$  при  $\tau \rightarrow -\infty$  использовалось в разделе 2.5.3 для того, чтобы исключить две произвольные функции  $r$  и  $\zeta$ , которые появляются после двойного интегрирования уравнения (2.5.39) по  $\tau$ , и получить решение этого уравнения определяемое уравнением (2.5.40). Тот же самый результат можно получить, если, вместо условия  $u_r^{(1)} = 0$  при  $\tau \rightarrow -\infty$ , использовать условие, что  $u_r^{(1)}$  – периодическая функция  $\tau$  с нулевым средним значением за период. Однако это условие несовместно с уравнением (2.5.142). Действительно, условие что  $u_r^{(1)}$  – периодическая функция  $\tau$  означает, что  $\psi$  – периодическая функция  $t$ . Но после этого получаем, что средние значения за период всех членов в уравнении (2.5.142) кроме последнего равны нулю, в то время как среднее значение последнего члена отлично от нуля.

Однако имеется одно исключение. Это случай винтовых возмущений. И так, будем искать решения уравнения (2.5.142), которые зависят не в отдельности от  $t$  и  $\varphi$ , а от их линейной комбинации  $\varphi - ht$ . Очевидно  $\psi$  должна быть периодической функцией  $\varphi - ht$  с периодом  $2\pi$ . К тому же, предположим, что среднее значение  $\psi$  по отношению к  $\varphi - ht$  за период равно нулю.

Волна возбуждается при  $z = 0$  гармоническим источником

$$\psi = A \sin(\varphi - ht) \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (2.5.146)$$

Для численного решения уравнения (2.5.142) введём новые безразмерные переменные

$$\Theta = \varphi - ht + \frac{zh}{C} \left( 1 + \frac{\ell q}{2R} \right), \quad Z = \frac{q\gamma h z}{RC}, \quad \Psi = \frac{\psi}{A}. \quad (2.5.147)$$

Преобразовывая уравнение (2.5.142) к новым переменным, интегрируя полученное уравнение один раз по  $\Theta$  и используя условие, что среднее значение  $\Psi$  за период равно нулю, получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta^2} - N \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[ \mathcal{H} \left( \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right) - \mathcal{H} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right) \right] - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \mathcal{H} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right) \right\}, \quad (2.5.148)$$

где параметр нелинейности задаётся выражением  $N = A/\gamma$ . При выводе уравнения (2.5.148) использовался тот факт, что

$$\mathcal{H}(\Psi) = -\mathcal{L}(\Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Psi(\Theta') - \Psi(\Theta)] \cot \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta', \quad (2.5.149)$$

и тождество (D.7). С помощью простого изменения масштаба переменных это уравнение может быть сведено к уравнению описывающему распространение нелинейных поверхностных волн по магнитному разрыву (Ruderman and Goossens 1993, Ruderman 1992b). Нетрудно видеть, что условие  $\Psi$  – периодическая функция  $\Theta$  с нулевым средним значением за период совместно с уравнением (2.5.148). Действительно, используя тождество (D.14) получаем, что среднее значение правой части уравнения (2.5.148) равно нулю. Это означает что, если среднее значение  $\Psi$  равно нулю при  $Z = 0$ , то оно остаётся равным нулю при  $Z > 0$ .

Для решения уравнения (2.5.148) раскладываем  $\Psi$  в ряд Фурье по  $\Theta$ . Из формул (Titchmarsh 1948)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\sin m\Theta) &= \operatorname{sgn} m \cos m\Theta, \\ \mathcal{H}(\cos m\Theta) &= -\operatorname{sgn} m \sin m\Theta,\end{aligned}\tag{2.5.150}$$

следует, что преобразование Гильберта чётной функции является нечётной функцией и наоборот. Отсюда если решение уравнения (2.5.148) является нечётной функцией при  $Z = 0$ , то оно остаётся нечётной функцией при  $Z > 0$ . Таким образом, разложение в ряд Фурье функции  $\Psi$  можно записать в виде

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(Z) \sin m\Theta.\tag{2.5.151}$$

Система уравнений для коэффициентов Фурье была выведена в работе Ruderman and Goossens (1993). В обозначениях, используемых в диссертации, она принимает вид

$$\frac{d\Psi_m}{dZ} = N \left\{ m \sum_{n=1}^{\infty} n \Psi_n \Psi_{m+n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} n(m-n) \Psi_n \Psi_{m-n} \right\} - m^2 \Psi_m.\tag{2.5.152}$$

Выражение (2.5.152) является бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Из уравнения (2.5.146) следует, что её решение должно удовлетворять начальным условиям при  $Z = 0$

$$\Psi_1 = 1, \quad \Psi_m = 0 \quad \text{для } m > 1.\tag{2.5.153}$$

Для численного решения системы (2.5.152) с начальными условиями (2.5.153) разложение (2.5.151) обрезалось и полагалось  $\Psi_m = 0$  при  $m > M$ . Таким образом система (2.5.152) сводилась к системе состоящей

из  $M$  обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем решалась численно.

Преобразуем выражение (2.5.144) для величины  $E$  пропорциональной потоку волновой энергии проинтегрированному по времени. Поскольку теперь  $\psi$  — периодическая функция  $t$ , пределы интегрирования по  $t$  должны быть равны 0 и  $2\pi/h$ . С помощью уравнений (2.5.150) и (2.5.151) получим

$$E = 2\pi^2 A^2 h \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \sum_{m=1}^{\infty} m \Psi_m^2. \quad (2.5.154)$$

Уравнение (2.5.145) сводится к

$$\frac{d\mathcal{E}}{dZ} = - \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \Psi_m^2. \quad (2.5.155)$$

Это уравнение использовалось для проверки точности численного решения уравнения (2.5.152). Для этого  $\mathcal{E}$  сначала вычислялось с использованием решения уравнения (2.5.152), а затем с помощью решения уравнения (2.5.155). После этого результаты сравнивались.

На Рис. 2.5.2 показана зависимость величины  $\mathcal{E}$  от безразмерного расстояния  $Z$  для различных значений параметра нелинейности  $N$ . При  $N = 0$ , т.е. в линейном приближении,  $\mathcal{E}$  убывает экспоненциально, так что  $\ln \mathcal{E}$  является линейной функцией  $Z$ . Этот результат полностью согласуется с линейной теорией резонансного затухания волн. На Рис. 2.5.2 ясно видно, что увеличение  $N$  приводит к ускорению диссипации волновой энергии. Это интуитивно ожидаемый результат. Нелинейность создаёт поток энергии от фундаментальной гармоники к более высоким гармоникам, которые затухают быстрее. Чем больше параметр нелинейности  $N$ , тем эффективнее передача энергии.

Здесь необходимо сделать одно замечание. При выводе нелинейного уравнения, описывающего неосесимметричные волны, использовалось длинноволновое приближение, которое предполагает, что рассматриваются только возмущения с характерным пространственным масштабом много большим радиуса магнитной трубки. Нелинейная генерация более высоких гармоник приводит к укрупнению волны и, соответственно, к уменьшению пространственного масштаба. Чем больше  $N$ , тем меньше пространственный масштаб получающийся в результате укрупнения. Это означает, что можно рассматривать только относительно небольшие значения параметра

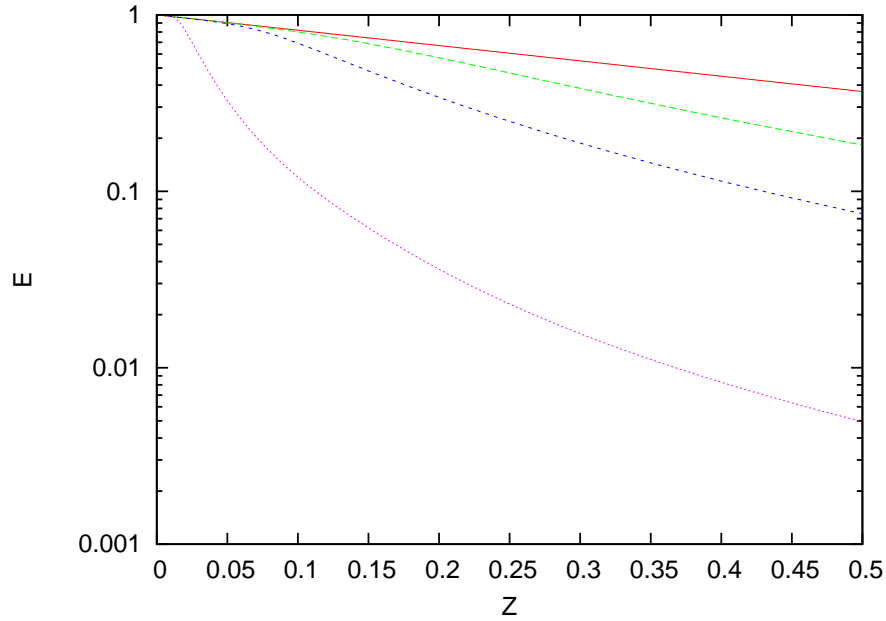


Рис. 2.5.2. Зависимость полного безразмерного потока энергии  $\mathcal{E}$  от безразмерного расстояния  $Z$  для различных значений параметра нелинейности  $N$ . Красная, зелёная, синяя и лиловая кривые соответствуют  $N$  равному 0, 5, 10 и 50.

$N$ , в то время как теория становится несправедливой при бóльших значениях  $N$ . Эта ситуация является типичной для всех нелинейных теорий, использующих длинноволновое приближение. Например, теория мелкой воды описывающая распространение длинных волн по поверхности воды перестаёт быть справедливой когда параметр нелинейности, в этом случае характеризующий отношение величины нелинейности к величине дисперсии, становится большим.

В соответствии с уравнением (2.5.154) безразмерный поток энергии  $\mathcal{E}$  равен сумме потоков энергии индивидуальных гармоник, причём безразмерный поток энергии  $m$ -ой гармоники равен  $m\Psi_m^2$ . На Рис. 2.5.3, 2.5.4 и 2.5.5 показана зависимость потоков энергии индивидуальных гармоник от  $Z$ , соответственно, при  $N = 5, 10$  и  $50$ . Видно, что при любом  $Z$  потоки энергии обертонов много меньше потока энергии фундаментальной гармоники даже при довольно большом значении параметра нелинейности  $N = 50$ .

Внутренний радиус невозмущённой трубки равен  $R$ . Возьмём точку  $M$  на невозмущённой границе соответствующую азимутальному углу  $\varphi$ .



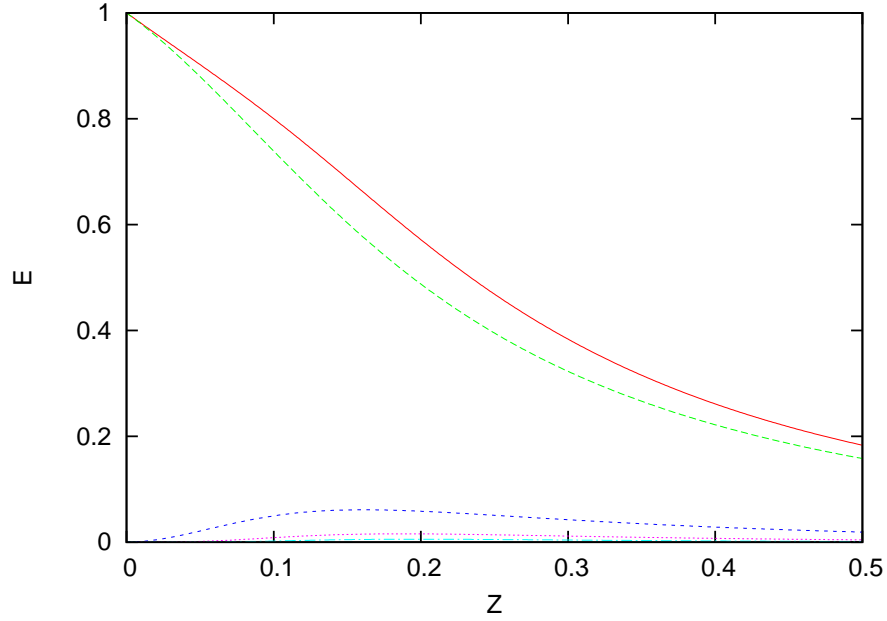


Рис. 2.5.3. Зависимость полного безразмерного потока энергии  $\mathcal{E}$  (красная кривая) и безразмерных потоков энергии первых четырёх гармоник (зелёная, синяя, лиловая и голубая кривые) от безразмерного расстояния  $Z$  при  $N = 5$ .

Вектор, определяющий её положение, равен  $R\mathbf{e}_r$ . В первом приближении по  $\varepsilon$  смещение точки на границе трубки в радиальном направлении равно  $A\Psi$ , в то время как, в соответствии с уравнениями (2.5.40), (2.5.41) и (2.5.141), смещение в азимутальном направлении равно  $A\mathcal{H}(\Psi)$ . Таким образом, вектор смещения точки  $M$  равен

$$A\Psi\mathbf{e}_r + A\mathcal{H}(\Psi)\mathbf{e}_\varphi,$$

так что вектор, определяющий положение точки  $M$  в возмущённом состоянии, равен

$$R\mathbf{e}_r + A\Psi\mathbf{e}_r + A\mathcal{H}(\Psi)\mathbf{e}_\varphi.$$

В соответствии с этим декартовы координаты точки  $M$  равны

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R \cos \varphi + A\Psi \cos \varphi - A\mathcal{H}(\Psi) \sin \varphi, \\ y(\varphi) &= R \sin \varphi + A\Psi \sin \varphi + A\mathcal{H}(\Psi) \cos \varphi. \end{aligned} \tag{2.5.156}$$

Эти уравнения задают поперечное сечение возмущённой границы плоскостью  $Z = \text{const}$  в параметрическом виде с параметром  $\varphi$ . С помощью урав-

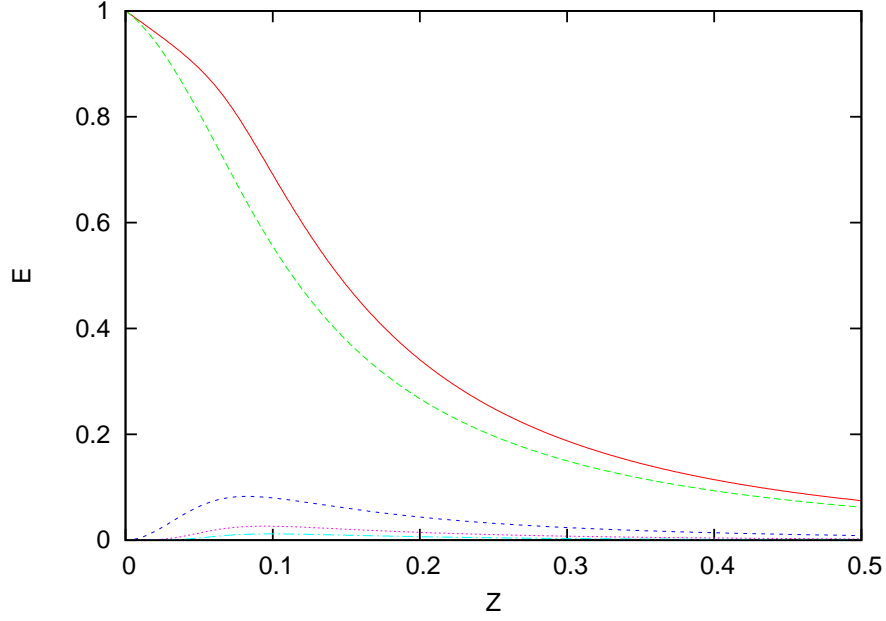


Рис. 2.5.4. То же что и на Рис. 2.5.3, но при  $N = 10$ .

нений (2.5.150) и (2.5.151) перепишем уравнения (2.5.156) в виде

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R \cos \varphi + A \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(Z) \sin(m\Theta - \varphi), \\ y(\varphi) &= R \sin \varphi + A \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(Z) \cos(m\Theta - \varphi). \end{aligned} \quad (2.5.157)$$

Поскольку  $\Theta$  зависит от  $t$ , форма поперечного сечения возмущённой границы трубки плоскостью  $Z = \text{const}$  изменяется со временем. Однако от зависимости от времени можно избавиться. Для этого введём новые декартовы координаты

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha_0 + y \sin \alpha_0, \\ y' &= -x \sin \alpha_0 + y \cos \alpha_0, \end{aligned} \quad (2.5.158)$$

где

$$\alpha_0 = ht - \frac{zh}{C} \left( 1 + \frac{lq}{2R} \right).$$

При фиксированном  $Z$  новая координатная система вращается относительно старой с угловой скоростью  $h$ . В новых переменных уравнения (2.5.157)

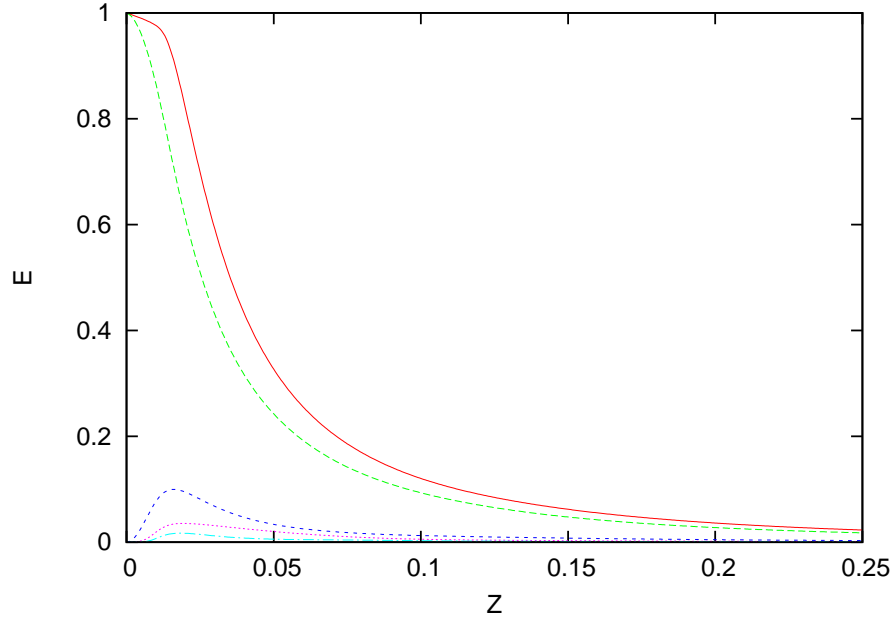


Рис. 2.5.5. То же что и на Рис. 2.5.3, но при  $N = 50$ .

преобразуются к виду

$$\begin{aligned} x' &= R \cos \Theta + A \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{m+1}(Z) \sin(m\Theta), \\ y' &= R \sin \Theta + A \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{m+1}(Z) \cos(m\Theta). \end{aligned} \quad (2.5.159)$$

Эти уравнения определяют сечение возмущённой границы плоскостью  $Z = \text{const}$  как параметрическую кривую с параметром  $\Theta$ . Как видим, теперь форма этой кривой не зависит от времени. На Рис. 2.5.6 показано сечение возмущённой границы плоскостью  $Z = \text{const}$  при  $N = 10$ ,  $A/R = 0.5$  и шести различных значений  $Z_0$ . Заметим, что уравнение (2.5.142) было выведено в предположении малой амплитуды возмущений. В частности, это означает что  $A/R \ll 1$ . В остальном параметр  $A/R$  может быть выбран произвольно поскольку решение безразмерного уравнения (2.5.148) содержит только один безразмерный параметр  $N$  и не зависит от  $A/R$ . При построении Рис. 2.5.6 было специально выбрано слишком большое значение параметра  $A/R$  для того, чтобы получить более выраженную деформацию границы.

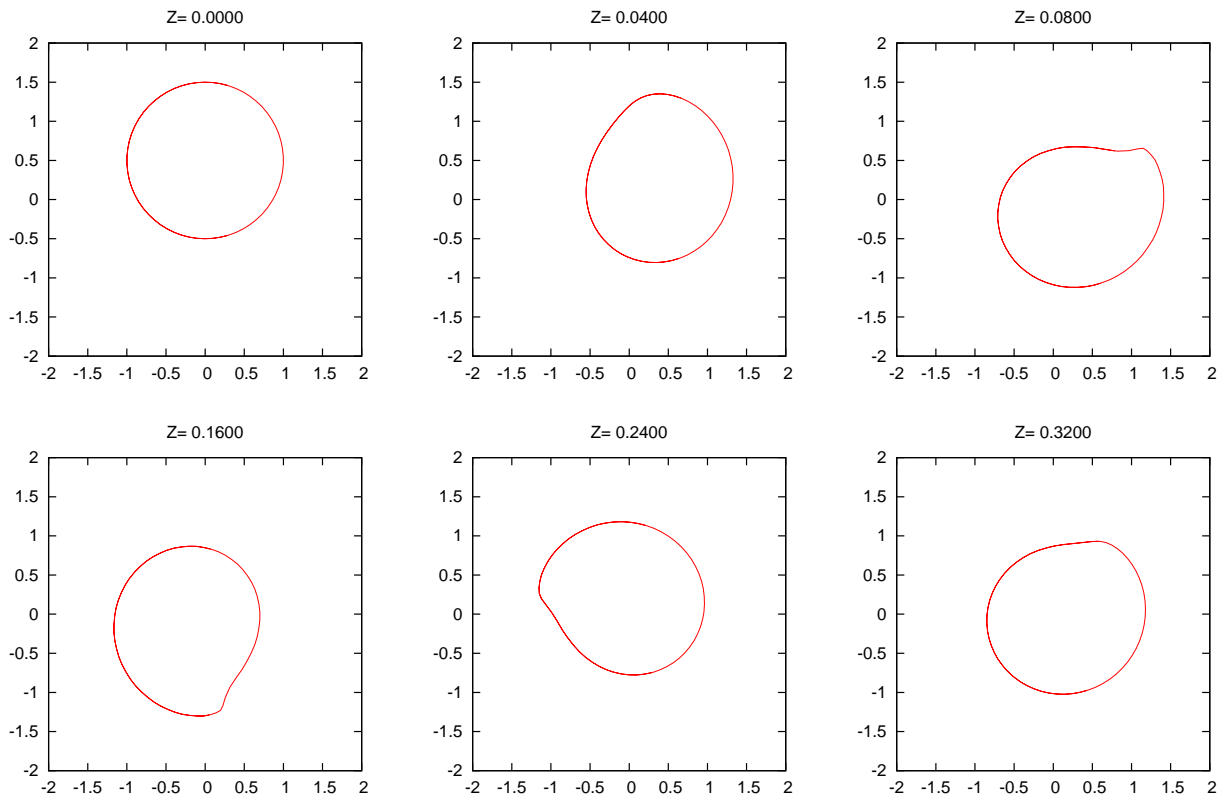


Рис. 2.5.6. Деформация границы трубки при  $N = 10$  и  $A/R = 0.5$ . Другие параметры подобраны так что винтовая волна делает один оборот вокруг оси на расстоянии  $Z = 0.25$ . Различные картинки соответствуют разным значениям  $Z$ .

### 2.5.5. Выводы

В этой главе представлены результаты исследования распространения неосесимметричных нелинейных волн по магнитной трубке в несжимаемой плазме. Предполагалось, что вне трубки магнитное поле отсутствует и плазма однородна, а внутри магнитное поле параллельно оси трубки. Трубка состоит из внутренней части и окружающей её кольцевой области. Во внутренней части плотность плазмы и магнитное поле однородны. В кольцевой области магнитное поле убывает до нуля, а плотность плазмы уменьшается от её величины во внутренней области до её величины вне трубки. Предполагалось, что альвеновская скорость является монотонно убывающей функцией в кольцевой области.

Предполагалось также, что безразмерная амплитуда волны мала и может использоваться в качестве малого параметра в асимптотической теории которая использовалась для вывода нелинейного уравнения опи-

сывающего распространение вдоль трубки волн возбуждаемых внешним источником возмущений расположенным у основания трубки (см. уравнение (2.5.142)). Фазовая скорость волн близка к изгибной скорости  $C_k$ . Внутри кольцевой области находится цилиндрическая поверхность где локальная Альфвеновская скорость равна фазовой скорости волны. В окрестности этой поверхности имеет место эффективная передача волновой энергии от глобальной волны к локальным Альфвеновским колебаниям, т.е. происходит резонансное поглощение энергии глобальной волны.

Частный класс решений нелинейного уравнения в виде винтовых волн исследован численно. Показано что нелинейность обеспечивает передачу энергии от фундаментальной волновой моды к обертонам, что приводит к усилению резонансного поглощения и, как следствие, к ускорению затухания волны. Нелинейность также приводит к деформации границы трубки связанным с генерацией желобковых волновых мод.

### 3. Стоячие изгибные волны в магнитных трубках

#### 3.1. Введение

Как уже отмечалось ранее, поперечные колебания корональных петель впервые наблюдались на борту TRACE (Nakariakov et al. 1999 и Aschwanden et al. 1999). С тех пор эти колебания наблюдались достаточно часто на космических аппаратах (Aschwanden 2009). Поперечные колебания также наблюдались с помощью SOT (Solar Optical Telescope) на борту Hinode в магнитных волокнах протуберанцев (Okamoto et al. 2007).

Хотя изгибные колебания магнитных трубок в солнечной атмосфере интересны сами по себе, их основное значение связано с тем, что они являются одним из наиболее важных инструментов новой и быстро развивающейся ветви солнечной физики — Корональной сейсмологии. Основные идеи корональной сейсмологии были предложены в работах Rosenberg (1970), Uchida (1970) и Roberts et al. (1984). Однако первое воплощение этих идей в жизнь было осуществлено только после того как изгибные колебания наблюдались на космических аппаратах. Nakariakov and Ofman (2001) использовали эти колебания для оценки магнитного поля в корональных петлях. Затем Andries et al. (2005) разработали метод оценки шкалы высот с помощью одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона поперечных колебаний магнитных петель. Этот метод был затем успешно применён для оценки шкалы высот в двух событиях где одновременно наблюдались две гармоники (Verwichte et al. 2004). После этого результаты одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона поперечных колебаний магнитных петель были представлены в ряде публикаций (De Moortel and Brady 2007; Van Doorsselaere et al. 2007; O’Shea et al. 2007; Verth et al. 2008; Aschwanden and Schrijver 2011; см. также обзорную статью J. Andries et al. 2009).

Изгибные колебания также наблюдались в волокнах протуберанцев (см. обзорные статьи Arregui and Ballester 2011; Arregui et al. 2012). Эти наблюдения использовались в сейсмологии протуберанцев аналогичной сейсмологии корональных петель (Terradas et al. 2008; Soler et al. 2010; Diaz et

al. 2010; Arregui and Ballester 2011; Arregui et al. 2012).

В этой части диссертации исследуются стоячие изгибные волны в магнитных трубках. В следующей главе изучается влияние изменения плотности и радиуса сечения трубки на собственные частоты колебаний. В главе 3.3 исследуются стоячие волны в магнитной трубке с эллиптическим сечением. В главе 3.4 изучается влияние скрученности магнитных линий вызванной присутствием продольного тока на стоячие волны. Глава 3.5 посвящена исследованию изгибных стоячих волн в неплоских магнитных трубках ось которых имеет как кривизну так и кручение. Основное внимание уделяется поляризации волн. В главе 3.6 рассматриваются изгибные колебания двух параллельных магнитных трубок. Глава 3.7 посвящена исследованию влияния продольного течения на изгибные колебания. В главах 3.8 и 3.9 изучается резонансное затухание изгибных колебаний магнитных трубок. В главах 3.10 и 3.11 теория резонансного затухания распространяется на затухание колебаний двух параллельных трубок и трубок с уменьшающейся температурой плазмы. Наконец, в главе 3.12 обсуждается применимость классической теории резонансного затухания к затуханию изгибных колебаний корональных магнитных петель и исследуется резонансное затухания с точки зрения теории преобразования волновых мод.

## **3.2. Влияние изменения плотности и радиуса поперечного сечения вдоль трубки на собственные частоты колебаний магнитных трубок**

В этой главе рассматриваются стоячие изгибные волны в магнитных трубках с плотностью и радиусом поперечного сечения изменяющимися вдоль трубки. Будут найдены частоты фундаментальной моды и первого обертона, а также отношение их частот. Обсуждается использование полученных результатов в корональной сейсмологии.

### **3.2.1. Постановка задачи**

Рассматривается невозмущённое состояние в виде прямой магнитной трубки длины  $L$ . В системе цилиндрических координат с осью  $z$  совпадающей с осью трубки поперечное сечение имеет форму круга с радиусом  $R(z)$ . Плотность плазмы равна  $\rho_i(z)$  внутри и  $\rho_e(z)$  вне трубки, причём  $\rho_i(z)/\rho_e(z) = \zeta = \text{const}$ . Предполагается что магнитные силовые линии

вморожены в плотную фотосферную плазму, так что концы трубки закреплены. Пример подобного невозмущённого состояния дан в Разделе 2.2.1а. В длинноволновом приближении изгибные волны описываются уравнением (2.2.67) с граничными условиями

$$\eta = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm L/2. \quad (3.2.1)$$

В дальнейшем рассмотрим два невозмущённых состояния. В обоих случаях магнитная трубка имеет форму полукруга и погружена в изотермическую атмосферу. В первом невозмущённом состоянии радиус сечения трубки изменяется вдоль трубки таким образом, что фазовая скорость распространения изгибных волн является квадратичной функцией  $z$ . Во втором радиус сечения трубки описывается гиперболической функцией.

### 3.2.2. Стоячие волны в трубке с квадратичным профилем скорости

В этом разделе исследуются стоячие волны в трубке с квадратичной зависимостью скорости от расстояния вдоль петли. Предполагается что петля имеет форму полукруга (см. Рис. 2.3.1). Поскольку трубка находится в изотермической атмосфере, плотность определяется формулой  $\rho_i = \rho_f \exp(-h/H)$ , где  $\rho_f$  — плотность у основания петли,  $h$  — высота в атмосфере и  $H$  — высота эквивалентной атмосферы. Величина  $h$  связана с координатой  $z$  вдоль петли формулой  $h = (L/\pi) \cos(\pi z/L)$ . Поэтому плотность в петле задаётся формулой

$$\rho_i = \rho_f \exp\left(-\frac{L}{\pi H} \cos \frac{\pi z}{L}\right). \quad (3.2.2)$$

Предполагается что фазовая скорость возрастает с высотой и является чётной функцией  $z$ . Таким образом, она определяется уравнением (2.3.14) с  $N = 0$ ,  $M < 0$  и  $\beta < 0$ . Её можно записать в виде

$$C_k(z) = \frac{C_f}{\chi - 1} \left( \chi - \frac{4z^2}{L^2} \right), \quad (3.2.3)$$

где  $C_f$  — фазовая скорость у основания петли, а  $\chi > 1$  — свободный параметр. Отношение фазовой скорости у основания петли и при её вершине равно  $1 - 1/\chi$ . Такое невозмущённое состояние исследовано в разделе 2.3.2. Показано что  $R(z)$  определяется формулой (2.3.21). Заметим только что в



разделе 2.3.2  $z \in [0, L]$ , а здесь  $z \in [-L/2, L/2]$ , так что в формуле (2.3.21) надо заменить  $z$  на  $z+L/2$ . Неравенство (2.3.25) определяющее расширение трубки от основания к вершине может быть переписано в виде

$$\chi > 1 + 8 \frac{H}{L}. \quad (3.2.4)$$

На Рис. 2.3.2, 2.3.3 и 2.3.4 показана зависимость радиуса сечения петли  $R$  от  $z$  при различных значениях отношения радиусов сечения в апексе и у основания и величин  $L/\pi H$  равных 0.5, 1 и 2, соответственно.

В разделе 2.3.1 было показано, что (2.2.67) с квадратичным профилем фазовой скорости сводится к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами. В обозначениях настоящего раздела оно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = - \frac{4\chi C_f^2 \Phi}{L^2(\chi - 1)^2}, \quad (3.2.5)$$

где

$$\Phi = \rho_i^{1/4} \eta, \quad \tau = \frac{L(\chi - 1)}{4\sqrt{\chi}C_f} \ln \frac{L\sqrt{\chi} + 2z}{L\sqrt{\chi} - 2z}. \quad (3.2.6)$$

Заметим, что  $\tau$  — нечётная функция  $z$ . Граничные условия (3.2.1) переписываются в виде

$$\Phi = 0 \quad \text{при} \quad \tau = \pm \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{L(\chi - 1)}{4\sqrt{\chi}C_f} \ln \frac{\sqrt{\chi} + 1}{\sqrt{\chi} - 1}. \quad (3.2.7)$$

Будем искать решения уравнения (3.2.5) в виде нормальной моды и положим  $\Phi \sim \exp(-i\omega t)$ . В результате уравнение (3.2.5) сводится к

$$\frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} + \left( \omega^2 - \frac{4\chi C_f^2}{L^2(\chi - 1)^2} \right) \Phi = 0. \quad (3.2.8)$$

Решения соответствующие симметричным и антисимметричным модам,  $\Phi_s$  и  $\Phi_a$ , записываются в виде

$$\Phi_s = \cos(\varpi\tau), \quad \Phi_a = \sin(\varpi\tau), \quad \varpi^2 = \omega^2 + \frac{4\chi C_f^2}{L^2(\chi - 1)^2}. \quad (3.2.9)$$

Нетрудно видеть, что частоты симметричных и антисимметричных мод определяются, соответственно, уравнениями  $\varpi\tau_0 = \pi(n - \frac{1}{2})$  и  $\varpi\tau_0 = \pi n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . Подставляя в эти уравнения выражения для  $\varpi$  и (3.2.7) для  $\tau_0$ , окончательно получим что частоты симметричных и антисимметричных мод определяются уравнениями

$$\omega_{sn}^2 = \frac{4\chi C_f^2}{L^2(\chi - 1)^2} \left\{ \frac{\pi^2(2n - 1)^2}{[\ln(\sqrt{\chi} + 1) - \ln(\sqrt{\chi} - 1)]^2} + 1 \right\}, \quad (3.2.10)$$

$$\omega_{an}^2 = \frac{4\chi C_f^2}{L^2(\chi - 1)^2} \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{[\ln(\sqrt{\chi} + 1) - \ln(\sqrt{\chi} - 1)]^2} + 1 \right\}. \quad (3.2.11)$$

В предельном случае при  $\chi \rightarrow \infty$ , получаем выражения для собственных частот колебаний однородной трубки,  $\omega_{sn} = \pi(2n - 1)C_f/L$  и  $\omega_{sn} = 2\pi n C_f/L$ . В корональной сейсмологии важное значение играет отношение частот первого обертона и фундаментальной моды. С помощью уравнений (3.2.10) и (3.2.11) получим для этого отношения

$$\frac{\omega_{a1}}{\omega_{s1}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 + [\ln(\sqrt{\chi} + 1) - \ln(\sqrt{\chi} - 1)]^2}{\pi^2 + [\ln(\sqrt{\chi} + 1) - \ln(\sqrt{\chi} - 1)]^2}}. \quad (3.2.12)$$

В одном из следующих разделов обсуждается использование этой формулы в корональной сейсмологии.

### 3.2.3. Стоячие волны в трубке с гиперболическим профилем радиуса поперечного сечения

В этом разделе рассматриваются волны в трубке длиной  $2L$ , радиус поперечного сечения которой задан уравнением (2.2.14) (см. Раздел 2.2.1а). Поскольку предполагается, что трубка имеет форму полукруга, погружена в изотермическую атмосферу, и температура плазмы одна и та же внутри и вне трубки, зависимость плотности плазмы,  $\rho_i$ , внутри трубки даётся формулой (3.2.2), а плотность плазмы вне трубки равна  $\rho_e = \rho_i/\zeta$ . С помощью уравнений (2.2.14), (3.2.2), и условия сохранения магнитного потока  $B(z)R^2(z) = \text{const}$ , получим

$$C_k = C_f \exp\left(-\frac{L}{2\pi H} \cos \frac{\pi z}{L}\right) \frac{\cosh(L/2l) - \lambda^2 + (\lambda^2 - 1) \cosh(z/l)}{\lambda^2 [\cosh(L/2l) - 1]}. \quad (3.2.13)$$

В случае когда изгибная скорость  $C_k$  определяется соотношением (3.2.13), волновое уравнение (2.2.67) может быть решено только численно. В расчётах принималось  $l = L/3$ . В этом случае уравнение (3.2.13) сводится к

$$C_k = \frac{C_f}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{L}{2\pi H} \cos \frac{\pi z}{L}\right) \{1 + 0.11(\lambda^2 - 1)[\cosh(6z/L) - 1]\}. \quad (3.2.14)$$

Результаты численного решения используются в следующем разделе в приложении к корональной сейсмологии.

### 3.2.4. Определение параметров осциллирующих корональных петель по отношению частот первого обертона и фундаментальной моды

Наблюдательные данные полученные аппаратом TRACE были впервые использованы в работе Nakariakov and Ofman (2001). Эти авторы получили оценку интенсивности магнитного поля в корональных петлях на основе наблюдения изгибных колебаний. Verwichte et al. (2004) впервые сообщили об одновременном наблюдении фундаментальной моды и первого обертона изгибных колебаний магнитных петель. Важным свойством этих колебаний было то, что отношение частоты первого обертона к частоте фундаментальной моды было меньше двух, т.е. меньше величины соответствующей колебаниям однородной тонкой трубки. Andries, Arregui and Goossens (2005a) предположили, что это отклонение отношения двух частот от двух связано с изменением плотности вдоль корональной петли. Они рассмотрели корональную петлю в форме полукруга с круговым сечением постоянного радиуса погружённую в изотермическую атмосферу и показали, что в этом случае отношение высоты петли,  $L/\pi$ , к шкале высот  $H$  однозначно определяется отношением частоты первого обертона к частоте фундаментальной моды изгибных колебаний. Verwichte et al. (2004) описали два случая наблюдений изгибных колебаний, в которых были одновременно определены частоты фундаментальной моды и первого обертона. В первом случае отношение частот было 1.81, а высота петли равнялась 70 Мм. Во втором случае эти величины были 1.64 и 73 Мм, соответственно. В результате Andries, Arregui and Goossens (2005a) получили оценку шкалы высот  $H = 73$  Мм в первом случае и  $H = 36$  Мм во втором.

Проблема зависимости шкалы высот от использованной модели была впервые исследована в работе Dymova and Ruderman (2006b). Эти авторы модифицировали модель, использованную в работе Andries, Arregui and Goossens (2005a) и предположили, что петля имеет форму дуги круга. Таким образом, появляется дополнительный параметр, отношение высоты петли к расстоянию между её основаниями. Для петли в форме полукруга этот параметр равен 1. В работе параметр варьировался от 0.115 до 2.18. Максимальное отклонение оценки шкалы высот от оценки найденной в предположении полукруглой формы петли составило 21.5%. Таким образом, Dymova and Ruderman (2006b) пришли к заключению что существует

достаточно умеренная зависимость оценки шкалы высот от предположения о форме петли.

Применим теперь для оценки шкалы высот результаты полученные в предыдущих разделах. Отношение частоты первого обертона к частоте фундаментальной моды даётся уравнением (3.2.12). Важной особенностью уравнения (3.2.12) является то, что отношение частот не зависит от отношения высоты петли к шкале высот и определяется параметром  $\chi$ , связанным с отношением фазовой скорости распространения изгибных волн в вершине и у основания петли. Поэтому на основании модели представленной в Разделе 3.2.2 нельзя определить шкалу высот. Можно только получить оценку сверху для отношения шкалы высот к высоте петли, которая следует из уравнения

$$\frac{\pi H}{L} < \frac{\pi(\chi - 1)}{8}. \quad (3.2.15)$$

Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007) использовали усовершенствованную технику обработки наблюдений изгибных колебаний корональных петель и получили для тех же событий, которые были рассмотрены в работе Verwichte et al. (2004) отношения частот 1.82 и 1.58. Соответствующие оценки для шкалы высот 68 Мм и 30 Мм. Кроме того, Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007) представили третий случай одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона, в котором отношение частот было равно 1.795, а высота петли 127.5 Мм. В результате авторы получили оценку 109 Мм для шкалы высот. Получим оценку шкалы высот для этих трёх событий с помощью уравнений (3.2.12) и (3.2.15). Из уравнения (3.2.12) следует, что

$$\chi = \coth^2 \frac{\pi^2 [4 - (\omega_{a1}/\omega_{s1})^2]}{2[(\omega_{a1}/\omega_{s1})^2 - 1]}. \quad (3.2.16)$$

Подставляя этот результат в уравнение (3.2.15) получим

$$\frac{\pi H}{L} < \frac{\pi}{8} \operatorname{cosech}^2 \frac{\pi^2 [4 - (\omega_{a1}/\omega_{s1})^2]}{2[(\omega_{a1}/\omega_{s1})^2 - 1]}. \quad (3.2.17)$$

При  $\omega_{a1}/\omega_{s1} = 1.84$  получим  $\pi H/L < 0.146$ , а для  $\omega_{a1}/\omega_{s1} = 1.56$  находим  $\pi H/L < 3.26 \times 10^{-5}$ . Наконец, при  $\omega_{a1}/\omega_{s1} = 1.795$  получим  $\pi H/L < 0.0529$ . Это означает, что в первом случае шкала высот не может превышать 10.2 Мм, во втором 0.0024 Мм, и 6.75 Мм в третьем. Конечно все эти результаты очень далеки от реальности поскольку типичное значение шкалы

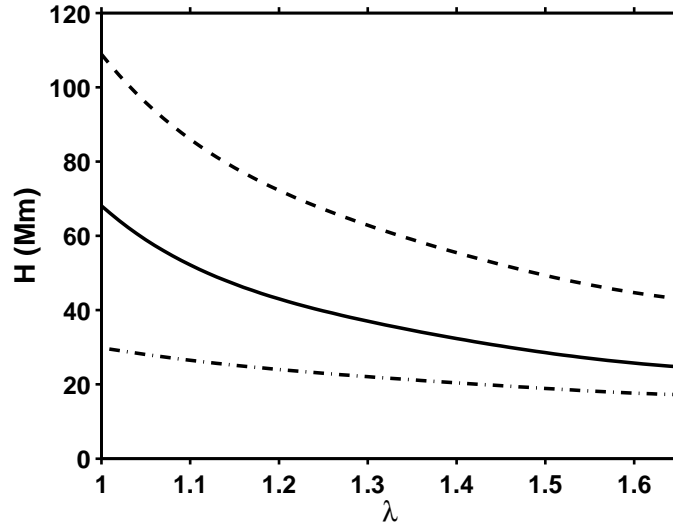


Рис. 3.2.1. Зависимость шкалы высот от параметра расширения трубки  $\lambda$  для трёх случаев одновременного наблюдения двух частот изгибных колебаний корональных петель описанных в работе Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007). Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые соответствуют отношениям частот равным 1.82, 1.795 и 1.58.

высот 50 Мм. Этот пример показывает, что оценка шкалы высот сильно зависит от используемой модели. В частности, некоторые модели могут приводить к абсурдным результатам.

Теперь применим для оценки шкалы высот результаты полученные в Разделе 3.2.3. Модель использованная в этом разделе является обобщением модели корональной петли использованной в работе Andries, Arregui and Goossens (2005a) и совпадает с ней когда степень расширения трубки равна единице ( $\lambda = 1$ ). Основной задачей являлось определение зависимости оценки шкалы высот от степени расширения трубки  $\lambda$ . Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007) использовали ту же модель что и Andries, Arregui and Goossens (2005a) и получили для трёх случаев одновременного наблюдения фундаментальной гармонике и первого обертона описанных в их статье оценки шкалы высот приведённые выше.

Для нахождения зависимости  $H$  от  $\lambda$  выражение для  $C_k/C_f$ , определяемое уравнением (3.2.14), подставлялось в уравнение (2.2.67). С помощью решения полученного уравнения с граничными условиями (3.2.1) находились частоты фундаментальной моды и первого обертона и вычислялось их отношение как функция  $H/L$  и  $\lambda$ . После этого определялась зависимость  $H/L$  от  $\lambda$  при заданном отношении частот. Результаты расчётов для трёх отношений частот приведённых в работе Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007) показаны на Рис. 3.2.1. Как видим, шкала высот  $H$  яв-

ляется монотонно убывающей функцией степени расширения трубки  $\lambda$ . В частности, в третьем случае одновременного наблюдения двух частот описанном в работе Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007)  $H$  уменьшается с величины 109 Мм полученной для нерасширяющейся трубки до величины 50 Мм типичной для солнечной короны если принять  $\lambda = 1.5$ .

### 3.2.5. Выводы

В этой главе рассмотрены колебания тонких магнитных трубок с плотностью и радиусом поперечного сечения изменяющимися вдоль трубки. Рассмотрены две модели. В обеих моделях предполагалось, что трубки имеют форму полукруга и погружены в изотермическую атмосферу, а температура плазмы одна и та же внутри и вне трубки. Поперечное сечение трубки было круговым. Предполагалось также, что плотность не меняется в направлениях перпендикулярных оси трубки внутри и вне трубки и имеет скачок на границе трубки. Влияние кривизны трубки на её изгибные колебания не учитывалось, так что форма трубки влияла только на изменение плотности вдоль её оси.

В первой модели радиус трубки изменялся таким образом, что фазовая скорость изгибных волн была квадратичной функцией расстояния вдоль оси трубки. В этом случае волновое уравнение с переменной фазовой скоростью сводилось к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами. В результате выражения для фундаментальной моды и обертонов частоты изгибных колебаний были найдены аналитически. Во второй модели зависимость радиуса трубки от координаты вдоль её оси описывалась гиперболической функцией. В этом случае частоты фундаментальной моды и обертонов могут быть найдены только численно.

Было рассмотрено приложение полученных результатов к корональной сейсмологии. Обсуждался метод определения шкалы высот по отношению частот первого обертона и фундаментальной моды найденному из наблюдений. В первой модели это отношение не зависит от шкалы высот, так что в этой модели можно получить только оценку шкалы высот сверху. Эта оценка была получена для трёх случаев одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона представленных в статье Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007). Эти оценки оказались абсурдными.

Вторая модель позволяет получить оценку шкалы высот по известному отношению частот первого обертона и фундаментальной моды. По сравнению с моделью использованной в работе Andries, Arregui and Goossens (2005a) в этой модели появляется дополнительный параметр — степень расширения петли равная отношению радиусов сечения в вершине и у основания петли. Показано что, при заданном отношении частот первого обертона и фундаментальной моды, оценка шкалы высот убывает при увеличении степени расширения петли. В частности, показано что оценка шкалы высот в 109 Мм полученная для третьего случая одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона представленных в статье Van Doorselaere, Nakariakov and Verwichte (2007) уменьшается до типичного значения 50 Мм при увеличении степени расширения петли от 1 до 1.5.

### **3.3. Влияние формы поперечного сечения на собственные частоты колебаний магнитных трубок**

В предыдущем главе исследовано влияние изменения плотности и радиуса сечения трубки на частоты собственных мод изгибных колебаний магнитной трубки. При этом одним из основных предположений было то что поперечное сечение трубки является кругом. Однако в настоящее время разрешающая способность инструментов, используемых для наблюдения корональных петель, не достаточна для того, чтобы сделать какие-либо заключения о форме сечения корональных магнитных петель. Таким образом, представляется важным исследовать влияние формы сечения магнитной трубки на собственные моды её изгибных колебаний. В данной главе исследуются изгибные колебания магнитных трубок с эллиптическим сечением.

#### **3.3.1. Изгибные колебания однородной магнитной трубки с эллиптическим поперечным сечением**

Изгибные колебания однородной магнитной трубки с эллиптическим поперечным сечением были исследованы в работе Ruderman (2003). В дальнейшем следуем анализу представленному в этой работе.

### 3.3.1a. Основные уравнения и невозмущённое состояние

Как и в предыдущей главе используем приближение холодной плазмы и описываем её движение уравнениями (1.2.10) и (1.2.12) с  $p' = p_0 = 0$  и  $\nu_v = \nu_m = 0$ . Предполагается что невозмущённое магнитное поле постоянно, поэтому уравнения (1.2.10) и (1.2.12) сводятся к

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{b} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0). \quad (3.3.1)$$

Напомним что скорость  $\mathbf{v}$  и смещение плазмы  $\boldsymbol{\xi}$  связаны уравнением  $\mathbf{v} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$ . Введём декартовы координаты  $x, y, z$  с осью  $z$  параллельной  $\mathbf{B}_0$ . Исключая из системы уравнений (1.2.10) компоненту магнитного поля перпендикулярную к  $\mathbf{B}_0$  и вводя возмущение магнитного давления  $P = \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}_0 / \mu_0$  преобразуем эту систему к виду

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho_0} \nabla_{\perp} P, \quad P = -\rho_0 V_A^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (3.3.2)$$

где  $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_z \partial / \partial z$  и  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор оси  $z$ .

В невозмущённом состоянии имеется прямая магнитная трубка длины  $L$ . Поперечное сечение трубки не меняется вдоль трубки и является эллипсом с большой полуосью  $a$  и малой полуосью  $b$ . Введём эллиптические координаты  $s$  и  $\varphi$  связанные с декартовыми координатами уравнениями

$$x = \sigma \cosh s \cos \varphi, \quad y = \sigma \sinh s \sin \varphi, \quad (3.3.3)$$

где  $\sigma$  — константа с размерностью длины. Уравнение границы трубки имеет вид  $s = s_0$ . Длины полуосей трубки связаны с константами  $s_0$  и  $\sigma$  уравнениями

$$a = \sigma \cosh s_0, \quad b = \sigma \sinh s_0. \quad (3.3.4)$$

Эксцентриситет эллиптического сечения равен  $\varepsilon = 1 / \cosh s_0$ . Эллиптические координаты показаны на Рис. 3.3.1. Предполагается что плотность постоянна внутри и вне трубки и равна, соответственно,  $\rho_i$  и  $\rho_e$ , причём  $\rho_e < \rho_i$ .

На границе трубки должно выполняться условие непрерывности нормальной компоненты смещения плазмы и возмущения полного давления. Поскольку граница трубки является одной из координатных линий  $s = \text{const}$ , нормальная компонента смещения равна  $\xi_s$ . В результате имеем

$$[[\xi_s]] = 0, \quad [[P]] = 0 \quad \text{при} \quad s = s_0. \quad (3.3.5)$$



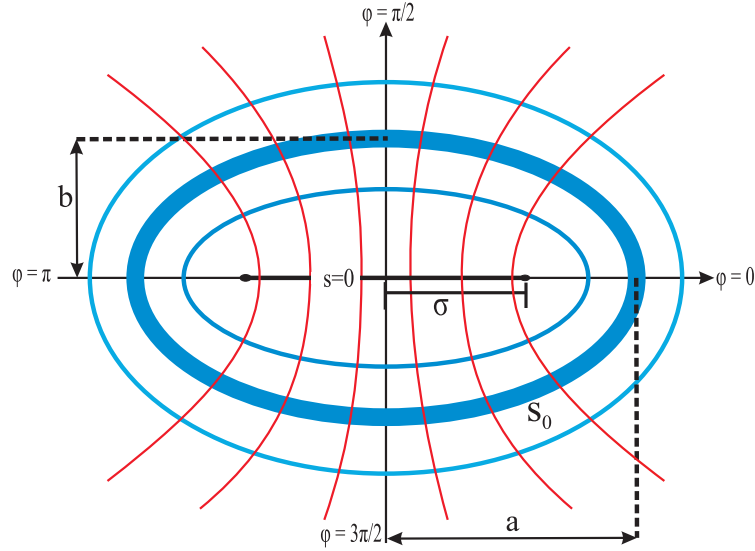


Рис. 3.3.1. Эллиптические координаты. Эллипсы соответствуют координатным линиям  $s = \text{const}$ , а гиперболы — координатным линиям  $\varphi = \text{const}$ . Толстая голубая кривая показывает границу магнитной трубки.

Кроме того, предполагается что магнитные линии вморожены в плотную неподвижную плазму на границах трубки. Поэтому

$$\xi = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm L/2. \quad (3.3.6)$$

### 3.3.1b. Уравнения и граничные условия в эллиптических координатах

Для того чтобы записать уравнение (1.2.10) в эллиптических координатах воспользуемся формулами (см. напр. Korn and Korn 1961)

$$\nabla_{\perp} = \frac{1}{q} \left( \mathbf{e}_s \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{e}_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad \nabla \cdot \xi = \frac{1}{q^2} \left[ \frac{\partial(q\xi_s)}{\partial s} + \frac{\partial(q\xi_{\varphi})}{\partial \varphi} \right]. \quad (3.3.7)$$

где  $\mathbf{e}_s$  и  $\mathbf{e}_{\varphi}$  — единичные векторы эллиптической системы координат, а коэффициент Ламе  $q$  определяется выражением

$$q^2 = \sigma^2 (\cosh^2 s + \cos^2 \varphi). \quad (3.3.8)$$

В дальнейшем рассматриваем собственные моды изгибных колебаний и полагаем что  $\xi$  и  $P$  пропорциональны  $e^{-i\omega t}$ . Заметим что из первого уравнения (3.3.2) следует  $\xi_z = 0$ . Из второго уравнения (3.3.2) получаем, что  $P$  удовлетворяет тем же граничным условиям при  $z = \pm L/2$  что и  $\xi$ . Для того чтобы удовлетворить этим граничным условиям полагаем что,  $P$  и  $\xi$  пропорциональны  $\cos(\pi n z/L)$  для симметричных мод и  $\sin(2\pi n z/L)$  для антисимметричных, где  $n = 1, 2, \dots$ . Первая симметричная мода является

фундаментальной, а остальные – обертонами. После этого, исключая  $\xi$  из системы уравнений (3.3.2) и используя выражение для  $\nabla_{\perp}^2$  в эллиптических координатах,

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{q^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (3.3.9)$$

получим уравнение для  $P$ ,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \frac{4q^2 \theta}{\sigma^2} P = 0, \quad (3.3.10)$$

где

$$\omega_A = \frac{\pi m V_A}{L}, \quad \theta = \frac{\sigma^2 (\omega^2 - \omega_A^2)}{4V_A^2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3.11)$$

Здесь нечётное  $m$  соответствует симметричной моде, а чётное – антисимметричной. Кроме того, получим уравнение связывающее  $\xi_s$  и  $P$ :

$$\xi_s = \frac{1}{q\rho_0(\omega^2 - \omega_A^2)} \frac{\partial P}{\partial s}. \quad (3.3.12)$$

Нетрудно видеть, что точки с эллиптическими координатами  $s = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  и  $s = 0$ ,  $\varphi = -\varphi_0$  соответствуют одной и той же точке с координатами  $x = \sigma \cos \varphi_0$ ,  $y = 0$  в плоскости  $xy$ . Поэтому решение системы уравнений (3.3.10) и (3.3.12) должно удовлетворять условиям регулярности при  $s = 0$ ,

$$P(0, \varphi) = P(0, -\varphi), \quad \xi_s(0, \varphi) = -\xi_s(0, -\varphi). \quad (3.3.13)$$

С помощью уравнения (3.3.12) перепишем второе условие в виде

$$\left. \frac{\partial P(s, \varphi)}{\partial s} \right|_{s=0} = - \left. \frac{\partial P(s, -\varphi)}{\partial s} \right|_{s=0}. \quad (3.3.14)$$

Наконец, решение системы уравнений (3.3.10) и (3.3.12) должно стремиться к нулю при  $s \rightarrow \infty$ .

### 3.3.1с. Решение внутри трубки

Будем искать решение уравнения (3.3.10) внутри трубки в виде  $P(s, \varphi) = S(s)\Phi(\varphi)$ . Подставляя это выражение в уравнение (3.3.10) получим

$$\frac{S''}{S} + 4\theta \sinh^2 s = - \left( \frac{\Phi''}{\Phi} + 4\theta \sin^2 \varphi \right), \quad (3.3.15)$$

где штрих означает производную. Поскольку левая часть этого уравнения зависит только от  $s$ , а правая только от  $\varphi$ , обе части должны быть равны некоторой постоянной которую обозначим как  $\tau - 2\theta$ . После этого получим для  $\Phi$  уравнение Матъе

$$\Phi'' + (\tau - 2\theta \cos 2\varphi)\Phi = 0. \quad (3.3.16)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условию  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ . В соответствии с теорией уравнения Матъе при любом  $\theta$  существует две монотонно возрастающие последовательности,  $\tau_0^-, \tau_1^-, \tau_2^-, \dots$  и  $\tau_1^+, \tau_2^+, \dots$ , такие, что уравнение (3.3.16) имеет решение с периодом  $2\pi$  если и только если  $\tau = \tau_n^-$  или  $\tau = \tau_n^+$  при некотором  $n$ . Если  $\tau = \tau_n^-$  то соответствующее периодическое решение обозначается через  $ce_n(\varphi, \theta)$ . Эта функция является чётной функцией  $\varphi$  и имеет ровно  $n$  нулей на интервале  $0 \leq \varphi < \pi$ . Если  $\tau = \tau_n^+$  то соответствующее периодическое решение обозначается через  $se_n(\varphi, \theta)$ . Эта функция является нечётной функцией  $\varphi$  и также имеет ровно  $n$  нулей на интервале  $0 \leq \varphi < \pi$ .

Из уравнений (3.3.15) и (3.3.16) следует, что  $S(s)$  удовлетворяет модифицированному уравнению Матъе

$$S'' - (\tau - 2\theta \cosh 2s)S = 0. \quad (3.3.17)$$

В том случае, когда  $\tau = \tau_n^-$  и  $\Phi(\varphi) = ce_n(\varphi, \theta)$ , первое уравнение (3.3.13) удовлетворяется автоматически, а из уравнения (3.3.14) следует  $S'(0) = 0$ . С точностью до умножения на произвольную постоянную существует ровно одно решение уравнения (3.3.17) удовлетворяющее этому условию. Это решение обозначается как  $Ce_n(s, \theta)$  (см. напр. Bateman 1955; Abramowitz and Stegun 1964). Если  $\tau = \tau_n^+$  и  $\Phi(\varphi) = se_n(\varphi, \theta)$ , то уравнение (3.3.14) удовлетворяется автоматически, а из первого уравнения (3.3.13) следует  $S(0) = 0$ . Снова с точностью до умножения на произвольную постоянную существует ровно одно решение уравнения (3.3.17) удовлетворяющее этому условию. Это решение обозначается  $Se_n(s, \theta)$ . Отметим что функции  $ce_n$ ,  $se_n$ ,  $Ce_n$  и  $Se_n$  связаны соотношениями

$$Ce_n(z, \theta) = ce_n(iz, \theta), \quad Se_n(z, \theta) = -i se_n(iz, \theta). \quad (3.3.18)$$

Общее решение уравнения (3.3.10) внутри трубки записывается в виде

$$P = C_0^i Ce_0(s, \theta_i) ce_0(\varphi, \theta_i) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^i Ce_n(s, \theta_i) ce_n(\varphi, \theta_i) + D_n^i Se_n(s, \theta_i) se_n(\varphi, \theta_i)], \quad (3.3.19)$$

где  $C_0^i$ ,  $C_n^i$  и  $D_n^i$  — произвольные постоянные.

### 3.3.1d. Решение вне трубки

Для того чтобы получить решение во внешней области, снова отыскиваем решение уравнения (3.3.10) в виде  $P(s, \varphi) = S(s)\Phi(\varphi)$  и получаем уравнения (3.3.16) и (3.3.17) для  $\Phi(\varphi)$  и  $S(s)$ . Решение уравнения (3.3.16) то же что и внутри трубки, однако решение уравнения (3.3.17) теперь должно удовлетворять условию  $S(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ . В дальнейшем рассматриваем только захваченные волны с частотами меньше чем альвеновская частота  $\omega_{Ae}$  вне трубки. Это означает что  $\theta_e < 0$ . Модифицированное уравнение Матъе с  $\theta < 0$  имеет единственное решение стремящееся к нулю при  $s \rightarrow \infty$ . Это решение обозначается  $\text{Fek}_n(s, \theta_i)$  когда  $\tau = \tau_n^-$  и  $\text{Gek}_n(s, \theta_i)$  если  $\tau = \tau_n^+$ . Функции  $\text{Fek}$  и  $\text{Gek}$  называются модифицированными функциями Матъе третьего рода (Bateman 1955). Общее решение уравнения (3.3.10) вне трубки записывается в виде

$$P = C_0^e \text{Fek}_0(s, \theta_i) \text{ce}_0(\varphi, \theta_i) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^e \text{Fek}_n(s, \theta_i) \text{ce}_n(\varphi, \theta_i) + D_n^e \text{Gek}_n(s, \theta_i) \text{se}_n(\varphi, \theta_i)], \quad (3.3.20)$$

где  $C_0^e$ ,  $C_n^e$  и  $D_n^e$  — произвольные постоянные.

### 3.3.1e. Вывод дисперсионного уравнения

С помощью уравнения (3.3.12) первое граничное условие (3.3.5) перепишем в виде

$$\left[ \left[ \frac{1}{\theta} \frac{\partial P}{\partial s} \right] \right] = 0. \quad (3.3.21)$$

Подставляя уравнения (3.3.19) и (3.3.20) в уравнение (3.3.21) и второе уравнение (3.3.5) получим систему уравнений

$$C_0^i \text{Ce}_0(s_0, \theta_i) \text{ce}_0(\varphi, \theta_i) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^i \text{Ce}_n(s_0, \theta_i) \text{ce}_n(\varphi, \theta_i) + D_n^i \text{Se}_n(s_0, \theta_i) \text{se}_n(\varphi, \theta_i)] = C_0^e \text{Fek}_0(s_0, \theta_e) \text{ce}_0(\varphi, \theta_e) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^e \text{Fek}_n(s_0, \theta_e) \text{ce}_n(\varphi, \theta_e) + D_n^e \text{Gek}_n(s_0, \theta_e) \text{se}_n(\varphi, \theta_e)], \quad (3.3.22)$$

$$\begin{aligned}
& \theta_e C_0^i C e_0'(s_0, \theta_i) c e_0(\varphi, \theta_i) + \theta_e \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^i C e_n'(s_0, \theta_i) c e_n(\varphi, \theta_i) \\
& + D_n^i S e_n'(s_0, \theta_i) s e_n(\varphi, \theta_i)] = \theta_i C_0^e F e k_0'(s_0, \theta_e) c e_0(\varphi, \theta_e) \\
& + \theta_i \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^e F e k_n'(s_0, \theta_i) c e_n(\varphi, \theta_i) + D_n^e G e k_n'(s_0, \theta_i) s e_n(\varphi, \theta_i)], \quad (3.3.23)
\end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по  $s$ . Функции  $c e_n(\varphi, \theta)$  и  $s e_n(\varphi, \theta)$  могут быть разложены в ряды Фурье,

$$c e_{2m+j}(\varphi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l+j}^{2m+j}(\theta) \cos[(2l+j)\varphi], \quad (3.3.24)$$

$$s e_{2m+1+j}(\varphi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+1+j}^{2m+1+j}(\theta) \sin[(2l+1+j)\varphi], \quad (3.3.25)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  и  $j = 0, 1$ . Коэффициенты  $A_{2l}^{2m}(\theta)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ , связаны между собой рекуррентными соотношениями, и то же самое верно для коэффициентов  $A_{2l+1}^{2m+1}(\theta)$ ,  $B_{2l+1}^{2m+1}(\theta)$  и  $B_{2l+2}^{2m+2}(\theta)$ . Эти рекуррентные соотношения могут быть найдены, например, в Bateman (1955) и в Abramowitz and Stegun (1964). Подставляя уравнения (3.3.24) и (3.3.25) в уравнения (3.3.22) и (3.3.23) и собирая члены пропорциональные  $\cos[(2n+j)\varphi]$  и  $\sin[(2n+1+j)\varphi]$  получим четыре бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно переменных  $C_n^{i,e}$  и  $D_n^{i,e}$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} C e_{2m+j}(s_0, \theta_i) A_{2n+j}^{2m+j}(\theta_i) C_{2m+j}^i \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} F e k_{2m+j}(s_0, \theta_e) A_{2n+j}^{2m+j}(\theta_e) C_{2m+j}^e, \quad (3.3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_e \sum_{m=0}^{\infty} C e_{2m+j}'(s_0, \theta_i) A_{2n+j}^{2m+j}(\theta_i) C_{2m+j}^i \\
& = \theta_i \sum_{m=0}^{\infty} F e k_{2m+j}'(s_0, \theta_e) A_{2n+j}^{2m+j}(\theta_e) C_{2m+j}^e, \quad (3.3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} S e_{2m+1+j}(s_0, \theta_i) B_{2n+1+j}^{2m+1+j}(\theta_i) D_{2m+1+j}^i \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} G e k_{2m+1+j}(s_0, \theta_e) B_{2n+1+j}^{2m+1+j}(\theta_e) D_{2m+1+j}^e, \quad (3.3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \theta_e \sum_{m=0}^{\infty} \text{Se}'_{2m+1+j}(s_0, \theta_i) B_{2n+1+j}^{2m+1+j}(\theta_i) D_{2m+1+j}^i \\
& = \theta_i \sum_{m=0}^{\infty} \text{Gek}'_{2m+1+j}(s_0, \theta_e) B_{2n+1+j}^{2m+1+j}(\theta_e) D_{2m+1+j}^e, \quad (3.3.29)
\end{aligned}$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Каждая из бесконечных систем уравнений (3.3.26), (3.3.27), (3.3.28) и (3.3.29) фактически представляет две системы уравнений, одну при  $j = 0$  и другую при  $j = 1$ . Каждая из этих систем уравнений имеет нетривиальное решение если её определитель равен нулю. Это условие даёт дисперсионное уравнение определяющее частоту  $\omega$ .

Представляется весьма маловероятным, что дисперсионные уравнения и их решения могут быть получены в явном виде в общем случае. Однако анализ значительно упрощается в приближении тонкой трубки когда  $a \ll L$ . Решения дисперсионных уравнений в этом приближении будут найдены в следующем разделе.

### 3.3.1f. Решения дисперсионных уравнений в приближении тонкой трубки

В дальнейшем предполагаем  $a \ll L$ . Поскольку  $a = \sigma \cosh s_0 \geq \sigma$ , имеем оценку  $\theta_e \sim \theta_i \sim (a/L)^2 \ll 1$ . После этого, используя разложения величин  $A_n^m(\theta)$  и  $B_n^m(\theta)$  в степенные ряды по  $\theta$  (см. Abramowitz and Stegun 1964) получим

$$\begin{aligned}
A_0^0 &= 2^{-1/2} + O(\theta^2), & A_n^n &= 1 + O(\theta^2), & B_n^n &= 1 + O(\theta^2), \\
A_{n+2m}^n &= O(\theta^m), & B_{n+2m}^n &= O(\theta^m), & (m = 1, 2, \dots), & \\
A_{n-2m}^n &= O(\theta^m), & B_{n-2m}^n &= O(\theta^m), & (m = 1, 2, \dots, [n/2]), &
\end{aligned} \quad (3.3.30)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а  $[n/2]$  обозначает целую часть числа  $n/2$ . Используя соотношения (3.3.18), разложения в ряды Фурье (3.3.24) и (3.3.25) и асимптотические формулы (3.3.30) получим следующие асимптотические выражения справедливые при  $|\theta|^{1/2} e^s \ll 1$ :

$$\text{Ce}_0(s, \theta) \sim 2^{-1/2}, \quad \text{Ce}_n(s, \theta) \sim \cosh(ns), \quad \text{Se}_n(s, \theta) \sim \sinh(ns), \quad (3.3.31)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Введём новые переменные

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_0^e &= \frac{p_0}{\pi} C_0^e, & \tilde{C}_{2m-1}^e &= \frac{(-1)^m p_{2m-1}}{\pi |\theta_e|^{1/2} A_1^{2m-1}} C_{2m-1}^e, & \tilde{C}_{2m}^e &= \frac{(-1)^m p_{2m}}{2\pi m A_0^{2m}} C_{2m}^e, \\
\tilde{D}_{2m-1}^e &= \frac{(-1)^m q_{2m-1}}{\pi |\theta_e|^{1/2} B_1^{2m-1}} D_{2m-1}^e, & \tilde{D}_{2m}^e &= \frac{2m(-1)^m q_{2m}}{\pi \theta_e B_2^{2m}} D_{2m}^e, & &
\end{aligned} \quad (3.3.32)$$

где  $m = 1, 2, \dots$ . Подставим эти выражения в четыре системы уравнений, первая и вторая из которых даются уравнениями (3.3.26) и (3.3.27) с  $j = 0, 1$ , а третья и четвёртая уравнениями (3.3.28) и (3.3.29) с  $j = 0, 1$ . В результате получим четыре системы бесконечных линейных однородных алгебраических уравнений, первая для  $C_{2m}^i$  и  $\tilde{C}_{2m}^e$ , вторая для  $C_{2m+1}^i$  и  $\tilde{C}_{2m+1}^e$ , третья для  $D_{2m+1}^i$  и  $\tilde{D}_{2m+1}^e$ , и четвёртая для  $D_{2m+2}^i$  и  $\tilde{D}_{2m+2}^e$ . Используя уравнения (3.3.30) и (3.3.31) и уравнения (E.11)-(E.15) из Дополнения E, нетрудно показать что все элементны бесконечных матриц четырёх систем уравнений за исключением диагональных элементов стремятся к нулю при  $\theta_{i,e} \rightarrow 0$ . После этого, в главном приближении по малому параметру  $a/L$ , первая и вторая системы сводятся к

$$2^{1/2}C_0^i = -(\ln |\theta_e| + 2s_0 + 2\gamma - 2 \ln 2)\tilde{C}_0^e, \quad \rho_e^{-1}(\omega_{Ae}^2 - \omega^2)^{-1}\tilde{C}_0^e = 0, \quad (3.3.33)$$

$$\cosh(ns_0)C_n^i = e^{-ns_0}\tilde{C}_n^e, \quad \frac{\sinh(ns_0)}{\rho_i(\omega_{Ai}^2 - \omega^2)}C_n^i = \frac{-e^{-ns_0}}{\rho_e(\omega_{Ae}^2 - \omega^2)}\tilde{C}_n^e, \quad (3.3.34)$$

а третья и четвёртая к

$$\sinh(ns_0)D_n^i = e^{-ns_0}\tilde{D}_n^e, \quad \frac{\cosh(ns_0)}{\rho_i(\omega_{Ai}^2 - \omega^2)}D_n^i = \frac{-e^{-ns_0}}{\rho_e(\omega_{Ae}^2 - \omega^2)}\tilde{D}_n^e, \quad (3.3.35)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Очевидно что система уравнений (3.3.33) имеет только тривиальное решение  $C_0^e = \tilde{C}_0^e = 0$  при любом значении  $\omega_0$ . Ненулевое решение этой системы соответствовало бы единственной волновой моде, которая изменяет площадь сечения трубки. Эта мода была бы аналогична симметричной волновой моде существующей в тонкой магнитной трубке с круговым сечением. Фазовая скорость этой волны равна  $c_T$  (Defouw 1976), а эта величина равна нулю в приближении холодной плазмы. Это означает что симметричная волновая мода не может быть описана в приближении холодной плазмы. Отсутствие нетривиального решения системы (3.3.33) полностью согласуется с этим результатом.

Нетривиальное решение системы уравнений (3.3.34) существует только когда детерминант этой системы равен нулю. Из этого условия следует

$$\omega^2 = \omega_{nc}^2 \equiv \frac{\rho\omega_A^2[1 + \tanh(ns_0)]}{\rho_i + \rho_e \tanh(ns_0)}. \quad (3.3.36)$$

Аналогично, из условия существования нетривиального решения системы уравнений (3.3.35) получаем

$$\omega^2 = \omega_{ns}^2 \equiv \frac{\rho\omega_A^2[1 + \tanh(ns_0)]}{\rho_i \tanh(ns_0) + \rho_e}. \quad (3.3.37)$$

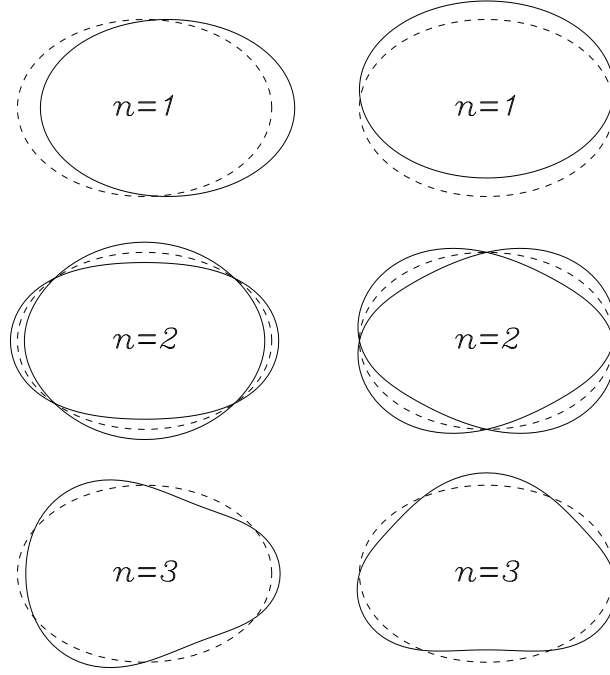


Рис. 3.3.2. Эскиз формы границы трубки возмущённой волновыми модами. Верхняя, средняя и нижняя части рисунка соответствуют  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n = 3$ . Левые рисунки соответствуют  $\omega_{nc}$ , а правые  $\omega_{ns}$ . Пунктирные и сплошные линии показывают, соответственно, невозмущённые и возмущённые границы. В двух средних рисунках возмущённая граница показана для двух последовательных моментов времени разделённых половиной периода.

При выводе уравнений (3.3.36) и (3.3.37) использовалось соотношение  $\rho_e \omega_{Ae}^2 = \rho_i \omega_{Ai}^2 = \rho \omega_A^2$ . Форма границы трубки возмущённой волновыми модами соответствующими частотам  $\omega_{nc}$  и  $\omega_{ns}$  показана на Рис. 3.3.2 при  $n = 1, 2, 3$ . Нетрудно показать что

$$\begin{aligned} \omega_{1c} < \omega_{2c} < \omega_{3c} < \dots, \\ \omega_{1s} > \omega_{2s} > \omega_{3s} > \dots \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

К тому же

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{nc}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{ns}^2 = \omega_k^2 \equiv \frac{2\rho\omega_A^2}{\rho_i + \rho_e}, \quad (3.3.39)$$

где  $\omega_k$  — частота изгибной моды магнитной трубки с круговым сечением (см. напр. Ryutov and Ryutova 1976; Edwin and Roberts 1983). Из уравнений (3.3.38) и (3.3.39) следует что  $\omega_{nc} < \omega_{ms}$  при  $n \geq 1$  и  $m \geq 1$ .

Предел  $s_0 \rightarrow \infty$  соответствует трубке с круговым сечением потому что в этом пределе  $a/b \rightarrow 1$ . В результате получаем хорошо известный результат теории колебаний тонкой трубки с круговым сечением (e.g. Spruit 1982):

$$\omega_{nc} = \omega_{ns} = \omega_k \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.3.40)$$



В противоположном пределе, при  $s_0 \rightarrow 0$ , сечение трубки сжимается в интервал  $[-\sigma, \sigma]$  оси  $x$ . В этом пределе

$$\omega_{nc} = \omega_{Ai}, \quad \omega_{ns} = \omega_{Ae} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.3.41)$$

Это вполне ожидаемые результаты. Как будет показано ниже, в волновых модах, соответствующих  $\omega_{nc}$ , движение направлено вдоль оси  $x$ , так что оно не возмущает внешнюю плазму. В результате магнитные линии внутри трубки колеблются с их собственной альвеновской частотой равной  $\omega_{Ai}$ . В волновых модах, соответствующих  $\omega_{ns}$ , движение перпендикулярно оси  $x$  и возмущает область внешней плазмы с характерным размером  $\sigma$ . Масса плазмы внутри трубки стремится к нулю при  $s_0 \rightarrow 0$  и ею можно пренебречь. В результате плазма колеблется с частотой равной внешней альвеновской частоте  $\omega_{Ae}$ . При  $n = 1$  этот результат совпадает с соответствующим результатом полученным для магнитного слоя (Enwin and Roberts 1982).

Выражения (3.3.36) и (3.3.37) принимают особенно простой вид при  $n = 1$ :

$$\omega_{1c}^2 = \frac{\rho\omega_A^2(a+b)}{a\rho_i + b\rho_e}, \quad \omega_{1s}^2 = \frac{\rho\omega_A^2(a+b)}{b\rho_i + a\rho_e}. \quad (3.3.42)$$

Напомним что  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллиптического сечения. Когда  $a = b$ ,  $\omega_{1c} = \omega_{1s} = \omega_k$ .

Исследуем поляризацию двух изгибных волновых мод. При  $\omega = \omega_{1c}$ , из уравнений (3.3.33)-(3.3.35) следует

$$\begin{aligned} C_n^i = \tilde{C}_n^e = 0 \quad (n = 0, 2, 3, \dots), \quad \tilde{C}_1^e = \frac{1}{2}(e^{2s_0} + 1)C_1^i, \\ D_n^i = \tilde{D}_n^e = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} C_n^i = \tilde{C}_n^e = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ D_n^i = \tilde{D}_n^e = 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad \tilde{D}_1^e = \frac{1}{2}(e^{2s_0} - 1)D_1^i, \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

когда  $\omega = \omega_{1s}$ . Используя уравнения (3.3.24), (3.3.25) и (3.3.30) получим при  $|\theta_{i,e}| \ll 1$ ,

$$\text{se}_1(\varphi, \theta_{i,e}) \approx \cos \varphi, \quad \text{se}_1(\varphi, \theta_{i,e}) \approx \sin \varphi. \quad (3.3.45)$$

Из уравнений (3.3.32), (3.3.43), (3.3.44), (E.12) и (E.14) следует что, при  $|\theta_e| \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} C_1^e \text{Fek}_1(s, \theta_e) &\approx \frac{1}{2}(e^{2s_0} + 1)C_1^i e^{-s}, \\ D_1^e \text{Gek}_1(s, \theta_e) &\approx \frac{1}{2}(e^{2s_0} - 1)D_1^i e^{-s}. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Теперь, с помощью уравнений (3.3.31) и (3.3.43)-(3.3.46), получим из уравнений (3.3.19) и (3.3.20)

$$P = C_1^i \cosh s \cos \varphi, \quad s < s_0, \quad (3.3.47)$$

когда  $\omega = \omega_{1c}$ , и

$$P = D_1^i \sinh s \sin \varphi, \quad s < s_0, \quad (3.3.48)$$

если  $\omega = \omega_{1s}$ . С помощью уравнений (3.3.2), (3.3.7), (3.3.47), (3.3.48) и соотношений между единичными векторами эллиптических,  $\mathbf{e}_s$  и  $\mathbf{e}_\varphi$ , и декартовых,  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$ , координат,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_s &= q^{-1}(\mathbf{e}_x \sinh s \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cosh s \sin \varphi), \\ \mathbf{e}_\varphi &= q^{-1}(-\mathbf{e}_x \cosh s \sin \varphi + \mathbf{e}_y \sinh s \cos \varphi), \end{aligned} \quad (3.3.49)$$

получим для  $x$  и  $y$ -компонент смещения плазмы,  $\xi_x$  и  $\xi_y$ ,

$$\xi_x = \xi_{0c}, \quad \xi_y = 0 \quad (\omega = \omega_{1c}), \quad (3.3.50)$$

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y = \xi_{0s} \quad (\omega = \omega_{1s}). \quad (3.3.51)$$

Здесь  $\xi_{0c}$  — постоянная пропорциональная  $C_1^i$ , а  $\xi_{0s}$  — постоянная пропорциональная  $D_1^i$ . Таким образом, изгибные колебания с частотой  $\omega_{1c}$  поляризованы в направлении большой оси эллиптического сечения, а колебания с частотой  $\omega_{1s}$  поляризованы в направлении малой оси эллиптического сечения.

Исследуем зависимость частот двух изгибных волновых мод,  $\omega_{1c}$  и  $\omega_{1s}$ , от отношения длин полуосей эллиптического сечения  $a/b$ . С помощью уравнений (3.3.39) и (3.3.42) получим

$$\frac{\omega_{1c}^2}{\omega_k^2} = \frac{(1 + a/b)(1 + \rho_i/\rho_e)}{2[1 + (a/b)(\rho_i/\rho_e)]}, \quad \frac{\omega_{1s}^2}{\omega_k^2} = \frac{(1 + a/b)(1 + \rho_i/\rho_e)}{2(a/b + \rho_i/\rho_e)}. \quad (3.3.52)$$

На Рис. 3.3.3 показана зависимость  $\omega_{1c}/\omega_k$  и  $\omega_{1s}/\omega_k$  от  $a/b$  при  $\rho_i/\rho_e = 10$ . При  $a/b \rightarrow \infty$ ,  $\omega_{1c}/\omega_k \rightarrow \sqrt{(\rho_i + \rho_e)/(2\rho_i)} \approx 0.742$  и  $\omega_{1s}/\omega_k \rightarrow \sqrt{(\rho_i + \rho_e)/(2\rho_e)} \approx 2.345$ . Предельное значение  $\omega_{1c}/\omega_k$  показано на Рис. 3.3.3 точечной горизонтальной линией. Величина  $\omega_{1s}/\omega_k$  становится близкой к её предельному значению при нереально больших значениях  $a/b$ , поэтому её предельное значение не показано на Рис. 3.3.3.

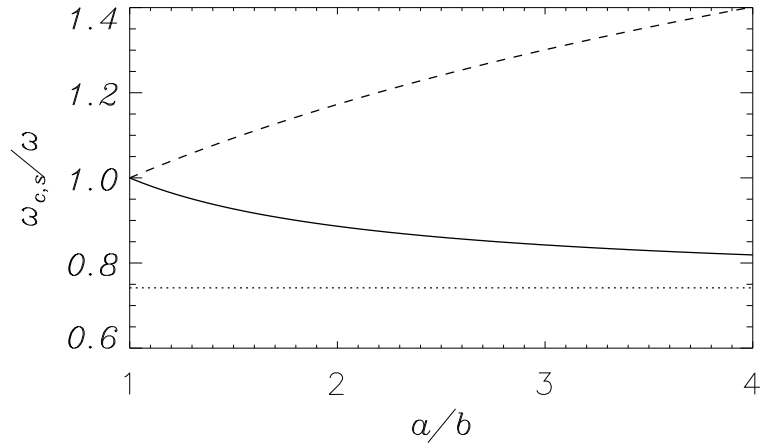


Рис. 3.3.3. Сплошная и пунктирная кривые показывают, соответственно, зависимости  $\omega_{1c}/\omega_k$  и  $\omega_{1s}/\omega_k$  от  $a/b$  при  $\rho_i/\rho_e = 10$ . Точечная горизонтальная линия показывает предельное значение  $\omega_{1c}/\omega_k$  при  $a/b \rightarrow \infty$ .

### 3.3.2. Изгибные колебания магнитной трубки с эллиптическим сечением и плотностью меняющейся вдоль трубки

В предыдущем разделе был представлен анализ изгибных и желобковых волновых мод однородной магнитной трубки с эллиптическим сечением. Этот анализ приводит к весьма трудоёмким вычислениям основанным на теории обыкновенного и модифицированного уравнений Матье. Хотя анализ предыдущего раздела справедлив при любом отношении большой полуоси эллиптического сечения к длине трубки, явные выражения для частот волновых мод удаётся получить только в приближении тонкой трубки. Конечно, в принципе, можно было бы исследовать свойства волновых мод и в общем случае. Для этого необходимо обрезать бесконечные определители, равенство которых нулю даёт дисперсионные уравнения определяющие частоты волновых мод. После этого полученные дисперсионные уравнения необходимо решить численно. Однако, с точки зрения приложений к солнечной короне, эти сложные вычисления не имеют большого смысла поскольку отношение поперечного размера к длине весьма мало в типичных корональных петлях. Таким образом, с точки зрения приложений, основной интерес представляют именно результаты полученные в приближении тонкой трубки.

Свойства изгибных и желобковых волновых мод магнитной трубки с эллиптическим сечением могут быть исследованы на основе гораздо более простого подхода, если с самого начала предположить что трубка тонкая. После этого можно использовать асимптотический метод впервые предло-

женный в работе Dymova and Ruderman (2005). Более того, с помощью этого метода можно также учесть изменение плотности вдоль трубки. Подобный анализ был проделан в работе Morton and Ruderman (2011). Дальнейшее изложение близко следует этой работе.

В дальнейшем для описания движения плазмы используем те же уравнения (3.3.1) что и в предыдущем разделе с теми же граничными условиями (3.3.5) и (3.3.6). Невозмущённое состояние также совпадает с невозмущённым состоянием рассмотренным в предыдущем разделе с единственной разницей: плотность плазмы может меняться вдоль оси трубки. Таким образом,  $\rho_i$  и  $\rho_e$  являются функциями  $z$ .

### 3.3.2a. Вывод уравнений описывающих неосесимметричные волны

Для вывода уравнений описывающих изгибные и желобковые волны используем эллиптические координаты введённые в предыдущем разделе. Как и прежде, система уравнений (3.3.1) сводится к системе уравнений (3.3.2). Из первого уравнения этой системы следует что  $\xi_z = 0$ . После этого, применяя операцию дивергенции к первому уравнению системы (3.3.2), получим уравнение для возмущения магнитного давления,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = V_A^2 \nabla_{\perp}^2 P. \quad (3.3.53)$$

Теперь используем приближение тонкой трубки. Для этого заметим что характерный пространственный масштаб в направлении оси  $z$  равен  $L$ , а характерное время задачи равно  $L/\bar{V}_A$ , где  $\bar{V}_A$  — характерная величина альвеновской скорости. В дальнейшем рассматриваем только захваченные волны, в которых все возмущения затухают на расстоянии от трубки равном нескольким большим полуосям эллиптического сечения  $a$ . В этом случае характерный пространственный масштаб в направлениях перпендикулярных оси трубки равен  $a$ . Таким образом, отношение левой части уравнения (3.3.53) к его правой части порядка  $(a/L)^2 \ll 1$ , так что левой частью можно пренебречь. После этого, используя выражение (3.3.9) для  $\nabla_{\perp}^2$  в эллиптических координатах, получим уравнение для  $P$  в приближении тонкой трубки,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.3.54)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять первому условию регу-

лярности в уравнении (3.3.13) и условию регулярности (3.3.14). Решение уравнения (3.3.54) получается с помощью разложения в ряд Фурье по  $\varphi$ . Нетрудно показать, что общее решение внутри трубки удовлетворяющее условиям регулярности записывается в виде

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^i \cosh(ns) \cos(n\varphi) + D_n^i \sinh(ns) \sin(n\varphi)], \quad (3.3.55)$$

где  $C_n^i$  и  $D_n^i$  – произвольные функции  $t$  и  $z$ . Решение вне трубки должно убывать при  $s \rightarrow \infty$ . Оно имеет вид

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns} [C_n^e \cos(n\varphi) + D_n^e \sin(n\varphi)], \quad (3.3.56)$$

где  $C_n^e$  и  $D_n^e$  также являются произвольными функциями  $t$  и  $z$ . Подставляя уравнения (3.3.55) и (3.3.56) в первое уравнение (3.3.2) и используя выражение (3.3.7) для  $\nabla_{\perp}$  в эллиптических координатах получим выражения для  $\xi_s$  внутри трубки,

$$\xi_s = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^i \sinh(ns) \cos(n\varphi) + G_n^i \cosh(ns) \sin(n\varphi)], \quad (3.3.57)$$

и вне трубки,

$$\xi_s = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns} [F_n^e \cos(n\varphi) + G_n^e \sin(n\varphi)]. \quad (3.3.58)$$

В этих уравнениях  $F_n^i$ ,  $G_n^i$ ,  $F_n^e$  и  $G_n^e$  – функции  $t$  and  $z$ . Они связаны с функциями  $C_n^i$ ,  $D_n^i$ ,  $C_n^e$  и  $D_n^e$  уравнениями

$$\frac{\partial^2 F_n^i}{\partial t^2} - V_{Ai}^2 \frac{\partial^2 F_n^i}{\partial z^2} = -\frac{C_n^i}{\rho_i}, \quad (3.3.59)$$

$$\frac{\partial^2 G_n^i}{\partial t^2} - V_{Ai}^2 \frac{\partial^2 G_n^i}{\partial z^2} = -\frac{D_n^i}{\rho_i}, \quad (3.3.60)$$

$$\frac{\partial^2 F_n^e}{\partial t^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 F_n^e}{\partial z^2} = \frac{C_n^e}{\rho_e}, \quad (3.3.61)$$

$$\frac{\partial^2 G_n^e}{\partial t^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 G_n^e}{\partial z^2} = \frac{D_n^e}{\rho_e}. \quad (3.3.62)$$

Подставляя уравнения (3.3.57) и (3.3.58) в первое граничное условие (3.3.5) получим соотношения

$$C_n^i \cosh(ns_0) = e^{-ns_0} C_n^e, \quad D_n^i \sinh(ns_0) = e^{-ns_0} D_n^e. \quad (3.3.63)$$

Аналогично, подставляя уравнения (3.3.55) и (3.3.56) во второе граничное условие (3.3.5), находим

$$F_n^i \sinh(ns_0) = e^{-ns_0} F_n^e, \quad G_n^i \cosh(ns) = e^{-ns_0} G_n^e. \quad (3.3.64)$$

Исключая  $C_n^i$ ,  $C_n^e$  и  $F_n^e$  из уравнений (3.3.59), (3.3.61), (3.3.63) и (3.3.64) получим уравнение для  $F_n^i$ ,

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} - C_{nc}^2 \frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} = 0, \quad C_{nc}^2 = \frac{B_0^2 [1 + \tanh(ns_0)]}{\mu_0 [\rho_i + \rho_e \tanh(ns_0)]}, \quad (3.3.65)$$

где верхний индекс 'i' был опущен. Исключая  $D_n^i$ ,  $D_n^e$  и  $G_n^e$  из уравнений (3.3.60), (3.3.62), (3.3.63) и (3.3.64) находим уравнение для  $G_n^i$ ,

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial t^2} - C_{ns}^2 \frac{\partial^2 G_n}{\partial z^2} = 0, \quad C_{ns}^2 = \frac{B_0^2 [1 + \tanh(ns_0)]}{\mu_0 [\rho_i \tanh(ns_0) + \rho_e]}, \quad (3.3.66)$$

где верхний индекс 'i' был снова опущен. Из уравнений (3.3.6) и (3.3.57) следует, что  $F_n$  и  $G_n$  должны удовлетворять граничным условиям

$$F_n = 0, \quad G_n = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm L/2. \quad (3.3.67)$$

В уравнениях (3.3.65) и (3.3.66)  $n = 1$  соответствует изгибным модам, а  $n > 1$  — желобковым.

В эллиптических координатах ось трубки ( $x = y = 0$ ) определяется равенствами  $s = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ . Из уравнения (3.3.57) следует что изгибная волна описываемая уравнением (3.3.65) не вызывает смещения оси трубки в направлении  $s$ , которое на оси трубки совпадает с направлением  $y$ . Таким образом, смещение оси происходит в направлении оси  $x$ , т.е. эта волновая мода поляризована в направлении большой оси эллиптического сечения. Изгибная волна описываемая уравнением (3.3.66) смещает ось трубки в направлении  $s$ . При этом нетрудно видеть, что ось не смещается в направлении  $\varphi$ , которое на оси трубки совпадает с направлением  $x$ . Таким образом, смещение оси трубки происходит с направлением оси  $y$ , т.е. эта волновая мода поляризована в направлении малой оси эллиптического сечения.

Для отыскания собственных частот стоячих волн необходимо подставить  $F_n \propto e^{-i\omega t}$  и  $G_n \propto e^{-i\omega t}$  в уравнения (3.3.65) и (3.3.66). Полученные уравнения вместе с граничными условиями уравнения (3.3.67) образуют две задачи на собственные значения. Собственные значения легко находятся в случае когда плотность постоянна внутри и вне трубки. Обозначая

собственные значения первой задачи как  $\omega_{nc}$  и собственные значения второй задачи как  $\omega_{ns}$ , получим

$$\omega_{nc}^2 = \frac{\pi^2 C_{nc}^2}{L^2}, \quad \omega_{ns}^2 = \frac{\pi^2 C_{ns}^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.68)$$

Легко проверить что эти выражения совпадают с выражениями (3.3.36) и (3.3.37) полученными в предыдущем разделе в приближении тонкой трубки.

### 3.3.2b. Приложение к корональной сейсмологии

Как уже указывалось в разделе 3.2.4, метод оценки шкалы высот предложенный в работе Andries et al. (2005a) основан на нескольких предположениях. Одним из важных предположений является то, что сечение петли круговое. Для успешного применения корональной сейсмологии весьма важно выяснить как сильно изменятся сейсмологические параметры если отказаться от некоторых из принятых предположений. На основании исследований, полученных в предыдущем и данном разделе можно выяснить насколько важным является предположение о круговом сечении корональной петли. Основным результатом полученным в предыдущем и данном разделе является существование двух изгибных мод с взаимно ортогональной поляризацией и с различными частотами колебаний.

С помощью уравнения (3.3.42) получим отношение частот двух изгибных волновых мод магнитной трубки с эллиптическим сечением

$$\frac{\omega_{1s}}{\omega_{1c}} = \sqrt{\frac{1 + (b/a)(\rho_e/\rho_i)}{(b/a) + (\rho_e/\rho_i)}}. \quad (3.3.69)$$

Нетрудно показать, что  $\omega_{1s}/\omega_{1c}$  является монотонно убывающей функцией как  $b/a$  так и  $\rho_e/\rho_i$ . Отношение  $\omega_{1c}/\omega_{1s}$  монотонно возрастает от 1 до 1.414 при  $b/a$  убывающем от 1 до 0.5 и  $\rho_e/\rho_i$  убывающем от 1 до 0. Представляется маловероятным, что отношение малой оси сечения к большой меньше чем 0.5. До сих пор наблюдаемое отношение частоты второй гармоники к частоте фундаментальной моды заметно превышало 1.414. Насколько известно, минимальное наблюдавшееся отношение было 1.58. Если в дальнейшем будут наблюдаться две частоты изгибных колебаний с отношением меньше 1.4, то это можно будет рассматривать как достаточно серьезное доказательство отклонения сечения корональной петли от кругового.

### 3.3.3. Вертикальные и горизонтальные изгибные колебания корональных петель

В подавляющем большинстве работ посвящённых изучению изгибных колебаний корональных петель использовалась модель прямой магнитной трубки, т.е. пренебрегалось кривизной трубки. Влияние кривизны трубки на изгибные колебания было исследовано в работе Van Doorselaere et al. (2004). В этой работе предполагалось, что магнитная трубка имеет форму полуокружности, а сечение трубки круговое. Таким образом, петля имела форму половинки тора. Петля была расположена в вертикальной плоскости. Также предполагалось, что плотность плазмы постоянна внутри и вне трубки. Задача была решена аналитически. Решение отыскивалось в виде разложения по малому параметру  $\epsilon$  равному отношению радиуса сечения к длине петли. В частности, было показано, что есть две моды изгибных колебаний, одна поляризованная в горизонтальной и другая в вертикальной плоскости. Частоты двух мод отличаются на величину порядка  $\epsilon^2$ , т.е. они почти совпадают для реальных корональных петель. Результаты этой работы были затем подтверждены численными расчётами в работе Terradas et al. (2006) (см. также обзорную статью Van Doorselaere et al. 2009).

На основе этих работ был сделан вывод, что влиянием кривизны магнитных петель на частоту изгибных волновых мод можно пренебречь. Однако в обеих работах, Van Doorselaere et al. (2004) и Terradas et al. (2006), рассматривались петли в форме полукруга. Более того, предполагалось, что петля погружена в потенциальное магнитное поле которое в цилиндрической системе координат с осью  $z$  перпендикулярной к плоскости петли и проходящей через центр полукруга имеет только азимутальную компоненту с величиной обратно пропорциональной расстоянию до оси  $z$ . Можно сказать что, на основании результатов цитированных работ, можно пренебречь прямым влиянием кривизны на частоту изгибных колебаний. Однако кривизна петли может повлиять на частоту изгибных колебаний другим образом. Оно заключается в том, что кривизна петли может влиять на форму поперечного сечения петли и приводить к его изменению вдоль петли. Подобная возможность была исследована в работе Ruderman (2009). В дальнейшем следуем этой работе.

#### 3.3.3а. Постановка задачи и основные уравнения



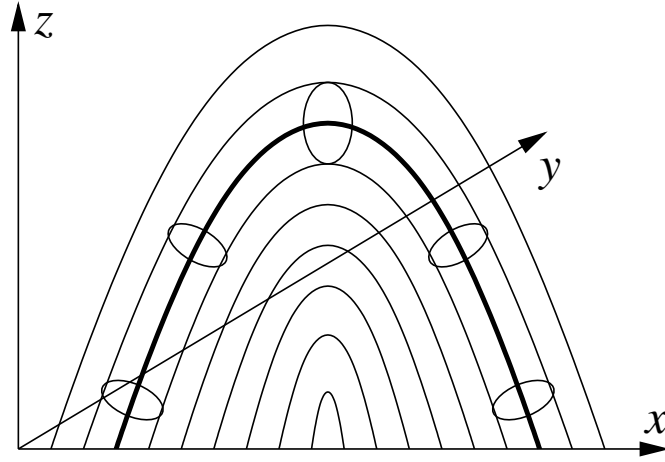


Рис. 3.3.4. Невозмущённое состояние с потенциальным магнитным полем. Тонкими линиями показаны магнитные линии. Предполагается что их концы заморожены в плотную неподвижную фотосферную плазму расположенную в нижнем полупространстве ( $z < 0$ ). Толстой линией показана ось магнитной трубки, а эллипсы показывают её сечение.

Введём декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с осью  $z$  в вертикальном направлении и рассмотрим невозмущённое магнитное поле  $\mathbf{B}$  параллельное плоскости  $xz$  и независящее от  $y$ . Поскольку магнитное поле соленоидально, можно ввести функцию магнитного потока  $\psi$ . В дальнейшем также предполагаем, что  $\mathbf{B}$  потенциально, так что его можно выразить через потенциал  $\phi$ . В результате для компонент невозмущённого магнитного поля имеем

$$B_x = -B_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = B_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad B_z = B_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = B_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (3.3.70)$$

где  $B_0$  — характерная величина невозмущённого поля. Предполагается, что в верхней полуплоскости ( $z > 0$ ) магнитные линии замкнуты и их концы заморожены в плотную фотосферную плазму расположенную в нижней полуплоскости  $z < 0$ . Типичный вид магнитных линий показан на Рис. 3.3.4. Магнитная линия задаётся уравнениями  $\psi = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ . В частности, ось трубки задаётся уравнениями  $\psi = \psi_0$ ,  $y = 0$ , где  $\psi_0$  — постоянная. Уравнение границы может быть записано в параметрической форме  $\psi = \psi_b(\eta)$ ,  $y = y_b(\eta)$ ,  $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ , причём  $\psi_b(\eta_1) = \psi_b(\eta_2)$  и  $y_b(\eta_1) = y_b(\eta_2)$ . Область внутри трубки определяется неравенством

$$(\psi - \psi_0)^2 + y^2 < [\psi(\eta) - \psi_0]^2 + y^2(\eta),$$

а область вне трубки неравенством

$$(\psi - \psi_0)^2 + y^2 > [\psi(\eta) - \psi_0]^2 + y^2(\eta).$$

Плотность плазмы внутри трубки равна  $\rho_i$ , а вне трубки  $\rho_e$ , где  $\rho_i$  и  $\rho_e$  являются функциями  $\phi$  и  $\rho_e < \rho_i$ .

Движение плазмы описывается линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики (3.3.1). Введём криволинейные координаты  $\psi, y, \phi$ . Единичные векторы этих координат задаются выражениями  $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \nabla\psi/|\nabla\psi|$ ,  $\hat{\boldsymbol{y}}$  и  $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$ . Из уравнения (3.3.70) следует, что  $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{B}/B$ , а декартовы компоненты вектора  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  определяются выражением

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{B} (B_z, 0, -B_x). \quad (3.3.71)$$

Нетрудно видеть, что введённая криволинейная система координат ортогональна и имеет правую ориентацию ( $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\psi}} \times \hat{\boldsymbol{y}}$ ). Поскольку система координат ортогональна, метрический тензор диагонален. Его диагональные элементы даются выражениями

$$g_{\psi\psi} = g_{\phi\phi} = \frac{B_0^2}{B^2}, \quad g_{yy} = 1. \quad (3.3.72)$$

Введём компоненты векторов  $\boldsymbol{\xi}$  and  $\mathbf{b}$ ,

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_\psi \hat{\boldsymbol{\psi}} + \xi_y \hat{\boldsymbol{y}} + \xi_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad \mathbf{b} = b_\psi \hat{\boldsymbol{\psi}} + b_y \hat{\boldsymbol{y}} + b_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Используя уравнение (3.3.71), выражение для оператора  $\nabla \times$  в ортогональных координатах (см. напр. Korn and Korn 1961), и принимая во внимание что, в соответствии с первым уравнением (3.3.1),  $\xi_\phi = 0$ , перепишем уравнения (3.3.1) в координатной форме,

$$\frac{\partial^2 \xi_\psi}{\partial t^2} = \frac{B^3}{\mu_0 \rho B_0} \left( \frac{\partial(b_\psi/B)}{\partial \phi} - \frac{\partial(b_\phi/B)}{\partial \psi} \right), \quad (3.3.73)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} = \frac{B^2}{\mu_0 \rho B_0} \left( \frac{\partial b_y}{\partial \phi} - \frac{B_0}{B} \frac{\partial b_\phi}{\partial y} \right), \quad (3.3.74)$$

$$b_\psi = \frac{B}{B_0} \frac{\partial(B\xi_\psi)}{\partial \phi}, \quad b_y = \frac{B^2}{B_0} \frac{\partial \xi_y}{\partial \phi}, \quad (3.3.75)$$

$$P = -\frac{B^2}{\mu_0} \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial(B\xi_\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right), \quad (3.3.76)$$

где, как и прежде,  $P = \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}/\mu_0 = Bb_\phi/\mu_0$  – возмущение магнитного давления. Исключая  $b_\psi$  и  $b_y$  перепишем уравнения (3.3.73), (3.3.74) и (3.3.76) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{B^4}{\rho B_0} \frac{\partial Q}{\partial \psi} + \frac{B^4}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}, \quad (3.3.77)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial t^2} = -\frac{B^2}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{B^2}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( B^2 \frac{\partial \xi_y}{\partial \phi} \right), \quad (3.3.78)$$

$$Q = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right), \quad (3.3.79)$$

где  $u = B\xi_\psi$  и  $Q = P/B^2$ . Уравнения (3.3.77)-(3.3.79) являются замкнутой системой для  $u$ ,  $\xi_y$  и  $Q$ . Её необходимо дополнить граничными условиями на границе трубки и у оснований трубки. На границе трубки смещение плазмы в направлении перпендикулярном границе и возмущение магнитного давления должны быть непрерывны. Эти условия записываются в виде

$$[[\xi_n]] = 0, \quad [[Q]] = 0, \quad (3.3.80)$$

где  $\xi_n$  — компонента смещения плазмы перпендикулярная границе. Основания петли определяются уравнениями  $\phi = \phi_1$  и  $\phi = \phi_2$ . Поскольку основания магнитных линий вморожены в неподвижную плазму, смещение плазмы у оснований трубки равно нулю. Таким образом, имеем граничные условия

$$u = 0, \quad \xi_y = 0 \quad \text{при } \phi = \phi_{1,2}. \quad (3.3.81)$$

В дальнейшем система уравнений (3.3.77)-(3.3.79) с граничными условиями (3.3.80) и (3.3.81) используется для изучения изгибных колебаний искривлённых корональных петель.

### 3.3.3b. Приближение тонкой трубки

Для типичных корональных петель  $\epsilon = a/L \ll 1$ , где  $a$  — типичный размер поперечного сечения петли и  $L$  — длина петли. Для того чтобы иметь один и тот же характерный пространственный размер для всех трёх независимых переменных,  $\psi$ ,  $y$  и  $\phi$ , введём новую масштабированную переменную  $\varphi = \epsilon\phi$ . Поскольку характерный период изгибных колебаний равен произведению параметра  $L/a$  и альвеновского времени посчитанного по характерному размеру в направлении поперечном к оси петли, вводим также масштабированное время  $\tau = \epsilon t$ . В новых переменных уравнения (3.3.77)-(3.3.79) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -\epsilon^{-2} \frac{B^4}{\rho B_0} \frac{\partial Q}{\partial \psi} + \frac{B^4}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (3.3.82)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial \tau^2} = -\epsilon^{-2} \frac{B^2}{\rho} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{B^2}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( B^2 \frac{\partial \xi_y}{\partial \varphi} \right), \quad (3.3.83)$$

$$Q = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{B_0} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \right). \quad (3.3.84)$$

Будем искать решение этой системы уравнений в виде разложений в степенные ряды по малому параметру  $\epsilon$ . Из уравнений (3.3.82) и (3.3.83) следует, что если разложения для  $u$  и  $\xi_y$  начинаются с членов порядка единицы, то разложение для  $Q$  должно начинаться с члена порядка  $\epsilon^2$ . Таким образом, разложения записываются в виде

$$u = u_1 + \dots, \quad \xi_y = \xi_{y1} + \dots, \quad Q = \epsilon^2 Q_1 + \dots, \quad (3.3.85)$$

где многоточия соответствуют членам более высокого порядка по  $\epsilon$ . Характерный пространственный масштаб изменения возмущений в поперечном направлении равен  $a$ , а в направлении вдоль петли этот масштаб равен  $L$ . Это означает что внутри петли и в её непосредственной окрестности равновесное магнитное поле может быть представлено в виде

$$B(\psi, \varphi) = B(\psi_0, \varphi) + O(\epsilon). \quad (3.3.86)$$

Подставляя уравнения (3.3.85) и (3.3.86) в (3.3.82)-(3.3.84) и собирая члены главного приближения по  $\epsilon$  получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = -\frac{B^4}{\rho B_0} \frac{\partial Q_1}{\partial \psi} + \frac{B^4}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2}, \quad (3.3.87)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{y1}}{\partial \tau^2} = -\frac{B^2}{\rho} \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{B^2}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( B^2 \frac{\partial \xi_{y1}}{\partial \varphi} \right), \quad (3.3.88)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \psi} + B_0 \frac{\partial \xi_{y1}}{\partial y} = 0, \quad (3.3.89)$$

где  $B$  вычисляется при  $\psi = \psi_0$ . Из уравнения (3.3.89) следует, что  $u_1$  и  $\xi_{y1}$  могут быть выражены через функцию тока  $\chi$ ,

$$u_1 = B_0 \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \xi_{y1} = -\frac{\partial \chi}{\partial \psi}. \quad (3.3.90)$$

Подставляя эти решения в уравнения (3.3.88) и (3.3.89) и используя перекрёстное дифференцирование чтобы исключить  $Q_1$ , получим уравнение для  $\chi$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( B^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} + B_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) - \frac{B^4}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( B^2 \frac{\partial^3 \chi}{\partial \psi^2 \partial \varphi} + B_0^2 \frac{\partial^3 \chi}{\partial y^2 \partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.3.91)$$

Введём полярные координаты в плоскости  $\psi y$ ,

$$\psi = \psi_0 + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (3.3.92)$$

(напомним что уравнение оси трубки имеет вид  $\psi = \psi_0$ ). Сечение трубки плоскостью  $\varphi = \text{const}$  в общем случае является искривлённой поверхностью. Используя разложение в ряд Тейлора получим

$$\varphi(x, z) - \varphi(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z - \bar{z}) + O((x - \bar{x})^2 + (z - \bar{z})^2), \quad (3.3.93)$$

где  $(\bar{x}, 0, \bar{z})$  — точка пересечения поверхности  $\varphi = \text{const}$  с осью трубки, а частные производные в правой части уравнения (3.3.93) вычисляются при  $x = \bar{x}$  и  $z = \bar{z}$ . Характерный пространственный масштаб изменения функции  $\varphi(x, z)$  равен  $L$ . Это означает, что отношение последнего члена в правой части уравнения (3.3.93) к первому и второму членам порядка  $\epsilon$ . Откуда следует, что в главном приближении по  $\epsilon$ , сечение трубки плоскостью  $\varphi = \text{const}$  является частью плоскости перпендикулярной оси трубки. Декартовы координаты в этой плоскости это  $y$  и  $\sigma$ . Поскольку ось  $\sigma$  ортогональна оси  $y$  и вектору  $\mathbf{B}$ , получаем, что единичный вектор оси  $\sigma$  равен  $\hat{\psi}$ .

В дальнейшем предполагаем, что граница трубки определяется уравнением  $r = a$ . В первом приближении по  $\epsilon$  величины  $\sigma$  и  $\psi$  связаны соотношениями

$$\sigma = \sqrt{g_{\psi\psi}}(\psi - \psi_0) = (B_0/B)(\psi - \psi_0).$$

В первом приближении по  $\epsilon$ , уравнения определяющие линию пересечения границы трубки с плоскостью  $\sigma y$  имеют вид

$$\sigma = a(B_0/B) \cos \theta, \quad y = a \cos \theta.$$

Эти уравнения задают эллипс с полуосями равными  $a$  и  $a(B_0/B)$ , где  $B$  вычисляется на оси трубки. Как видим, в то время как ось эллипса параллельная оси  $y$  имеет постоянную длину, длина другой оси изменяется вдоль трубки.

В дальнейшем отыскиваем собственные моды колебаний петли и полагаем возмущения всех величин пропорциональными  $\exp(-i\Omega\tau)$ . В новых переменных, уравнение (3.3.91) принимает вид

$$\frac{B^4}{\mu_0 \rho B_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right] + \Omega^2 \mathcal{L}[\chi] = 0, \quad (3.3.94)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\chi] &= (B^2 \cos^2 \theta + B_0^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \\ &+ (B_0^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \\ &- (B^2 - B_0^2) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (3.3.95)$$

Выражение для  $\mathcal{L}[\partial\chi/\partial\varphi]$  получается из выражения для  $\mathcal{L}[\chi]$  подстановкой  $\partial\chi/\partial\varphi$  вместо  $\chi$ .

Перепишем теперь граничные условия (3.3.80) в терминах  $\chi$ . Для преобразования первого граничного условия найдём выражение для вектора нормального к границе магнитной трубки. Поскольку  $r = a$  на границе, а декартовы координаты произвольной точки являются функциями  $\psi$ ,  $y$  и  $\varphi$ , уравнение границы в декартовых координатах может быть записано в виде

$$x = x(\psi_0 + a \cos \theta, \varphi), \quad y = a \sin \theta, \quad z = z(\psi_0 + a \cos \theta, \varphi). \quad (3.3.96)$$

Здесь учтено что  $x$  и  $z$  являются функциями  $\psi$  и  $\varphi$ , но не зависят от  $y$ . Уравнение (3.3.96) задаёт границу в параметрической форме с параметрами  $\theta$  и  $\varphi$ . Векторы

$$\mathbf{l}_\theta = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right), \quad \mathbf{l}_\varphi = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right), \quad (3.3.97)$$

являются касательными векторами к границе. Для нахождения компонент этих векторов используем соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta} &= -a \sin \theta \frac{\partial x}{\partial \psi}, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= a \cos \theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -a \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \psi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.3.98)$$

С помощью уравнения (3.3.70) получим

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{B_0}{B^2} \begin{pmatrix} B_z & B_x \\ -B_x & B_z \end{pmatrix}.$$

Используя этот результат, уравнение (3.3.98) и соотношение между  $\varphi$  и  $\phi$ , находим

$$\mathbf{l}_\theta = \frac{a}{B^2} (-B_0 B_z \sin \theta, B^2 \cos \theta, B_0 B_x \sin \theta), \quad \mathbf{l}_\varphi = \frac{B_0 \mathbf{b}}{\epsilon B^2}.$$

Теперь находим нормальный вектор к границе,

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{l}_\varphi \times \mathbf{l}_\theta}{|\mathbf{l}_\theta \times \mathbf{l}_\varphi|} = N(B_z \cos \theta, B_0 \sin \theta, -B_x \cos \theta) \\ &= N(B\hat{\boldsymbol{\psi}} \cos \theta + B_0\hat{\mathbf{y}} \sin \theta).\end{aligned}\quad (3.3.99)$$

где

$$N = (B^2 \cos^2 \theta + B_0^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}.$$

При выводе этого выражения использовалось уравнение (3.3.71). Нормальная к поверхности трубки компонента смещения плазмы даётся выражением

$$\begin{aligned}\xi_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi} &= N(u \cos \theta + B_0 \xi_y \sin \theta) \\ &= NB_0 \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \sin \theta \right) = \frac{NB_0}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta},\end{aligned}$$

которое справедливо только в главном порядке по малому параметру  $\epsilon$  поскольку, при его выводе,  $u$  и  $\xi_y$  были заменены на  $u_1$  и  $\xi_{y1}$ . Используя выражение для  $\xi_n$  и принимая во внимание что  $B$ , а, следовательно, и  $N$ , непрерывно на границе трубки, сводим первое граничное условие в уравнении (3.3.80) к виду

$$[[\chi]] = 0 \quad \text{at} \quad r = a. \quad (3.3.100)$$

Для того чтобы переписать второе граничное условие в уравнении (3.3.80) в терминах  $\chi$  необходимо выразить  $Q_1$  через  $\chi$ . Для этого полагаем, что  $u_1$ ,  $\xi_{y1}$  и  $Q_1$  пропорциональны  $\exp(-i\Omega\tau)$ . После этого преобразуем уравнения (3.3.87) и (3.3.88) к переменным  $r$  и  $\theta$ , умножаем первое уравнение на  $\sin \theta$ , второе на  $B^2 \sin \theta$  и складываем результаты. В результате, с помощью уравнения (3.3.90), выразим  $\partial Q_1 / \partial \theta$  через  $\chi$ . Подставляя это выражение во второе граничное условие в уравнении (3.3.80) предварительно продифференцированное по  $\theta$ , получим

$$\left[ \left[ \frac{B^4}{\mu_0 B_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{M} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right] + \rho \Omega^2 \mathcal{M}[\chi] \right] \right] = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad (3.3.101)$$

где

$$\mathcal{M}[\chi] = (B^2 \cos^2 \theta + B_0^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{(B^2 - B_0^2)}{2a} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \sin 2\theta, \quad (3.3.102)$$

а выражение для  $\mathcal{M}[\partial \chi / \partial \varphi]$  получается из выражения для  $\mathcal{M}[\chi]$  подстановкой  $\partial \chi / \partial \varphi$  вместо  $\chi$ .

Наконец, из уравнений (3.3.81) и (3.3.90) следует что  $\chi$  постоянно при  $\varphi = \varphi_{1,2}$ . Поскольку  $\chi$  определяется с точностью до произвольной функции  $\varphi$ , можно положить

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_{1,2}. \quad (3.3.103)$$

### 3.3.3с. Собственные моды петель с малым расширением

Для того чтобы исследовать изгибные колебания аналитически рассмотрим корональные петли с малым расширением. В таких петлях изменение величины магнитного поля вдоль петли мало. В соответствии с этим положим

$$B^2 = B_0^2[1 + \lambda q(\varphi)], \quad (3.3.104)$$

где  $\lambda \ll 1$ , а функция  $q(\varphi)$  порядка единицы. После этого используем регулярный метод возмущений и ищем решение в форме

$$\chi = \chi_1 + \lambda\chi_2, \quad \Omega = \Omega_1 + \lambda\Omega_2. \quad (3.3.105)$$

(i) Первое приближение. В первом приближении подставляем разложения (3.3.104) и (3.3.105) в уравнение (3.3.94) и граничные условия (3.3.100), (3.3.101) и (3.3.103). После этого собираем члены порядка единицы. В результате имеем

$$\left( \frac{B_0^2}{\mu_0\rho} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \Omega_1^2 \right) \left( \frac{\partial^2\chi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\chi_1}{\partial\theta^2} \right) = 0, \quad (3.3.106)$$

$$\llbracket \chi_1 \rrbracket = \left[ \left( \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \rho\Omega_1^2 \right) \frac{\partial\chi_1}{\partial r} \right] = 0 \quad \text{at} \quad r = a, \quad (3.3.107)$$

$$\chi_1 = 0 \quad \text{at} \quad \varphi = \varphi_{1,2}. \quad (3.3.108)$$

Обозначим выражение во вторых скобках в уравнении (3.3.106) через  $f$ . Тогда из уравнения (3.3.108) следует, что  $f = 0$  при  $\varphi = \varphi_{1,2}$ . В результате получаем для  $f$  задачу Штурма-Лиувилля

$$\frac{B_0^2}{\mu_0\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \Omega_1^2 f = 0, \quad f = 0 \quad \text{at} \quad \varphi = \varphi_{1,2}. \quad (3.3.109)$$

Поскольку величина  $B_0^2/(\mu_0\rho)$  равна квадрату альвеновской скорости, эта задача описывает собственные альвеновские колебания (внутри трубки при



$\rho = \rho_i$  и вне трубки при  $\rho = \rho_e$ ). В дальнейшем предполагаем, что собственные частоты изгибных колебаний не совпадают с альвеноскими частотами как внутри так и вне трубки. В этом случае  $\Omega_1^2$  не является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (3.3.109) и, следовательно, единственным решением является  $f = 0$ . Из этого следует, что уравнение (3.3.106) сводится к

$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.3.110)$$

В дальнейшем рассматриваем только изгибные колебания, поэтому полагаем

$$\chi_1 = \chi_c(r, \varphi) \cos \theta + \chi_s(r, \varphi) \sin \theta. \quad (3.3.111)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.3.110) получим

$$\frac{\partial^2 \chi_{c,s}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_{c,s}}{\partial r} - \frac{\chi_{c,s}}{r^2} = 0. \quad (3.3.112)$$

Функции  $\chi_c(r, \varphi)$  и  $\chi_s(r, \varphi)$  должны удовлетворять граничным условиям (3.3.107). Решение уравнения (3.3.112) регулярное при  $r = 0$ , стремящееся к нулю при  $r \rightarrow \infty$  и удовлетворяющее первому граничному условию (3.3.107) даётся выражением

$$\chi_{c,s}(r, \varphi) = A_{c,s}(\varphi) \begin{cases} r, & r < a, \\ a^2/r, & r > a. \end{cases} \quad (3.3.113)$$

Подстановка этого решения во второе граничное условие (3.3.114) даёт

$$\frac{d^2 A_{c,s}}{d\varphi^2} + \frac{\Omega_1^2}{C_k^2} A_{c,s} = 0, \quad C_k^2 = \frac{2B_0^2}{\mu_0(\rho_i + \rho_e)}. \quad (3.3.114)$$

Это уравнение совпадает с уравнением выведенным в работе Dumova and Ruderman (2005) для изгибных колебаний прямой магнитной трубки с круговым сечением с постоянным радиусом. Это ожидаемый результат, потому что в первом приближении по  $\lambda$  пренебрегается эффектом изменения поперечного сечения вдоль петли. Из уравнения (3.3.108) следует, что функции  $A_c(\varphi)$  и  $A_s(\varphi)$  должны удовлетворять граничным условиям

$$A_{c,s}(\varphi) = 0 \quad \text{at} \quad \varphi = \varphi_{1,2}. \quad (3.3.115)$$

Уравнение (3.3.114) с граничным условием (3.3.115) образует проблему Штурма-Лиувилля. Нетривиальное решение этой проблемы существует

только когда  $\Omega_1^2$  является собственным значением. В этом случае нетривиальное решение единственно с точностью до умножения на произвольную постоянную. Обозначим это решение через  $A_1(\varphi)$ . Тогда

$$A_c(\varphi) = C_c A_1(\varphi), \quad A_s(\varphi) = C_s A_1(\varphi), \quad (3.3.116)$$

где  $C_c$  и  $C_s$  – постоянные, в общем случае комплексные.

(ii) Второе приближение. Во втором приближении собираем члены порядка  $\lambda$  в уравнении (3.3.94) и граничных условиях (3.3.100), (3.3.101) and (3.3.103). Тогда, используя уравнения (3.3.111), (3.3.113), (3.3.114) и (3.3.116), получим

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \theta^2} = 0, \quad r < a, \quad (3.3.117)$$

$$\left( \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_e} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Omega_1^2 \right) \left( \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.3.118)$$

$$= -\frac{2}{r^3} \left( \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_e} \frac{\partial}{\partial \varphi} q \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + q \Omega_1^2 A_1 \right) (C_c \cos 3\theta + C_s \sin 3\theta), \quad r > a,$$

$$[\chi_2] = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad (3.3.119)$$

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho \Omega_1^2 \right) \frac{\partial \chi_2}{\partial r} \right] &= \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{d}{d\varphi} q \frac{dA_1}{d\varphi} \\ &\times (3C_c \cos \theta + C_s \sin \theta + C_c \cos 3\theta + C_s \sin 3\theta) \\ &- \frac{q}{2} A_1 \Omega_1^2 [2\rho_i (C_c \cos \theta + 2C_s \sin \theta) \\ &+ \rho_e (3C_c \cos \theta + 3C_s \sin \theta - C_c \cos 3\theta - C_s \sin 3\theta)] \\ &+ 2\Omega_1 \Omega_2 A_1 (\rho_i + \rho_e) (C_c \cos \theta + C_s \sin \theta) \quad \text{при} \quad r = a, \end{aligned} \quad (3.3.120)$$

$$\chi_2 = 0 \quad \text{at} \quad \varphi = \varphi_{1,2}. \quad (3.3.121)$$

Уравнение (3.3.117) для  $\chi_2$  внутри петли совпадает с уравнением (3.3.110) для  $\chi_1$ . Легко проверить, что  $\chi = r[F_c(\varphi) \cos \theta + F_s(\varphi) \sin \theta]$ , где  $F_c(\varphi)$  и  $F_s(\varphi)$  – произвольные функции, является точным решением уравнения (3.3.94). Это свойство данного уравнения связано с тем фактом, что, в приближении тонкой трубки, петля движется как единое целое, т.е. смещения всех точек произвольного поперечного сечения одни и те же. Решение уравнения (3.3.117) записывается в виде

$$\chi_2 = r[A_{2c}(\varphi) \cos \theta + A_{2s}(\varphi) \sin \theta], \quad r < a, \quad (3.3.122)$$

где  $A_{2c}(\varphi)$  и  $A_{2e}(\varphi)$  – произвольные функции. Из уравнения (3.3.121) следует  $A_{2c,s}(\varphi_{1,2}) = 0$ .

Решение уравнения (3.3.118) отыскивается в виде

$$\begin{aligned} \chi_2 &= r^{-1}[\tilde{A}_{2c}(\varphi) \cos \theta + \tilde{A}_{2s}(\varphi) \sin \theta] \\ &+ \tilde{\chi}_2(r, \varphi)(C_c \cos 3\theta + C_s \sin 3\theta). \end{aligned} \quad (3.3.123)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.3.118) получим

$$\begin{aligned} &\left( \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_e} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Omega_1^2 \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\chi}_2}{\partial r} - \frac{9}{r^2} \tilde{\chi}_2 \right) \\ &= -\frac{2}{r^3} \left( \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_e} \frac{\partial}{\partial \varphi} q \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + q \Omega_1^2 A_1 \right). \end{aligned} \quad (3.3.124)$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$\tilde{\chi}_2 = a^2 r^{-1} A_3(\varphi) + r^{-3} f(\varphi), \quad (3.3.125)$$

где  $f(\varphi)$  – произвольная функция, а  $A_3(\varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_e} \frac{d^2 A_3}{d\varphi^2} + \Omega_1^2 A_3 = \frac{B_0^2}{4\mu_0 \rho_e} \frac{d}{d\varphi} q \frac{dA_1}{d\varphi} + \frac{q}{4} \Omega_1^2 A_1. \quad (3.3.126)$$

Подставляя уравнение (3.3.123) в уравнение (3.3.119) и используя уравнение (3.3.125) получим  $f(\varphi) = -a^4 A_3(\varphi)$ ,  $\tilde{A}_{2c} = a^2 A_{2c}(\varphi)$  и  $\tilde{A}_{2s} = a^2 A_{2s}(\varphi)$ , так что окончательно

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{a^2}{r} [A_{2c}(\varphi) \cos \theta + A_{2s}(\varphi) \sin \theta] \\ &+ A_3(\varphi) \left( \frac{a^2}{r} - \frac{a^4}{r^3} \right) (C_c \cos 3\theta + C_s \sin 3\theta), \quad r > a. \end{aligned} \quad (3.3.127)$$

Из уравнения (3.3.121) следует  $A_3(\varphi_{1,2}) = 0$ .

Подставим теперь уравнения (3.3.122) и (3.3.127) в граничное условие (3.3.120) и соберём члены пропорциональные  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  и  $(C_c \cos 3\theta + C_s \sin 3\theta)$ . В результате получим уравнения для  $A_{2c}$ ,  $A_{2s}$ , и  $A_3$ . Уравнение для  $A_3$  совпадает с (3.3.126), а уравнения для  $A_{2c}$  и  $A_{2s}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_{2c}}{d\varphi^2} + \frac{\Omega_1^2}{C_k^2} A_{2c} &= -C_c \left( \frac{3}{4} \frac{d}{d\varphi} q \frac{dA_1}{d\varphi} \right. \\ &\left. - \frac{q\mu_0}{4B_0^2} (2\rho_i + 3\rho_e) \Omega_1^2 A_1 + \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{C_k^2} A_1 \right), \end{aligned} \quad (3.3.128)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_{2s}}{d\varphi^2} + \frac{\Omega_1^2}{C_k^2} A_{2s} &= -C_s \left( \frac{1}{4} \frac{d}{d\varphi} q \frac{dA_1}{d\varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q\mu_0}{4B_0^2} (4\rho_i + 3\rho_e) \Omega_1^2 A_1 + \frac{2\Omega_1\Omega_2}{C_k^2} A_1 \right). \end{aligned} \quad (3.3.129)$$

Однородные аналоги уравнений (3.3.128) и (3.3.129) совпадают с уравнением (3.3.117), так что они имеют нетривиальное решение  $A_1(\varphi)$ . После этого из общей теории линейных операторов следует, что уравнения (3.3.128) и (3.3.129) имеют решение только в том случае когда их правые части ортогональны  $A_1(\varphi)$ . Эти условия разрешимости могут быть получены непосредственно. Для этого умножаем каждое из уравнений (3.3.128) и (3.3.129) на  $A_1$  и интегрируем по  $\varphi$  от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ . Используя интегрирование по частям и граничное условие  $A_{2c,s}(\varphi_{1,2}) = 0$  получим, что интегралы от левых частей уравнений (3.3.128) и (3.3.129) равны нулю. Из этого следует, что интегралы от правых частей этих уравнений также равны нулю. Снова используя интегрирование по частям получим условия

$$\begin{aligned} C_c (\Omega_2 - \Omega_{2h}) &= 0, \quad \Omega_{2h} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{A_1^2}{C_k^2} d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{q}{8} \left[ \frac{\mu_0\Omega_1}{B_0^2} (2\rho_i + 3\rho_e) A_1^2 + \frac{3}{\Omega_1} \left( \frac{dA_1}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi, \end{aligned} \quad (3.3.130)$$

$$\begin{aligned} C_s (\Omega_2 - \Omega_{2v}) &= 0, \quad \Omega_{2v} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{A_1^2}{C_k^2} d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{q}{8} \left[ \frac{\mu_0\Omega_1}{B_0^2} (4\rho_i + 3\rho_e) A_1^2 + \frac{1}{\Omega_1} \left( \frac{dA_1}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (3.3.131)$$

В общем случае  $\Omega_{2h} \neq \Omega_{2v}$ . После этого из уравнений (3.3.128) и (3.3.129) следует или  $C_c \neq 0$  и  $\Omega_2 = \Omega_{2h}$ , или  $C_s \neq 0$  и  $\Omega_2 = \Omega_{2v}$ . Используя уравнения (3.3.90), (3.3.92), (3.3.111), (3.3.113), (3.3.116) и соотношение  $u = \xi_\psi$ , нетрудно получить

$$\xi_{\psi 1} = C_s A_1(\varphi), \quad \xi_{y 1} = -C_c A_1(\varphi). \quad (3.3.132)$$

Этот результат означает что  $C_s \neq 0$  соответствует вертикальным колебаниям, а  $C_c \neq 0$  — горизонтальным колебаниям. Как видим, второе приближение устраняет вырождение системы при котором частоты вертикальных и горизонтальных колебаний совпадают. Теперь собственные

моды колебаний не могут быть поляризованы произвольно. Они могут быть поляризованы только или в горизонтальном или в вертикальном направлении.

### 3.3.3d. Уравнения в физических переменных

В первом приближении по  $\lambda$  собственные функции и частоты изгибных колебаний корональной петли определяются уравнением (3.3.114) с граничными условиями (3.3.115). Поправки второго порядка к собственным функциям даются уравнениями (3.3.130) и (3.3.131). Все эти уравнения записаны в переменных которые не удобны для сравнения как с теоретическими результатами полученными ранее, так и с результатами наблюдений. Поэтому в данном разделе эти уравнения будут записаны в физических переменных. Начнём с введения длины  $s$  вдоль оси петли. Поскольку  $g_{\phi\phi} = (B_0/B)^2$ , получим  $ds = (B_0/B) d\phi = \epsilon^{-1}(B_0/B) d\varphi$ , так что

$$s = B_0 \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\phi'}{B(\phi')} = \epsilon^{-1} B_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{B(\varphi')}. \quad (3.3.133)$$

Также введём  $\xi_v = \epsilon \xi_{\psi_1}$ ,  $\xi_h = \epsilon \xi_{y_1}$  и  $\tilde{\omega}_1 = \epsilon^{-1} \Omega_1$ . В этих новых переменных уравнение (3.3.114) с граничными условиями (3.3.115) принимает форму

$$\frac{1}{B} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{B} \frac{d\tilde{\xi}}{ds} \right) + \frac{\tilde{\omega}_1^2}{B_0^2 C_k^2} \tilde{\xi} = 0, \quad \tilde{\xi} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, L, \quad (3.3.134)$$

где  $L$  — длина петли определяемая выражением

$$L = B_0 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{B(\phi)}, \quad (3.3.135)$$

а  $\tilde{\xi} = \xi_v$  или  $\tilde{\xi} = \xi_h$ . Напомним теперь что  $B^2 = B_0^2[1 + \lambda q(s)]$  и будем искать решение задачи на собственные значения (3.3.134) в форме  $\tilde{\xi} = \xi + \lambda \xi_2$  и  $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 + \lambda \tilde{\omega}_2$ . После этого в первом приближении по  $\lambda$  получим

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \frac{\omega_1^2}{C_k^2} \xi = 0, \quad \xi = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, L, \quad (3.3.136)$$

где  $\xi = \xi_v + O(\lambda)$  или  $\xi = \xi_h + O(\lambda)$ . Задача на собственные значения (3.3.134) совпадает с задачей полученной в работе *Dumova and Ruderman (2005)* для изгибных колебаний прямой магнитной трубки с круговым сечением с постоянным радиусом и с плотностью меняющейся вдоль трубки.

В следующем приближении получим

$$\frac{d^2\xi_2}{ds^2} + \frac{\omega_1^2}{C_k^2}\xi_2 = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{d}{ds}q \frac{d\xi}{ds} - \frac{\omega_1^2}{C_k^2}q\xi - \frac{4\omega_1\tilde{\omega}_2}{C_k^2}\xi \right), \quad (3.3.137)$$

с  $\xi_2 = 0$  при  $s = 0, L$ . Умножая это уравнение на  $q$ , интегрируя результат по  $s$  и используя уравнение (3.3.136) и интегрирование по частям, получим условие разрешимости этой задачи на собственные значения,

$$\tilde{\omega}_2 \int_0^L \frac{\xi^2}{C_k^2} d\xi = -\frac{1}{4\omega_1^2} \int_0^L q \left[ \left( \frac{d\xi}{ds} \right)^2 + \frac{\omega_1^2}{C_k^2}\xi^2 \right] ds. \quad (3.3.138)$$

Введём теперь  $\omega = \epsilon^{-1}\Omega$  и положим  $\omega = \omega_1 + \lambda\omega_2$ . После этого имеем

$$\omega_1 + \lambda\omega_2 = \epsilon^{-1}(\Omega_1 + \lambda\Omega_2) = \tilde{\omega}_1 + \lambda\epsilon^{-1}\Omega_2,$$

так что  $\omega_2 = \epsilon^{-1}\Omega_2 + \tilde{\omega}_2$ . Используя этот результат, уравнение (3.3.138), а также уравнения (3.3.128) и (3.3.129) переписанные в переменных  $s$  и  $\xi$ , окончательно получим выражение для частоты вертикальных,  $\omega_v$ , и горизонтальных,  $\omega_h$ , колебаний петли,

$$\omega_{v,h} = \omega_1 + \lambda\omega_{2v,h}, \quad (3.3.139)$$

где

$$\omega_{2v} \int_0^L \frac{\xi^2}{C_k^2} ds = \int_0^L \frac{q}{8} \left[ \frac{\mu_0\omega_1}{B_0^2}(3\rho_i + 2\rho_e)\xi^2 - \frac{1}{\omega_1} \left( \frac{d\xi}{ds} \right)^2 \right] ds, \quad (3.3.140)$$

$$\omega_{2h} \int_0^L \frac{\xi^2}{C_k^2} ds = \int_0^L \frac{q}{8} \left[ \frac{\mu_0\omega_1}{B_0^2}(\rho_i + 2\rho_e)\xi^2 + \frac{1}{\omega_1} \left( \frac{d\xi}{ds} \right)^2 \right] ds. \quad (3.3.141)$$

Для проверки полученных результатов рассмотрим изгибные колебания прямой однородной магнитной трубки с эллиптическим сечением. Для этого будем считать  $q$  ненулевой константой. Тогда полуоси эллиптического сечения равны  $a$  и  $b = a(1 - \lambda q/2)$ . Решение задачи на собственные значения (3.3.136) соответствующее фундаментальной моде записывается в виде  $\xi = \sin(\pi s/L)$ ,  $\omega_1 = \pi C_k/L$ . После этого, вычисляя  $\omega_{2v}$  и  $\omega_{2h}$ , получим

$$\omega_{2v} = \frac{\pi q C_k (5\rho_i + 3\rho_e)}{8L(\rho_i + \rho_e)}, \quad \omega_{2h} = \frac{\pi q C_k (3\rho_i + 5\rho_e)}{8L(\rho_i + \rho_e)}.$$

Сравним эти результаты с результатами полученными в Разделе 3.3.1. Подставляя  $b = a(1 - \lambda q/2)$  и  $B^2 = B_0^2(1 + \lambda q)$  в уравнение (3.3.42) с

$\rho\omega_A^2 = B^2/\mu_0$  и разлагая полученные выражения по степеням  $\lambda$  до членов пропорциональных  $\lambda$ , получим для  $\omega_{1c}$  и  $\omega_{1s}$  те же выражения что были получены, соответственно, для  $\omega_{2v}$  и  $\omega_{2h}$ .

### 3.3.3е. Экспоненциально убывающее магнитное поле в изотермической атмосфере

В качестве примера рассмотрим невозмущённое состояние в котором потенциал магнитного поля и функция магнитного потока даются выражениями

$$\phi = le^{-kz} \sin(kx), \quad \psi = le^{-kz} \cos(kx). \quad (3.3.142)$$

Картина магнитных линий качественно совпадает с той что показана на Рис. 3.3.4. Предполагается что отношение плотностей внутри и вне трубки постоянно,  $\rho_i/\rho_e = \zeta > 1$ . Петля погружена в изотермическую атмосферу, так что

$$\rho_e = \rho_0 e^{-z/H}, \quad (3.3.143)$$

где  $H$  — шкала высот. Основания петли находятся в точках с координатами  $z = 0$ ,  $x = \pm x_0$ , так что  $\psi_0 = l \cos(kx_0)$ . Уравнение оси трубки имеет вид

$$e^{kz} = \frac{\cos(kx)}{\cos(kx_0)}, \quad |kx| \leq kx_0. \quad (3.3.144)$$

Используя уравнения (3.3.142) и (3.3.144) выразим  $z$  через  $\phi$ ,

$$e^{-2kz} = l^{-2}\phi^2 + \cos^2(kx_0). \quad (3.3.145)$$

Из уравнений (3.3.70) и (3.3.142) следует

$$B_x = B_0 l k e^{-kz} \cos(kx), \quad B_z = -B_0 l k e^{-kz} \sin(kx), \quad (3.3.146)$$

так что

$$\frac{B^2}{B_0^2} = 1 + \lambda q(\phi) = (lk)^2 e^{-2kz} = k^2 \phi^2 + (lk)^2 \cos^2(kx_0). \quad (3.3.147)$$

Это уравнение означает что

$$\lambda q(\phi) = k^2 \phi^2 + (lk)^2 \cos^2(kx_0) - 1. \quad (3.3.148)$$

Функция  $|\phi(x, z)|$  изменяется от значения  $l \sin(kx_0)$  принимаемого у оснований петли до нуля в вершине петли, так что  $\lambda q(\phi)$  изменяется от  $(lk)^2 - 1$  до  $(lk)^2 \cos^2(kx_0) - 1$ . Условие  $|q(\phi)| \lesssim 1$  означает

$$(lk)^2 = 1 + O(\lambda), \quad \cos^2(kx_0) = 1 + O(\lambda). \quad (3.3.149)$$

Из второго уравнения (3.3.149) следует  $(kx_0)^2 = O(\lambda)$ . Поскольку  $\lambda$  является произвольным параметром, положим

$$\lambda = (kx_0)^2 \quad (3.3.150)$$

Для того чтобы удовлетворить первое уравнение (3.3.149) полагаем

$$l = k^{-1}(1 + \alpha\lambda), \quad (3.3.151)$$

где  $\alpha$  — постоянная порядка единицы. После этого из уравнения (3.3.148) следует что

$$q(\phi) = x_0^{-2}\phi^2 + 2\alpha - 1 + O(\lambda). \quad (3.3.152)$$

Теперь уравнение оси петли (3.3.144) может быть переписано в приближённой форме

$$z = \frac{1}{2}x_0\sqrt{\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right].$$

Как видим, петля имеет приближённо параболическую форму. Отношение высоты петли к расстоянию между её основаниями равно малой величине  $\frac{1}{4}\sqrt{\lambda}$ .

Петля имеет эллиптическое сечение с горизонтальной полуосью равной  $a$ . Вертикальная полуось равна  $(B_0/B)a \approx a(1 - \frac{1}{2}\lambda q)$  которая, в соответствии с уравнениями (3.3.142) и (3.3.150)-(3.3.152), монотонно возрастает с высотой от  $a(1 - \alpha\lambda)$  у оснований петли до  $a[1 - (\alpha - 1/2)\lambda]$  в вершине.

Расстояние вдоль петли связано с потенциалом магнитного поля уравнением (3.3.133). Используя уравнения (3.3.142), (3.3.147) и (3.3.152) получим из этого уравнения

$$\begin{aligned} s &\approx \int_{-x_0[1+(\alpha-1/6)\lambda]}^{\phi} \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} (x_0^{-2}\phi'^2 + 2\alpha - 1) \right] d\phi' \\ &= \phi + x_0 + \lambda \left[ \left( \alpha - \frac{1}{6} \right) x_0 - \frac{\phi^3 + x_0^3}{6x_0^2} - \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) (\phi + x_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.153)$$

Подставляя  $\phi = x_0[1 + (\alpha - 1/6)\lambda]$  в уравнение (3.3.153) получим выражение для длины петли,  $L \approx (2 + \lambda/3)x_0$ . Используя (3.3.153) перепишем выражение для  $q$  в виде

$$q(s) = (s/x_0 - 1)^2 + 2\alpha - 1 + O(\lambda). \quad (3.3.154)$$

Предположим теперь, что  $H$  и  $L$  — величины одного порядка. Поскольку высота петли порядка  $L\sqrt{\lambda}$ , это означает что относительное изменение плотности вдоль петли порядка  $\sqrt{\lambda}$ . Учёт этого изменения плотности должен привести к поправке порядка  $\sqrt{\lambda}$  к  $\omega_1$ . Эта поправка одна и та



же для вертикальных и горизонтальных колебаний. Поскольку основной интерес представляет разница частот вертикальных и горизонтальных колебаний, в дальнейшем пренебрегаем изменением плотности вдоль петли. После этого  $C_k = \text{const}$  и решение задачи на собственные значения (3.3.136) соответствующее фундаментальной моде записывается в виде

$$\xi = \xi_0 \sin \frac{\pi s}{L}, \quad \omega_1 = \frac{\pi C_k}{L}, \quad (3.3.155)$$

где  $\xi_0$  — постоянная. Интегралы в уравнениях (3.3.140) и (3.3.141) с  $q(s)$  и  $\xi$  определяемыми, соответственно, уравнениями (3.3.154) и (3.3.155), легко вычисляются. В результате получаем

$$\omega_{2v} = \frac{C_k[\pi^2(5\zeta + 3)(6\alpha + 1) - 6(7\zeta + 5)]}{24\pi^2 L(\zeta + 1)}, \quad (3.3.156)$$

$$\omega_{2h} = \frac{C_k[\pi^2(3\zeta + 5)(6\alpha + 1) - 6(\zeta + 3)]}{24\pi^2 L(\zeta + 1)}. \quad (3.3.157)$$

При выводе этих выражений полагалось  $x_0 \approx L/2$ . Разница частот вертикальных и горизонтальных колебаний равна

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_v - \omega_h = \lambda(\omega_{2v} - \omega_{2h}) \\ &= \frac{\lambda C_k[\pi^2(\zeta - 1)(6\alpha + 1) - 6(3\zeta + 1)]}{12\pi^2 L(\zeta + 1)}. \end{aligned} \quad (3.3.158)$$

Как видим, в общем случае  $\omega_v \neq \omega_h$ . Равенство имеет место только когда

$$\alpha = \frac{3\zeta + 1}{\pi^2(\zeta - 1)} - \frac{1}{6}.$$

Положим  $\alpha = 0$ . В этом случае сечение петли у её оснований является круговым с радиусом равным  $a$ . Вертикальная полуось  $b$  эллиптического сечения монотонно возрастает с высотой от  $a$  у оснований петли до  $a(1 + \lambda/2)$  в вершине петли. Подставляя  $\alpha = 0$  в уравнение (3.3.158) получим

$$\Delta\omega = -\frac{\lambda C_k(3\zeta + 1)}{2\pi^2 L(\zeta + 1)},$$

так что  $\omega_v < \omega_h$ . Этот результат находится в полном соответствии с результатами полученными в Разделе 3.3.1, где было показано что частота изгибных колебаний магнитной трубки с эллиптическим сечением поляризованных в направлении большой оси меньше чем частота колебаний поляризованных в направлении малой оси. Поскольку при  $\alpha = 0$  вертикальная ось эллиптического сечения везде больше горизонтальной оси, не удивительно что частота вертикальных колебаний меньше частоты горизонтальных.

### 3.3.4. Выводы

В настоящей главе рассмотрено влияние формы поперечного сечения на изгибные колебания корональных петель. Были исследованы изгибные и желобковые колебания однородной трубки с эллиптическим сечением и произвольным отношением большой полуоси сечения к длине трубки. Однако аналитические выражения для частот колебаний удаётся получить только в приближении тонкой трубки. Показано, что существуют две бесконечные последовательности частот, одна — монотонно убывающая, а другая — монотонно возрастающая. Обе последовательности сходятся к частоте изгибных колебаний тонкой трубки с круговым сечением. Первый член первой последовательности является частотой изгибной моды поляризованной в направлении малой оси эллиптического сечения, а остальные члены — частотами желобковых мод. Первый член второй последовательности является частотой изгибной моды поляризованной в направлении большой оси эллиптического сечения, а остальные члены — опять частотами желобковых мод. При умеренном отношении полуосей эллиптического сечения не превышающего 2 частоты двух изгибных волновых мод, одной поляризованной вдоль малой оси сечения и другой поляризованной вдоль большой оси, отличаются от частоты изгибных колебаний тонкой трубки с круговым сечением меньше чем на 20%.

Далее результаты полученные для трубки с постоянной плотностью были затем обобщены для трубки с плотностью изменяющейся вдоль оси. При этом с самого начала использовалось приближение тонкой трубки. В основном качественно результаты совпадают с результатами полученными для трубки с постоянной плотностью. Единственным качественным отличием является отклонение от 2 отношения частот первого обертона к частоте фундаментальной моды изгибных колебаний.

В последнем разделе настоящей главы рассмотрены изгибные колебания магнитной трубки в которой эллиптичность сечения связана с учётом кривизны трубки. В рассмотренной модели сечение трубки является эллипсом в котором ось перпендикулярная плоскости петли постоянна вдоль трубки, а другая ось возрастает от основания петли к вершине. В результате, в общем случае частота изгибных колебаний поляризованных перпендикулярно плоскости петли (горизонтальные колебания) отличается от частоты колебаний поляризованных в плоскости петли (вертикальные

колебания). Большинство наблюдаемых изгибных колебаний корональных петель поляризованы горизонтально. Однако иногда наблюдаются и вертикально поляризованные колебания (Wang and Solanki, 2004; Wang et al., 2008; Aschwanden and Schrijver, 2011).

К настоящему времени нет информации об одновременном наблюдении вертикально и горизонтально поляризованных изгибных колебаний корональных магнитных петель. Произвольное возмущение корональной петли должно вызывать колебания обоих видов. По-видимому, тот факт что до сих пор наблюдались только колебания с одним видом поляризации объясняется тем что в наблюдениях доминирует тот вид колебаний который имеет бóльшую амплитуду. Можно надеяться что в дальнейшем, при улучшении качества наблюдений, будут наблюдаться колебания корональных петель являющиеся суперпозицией вертикально и горизонтально поляризованных колебаний. Отношение частот колебаний с двумя типами колебаний может использоваться в сейсмологических целях для получения информации о поперечном сечении корональных петель.

#### **3.4. Изгибные колебания магнитных трубок с продольным током**

В предыдущих главах предполагалось, что магнитное поле потенциально в невозмущённом состоянии, т.е. отсутствует электрический ток. Однако потенциальное восстановление магнитного поля в короне по измерению поля в фотосфере показывает, что площадь поперечного сечения петли в вершине должна в несколько раз превышать площадь сечения у основания петли. Этот результат противоречит наблюдениям показывающим что площадь сечения почти не меняется вдоль петли. Один из способов согласовать теорию с наблюдениями — отказаться от модели потенциального невозмущённого магнитного поля и сделать предположение что имеется продольный ток в петле. Этот ток вызывает закрутку магнитных линий вокруг оси петли. В связи с этим встаёт проблема исследования влияния продольного тока на изгибные колебания магнитной трубки. Влияние продольного тока на распространяющиеся изгибные волны было исследовано в работе Bennett et al. (1999) в приближении несжимаемой жидкости, справедливость применения которого для исследования волн в короне весьма сомнительна. Аналогичное исследование для стоячих волн было впервые

проведено в работе Ruderman (2007). В дальнейшем следуем этой работе.

### 3.4.1. Невозмущённое состояние, уравнения и граничные условия

Рассматривается прямая магнитная трубка с продольным током имеющим постоянную плотность. Поперечное сечение трубки — круговое с постоянным радиусом  $R$ . Используется приближение холодной плазмы. Введём цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  с осью  $z$  совпадающей с осью трубки. Длина трубки равна  $L$ , а концы заморожены в плотную фотосферную плазму и неподвижны. Плотность плазмы  $\rho$  зависит от  $z$  и меняется скачком на границе трубки,

$$\rho = \begin{cases} \rho_i(z), & r < R, \\ \rho_e(z), & r > R. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Предполагается что  $\rho_e(z) < \rho_i(z)$ . Невозмущённое магнитное поле имеет азимутальную и аксиальную компоненты и зависит только от  $r$ . Оно определяется выражением

$$\mathbf{B} = \begin{cases} (0, B_{\varphi i}, B_{zi}), & r < R, \\ (0, B_{\varphi e}, B_{ze}), & r > R. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Магнитное поле удовлетворяет условию равновесия

$$\frac{dB^2}{dr} = -\frac{2B_{\varphi}^2}{r}. \quad (3.4.3)$$

Поскольку это уравнение справедливо как внутри так и вне трубки, индексы ‘ $i$ ’ и ‘ $e$ ’ опущены. В дальнейшем эти индексы так же опускаются когда очевидно в какой области, внутри или вне трубки, записаны уравнения. В общем случае невозмущённое магнитное поле может быть разрывным на границе трубки, однако оно должно удовлетворять условию непрерывности магнитного давления,

$$B_i^2 = B_e^2. \quad (3.4.4)$$

Движение плазмы описывается линеаризованными уравнениями магнитной гидродинамики. Поскольку исследование проводится в приближении холодной плазмы, то используются только уравнение движения (1.2.10)

и уравнение индукции (1.2.12). В компонентах эти уравнения записываются в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{B}{\mu_0} \mathcal{D}_{\parallel} b_r - \frac{2B_{\varphi} b_{\varphi}}{r\mu_0}, \quad (3.4.5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial t^2} = -\mathcal{D}_{\perp} P + \frac{B}{\mu_0} \mathcal{D}_{\parallel} b_{\perp} + \frac{b_r}{\mu_0} \left[ \frac{B_z}{rB} \frac{d(rB_{\varphi})}{dr} - \frac{B_{\varphi}}{B} \frac{dB_z}{dr} \right], \quad (3.4.6)$$

$$b_r = B \mathcal{D}_{\parallel} \xi_r, \quad (3.4.7)$$

$$b_{\perp} = B \mathcal{D}_{\parallel} \xi_{\perp} + \xi_r \left[ \frac{B_{\varphi}}{rB} \frac{d(rB_z)}{dr} - \frac{B_z}{B} \frac{dB_{\varphi}}{dr} \right], \quad (3.4.8)$$

$$P = -\frac{B_{\varphi}}{\mu_0} \frac{\partial(\xi_r B_{\varphi})}{\partial r} - \frac{B_z}{r\mu_0} \frac{\partial(r\xi_r B_z)}{\partial r} - \frac{B^2}{\mu_0} \mathcal{D}_{\perp} \xi_{\perp}. \quad (3.4.9)$$

Здесь  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_r, \xi_{\varphi}, \xi_z)$  и  $\mathbf{b} = (b_r, b_{\varphi}, b_z)$  – смещение плазмы и возмущение магнитного поля;  $P = (B_{\varphi} b_{\varphi} + B_z b_z)/\mu_0$  – возмущение магнитного давления;  $\xi_{\perp} = (B_z \xi_{\varphi} - B_{\varphi} \xi_z)/B$ ,  $b_{\perp} = (B_z b_{\varphi} - B_{\varphi} b_z)/B$ ;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость свободного пространства. Операторы  $\mathcal{D}_{\perp}$  и  $\mathcal{D}_{\parallel}$  определяются выражениями

$$\mathcal{D}_{\perp} = \frac{B_z}{rB} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{B_{\varphi}}{B} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathcal{D}_{\parallel} = \frac{B_{\varphi}}{rB} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_z}{B} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.4.10)$$

Заметим что компонента смещения плазмы параллельная невозмущённому магнитному полю,  $\xi_{\parallel} = (B_{\varphi} \xi_{\varphi} + B_z \xi_z)/B$ , равна нулю в приближении холодной плазмы.

Поскольку магнитные линии заморожены в плотную плазму на концах трубки и неподвижны, то компоненты смещения плазмы перпендикулярные к невозмущённому магнитному полю равны нулю при  $z = 0, L$ . Отсюда следуют граничные условия

$$\xi_r = \xi_{\perp} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, L. \quad (3.4.11)$$

На возмущённой границе трубки радиальное смещение плазмы и возмущение магнитного давления должны быть непрерывны. В линейном приближении эти условия записываются в виде

$$\xi_{ri} = \xi_{re} \quad \text{при} \quad r = R, \quad (3.4.12)$$

$$P_i - \frac{B_{\varphi i}^2}{\mu_0 R} \xi_{ri} = P_e - \frac{B_{\varphi e}^2}{\mu_0 R} \xi_{re} \quad \text{при} \quad r = R. \quad (3.4.13)$$

Решение можно искать в виде разложения в ряды Фурье по  $\varphi$  и исследовать поведение одной фурье-компоненты полагая что возмущения всех

переменных пропорциональны  $e^{im\varphi}$ , где  $m$  — целое число,  $m \neq 0$ . Кроме того, ищем решения в виде собственных волновых мод и полагаем что возмущения всех величин пропорциональны  $e^{-i\omega t}$ . После этого, исключая  $b_r$  и  $b_\perp$  из уравнений (3.4.5)-(3.4.9), получим после некоторых вычислений систему для  $\xi_r$ ,  $\xi_\perp$  и  $P$ :

$$\left(\rho\omega^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\mathcal{D}_\parallel^2\right)\xi_r + \frac{2B_\varphi}{r\mu_0}\frac{\partial(B_\varphi\xi_r)}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2BB_\varphi}{r\mu_0}\frac{\partial\xi_\perp}{\partial z}, \quad (3.4.14)$$

$$\left(\rho\omega^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\mathcal{D}_\parallel^2\right)\xi_\perp = \mathcal{D}_\perp P - \frac{2B_\varphi B_z}{r\mu_0}\mathcal{D}_\parallel\xi_r, \quad (3.4.15)$$

$$P = -\frac{B^2}{r\mu_0}\frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + \frac{2B_\varphi^2}{r\mu_0}\xi_r - \frac{B^2}{\mu_0}\mathcal{D}_\perp\xi_\perp, \quad (3.4.16)$$

где операторы  $\mathcal{D}_\perp$  and  $\mathcal{D}_\parallel$  теперь сводятся к виду

$$\mathcal{D}_\perp = -\frac{B_\varphi}{B}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{imB_z}{rB}, \quad \mathcal{D}_\parallel = \frac{B_z}{B}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{imB_\varphi}{rB}. \quad (3.4.17)$$

При выводе уравнения (3.4.16) использовалось (3.4.3), а при выводе уравнения (3.4.14) — (3.4.3) и (3.4.16).

Если предположить, что трубка однородна (т.е.  $\rho$  не зависит от  $z$ ) и положить все переменные пропорциональными  $e^{ikz}$ , то можно исключить  $\xi_\perp$  и получить систему уравнений для  $\xi_r$  и  $P$ . Эта система уравнений совпадает с системой представленной в работе Appert et al. (1974) если в последней перейти к приближению холодной плазмы. Если из этой системы далее исключить  $P$ , то получим уравнение для  $\xi_r$  представленное в работе Hain and Lüst (1958).

Система уравнений (3.4.14)-(3.4.16) с граничными условиями (3.4.11)-(3.4.13) используются в следующем разделе для изучения собственных неосесимметричных колебаний магнитной трубки.

### 3.4.2. Собственные неосесимметричные колебания

В этом разделе выводится уравнение для неосесимметричных колебаний в тонкой магнитной трубке в присутствии продольного тока. Прежде всего рассмотрим невозмущённое состояние. Предположение что трубка тонкая означает, что  $\epsilon = R/L \ll 1$ . Кроме того, предполагаем что во внешней области магнитное поле везде параллельно оси трубки и имеет постоянную величину, так что  $B_{\varphi e} = 0$  и  $B_{ze} = B_0 = \text{const}$ . Внутри трубки

азимутальная компонента магнитного поля является линейной функцией радиальной координаты. После этого из уравнений (3.4.3) и (3.4.4) следует

$$B_{\varphi i} = Ar, \quad B_{zi}^2 = B_0^2 + 2A^2(R^2 - r^2), \quad (3.4.18)$$

где  $A \geq 0$  – постоянная. Для того чтобы удовлетворить критерию устойчивости Шафранова-Крускала (см. напр. Roberts, 1956; Shafranov, 1958; Kruskal and Tuck, 1958) предполагаем, что  $A = \epsilon \tilde{A}$  с  $\tilde{A} \lesssim B_0/R$ . Последнее условие хорошо согласуется с наблюдениями показывающими что азимутальная компонента магнитного поля в корональных магнитных петлях много меньше аксиальной. Имеется также чисто математическое основание для предположения что  $AR \sim \epsilon B_0$ . Альвеновская частота играет важную роль в теории волн и колебаний в магнитных трубках. В однородной трубке с закрученными магнитными линиями она даётся выражением  $\omega_A = (B_0 z k + mA)/B_0$ , где  $k$  – аксиальное волновое число. Для того чтобы иметь сравнимые вклады азимутального и аксиального магнитных полей необходимо предположить, что  $AR \sim \epsilon B_0$ .

Введём растягивающую переменную  $Z = \epsilon z$ . В дальнейшем отыскиваем низкочастотные собственные волновые моды удовлетворяющие оценке  $\omega \sim B_0/L\sqrt{\mu_0\rho_i}$  и полагаем  $\omega = \epsilon\Omega$ .

### 3.4.2a. Решение внутри трубки

В том случае когда магнитное поле задаётся уравнением (3.4.18) система уравнений (3.4.14)-(3.4.16) приводится к виду

$$\left( \rho_i \Omega^2 + \frac{B_i^2}{\mu_0} \tilde{\mathcal{D}}_{\parallel}^2 \right) \xi_r + \frac{2\tilde{A}^2}{\mu_0} \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} = \epsilon^{-2} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2\tilde{A}B_i}{\mu_0} \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial Z}, \quad (3.4.19)$$

$$\epsilon^2 \left( \rho_i \Omega^2 + \frac{B_i^2}{\mu_0} \tilde{\mathcal{D}}_{\parallel}^2 \right) \xi_{\perp} = \mathcal{D}_{\perp} P - \frac{2\epsilon^2 \tilde{A} B_{zi}}{\mu_0} \tilde{\mathcal{D}}_{\parallel} \xi_r, \quad (3.4.20)$$

$$P = -\frac{B_i^2}{r\mu_0} \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + \frac{2\epsilon^2 \tilde{A}^2 r}{\mu_0} \xi_r - \frac{B_i^2}{\mu_0} \mathcal{D}_{\perp} \xi_{\perp}, \quad (3.4.21)$$

где оператор  $\tilde{\mathcal{D}}_{\parallel}$  определяется выражением

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\parallel} = \frac{B_{zi}}{B_i} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{im\tilde{A}}{B_i}, \quad (3.4.22)$$

а оператор  $\mathcal{D}_\perp$  преобразуется к более простому виду

$$\mathcal{D}_\perp = -\frac{\epsilon^2 \tilde{A}r}{B_i} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{imB_{zi}}{rB_i}. \quad (3.4.23)$$

Подставляя выражение (3.4.21) для  $P$  в уравнение (3.4.20) получим

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \rho_i \Omega^2 \xi_\perp + \frac{B_i^2}{\mu_0} \left( \epsilon^2 \frac{\partial^2 \xi_\perp}{\partial Z^2} - \frac{m^2}{r^2} \xi_\perp \right) &= -\frac{B_i^2}{r\mu_0} \mathcal{D}_\perp \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} \\ &+ \frac{2\epsilon^2 \tilde{A}^2 r}{\mu_0} \mathcal{D}_\perp \xi_r - \frac{2\epsilon^2 \tilde{A} B_{zi}}{\mu_0} \tilde{\mathcal{D}}_\parallel \xi_r. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Для решения этого уравнения используем регулярный метод возмущений и ищем решение в виде разложения

$$\xi_\perp = \xi_\perp^{(0)} + \epsilon^2 \xi_\perp^{(1)} + \dots \quad (3.4.25)$$

Подставляя это разложение в уравнение (3.4.24) получим в нулевом приближении

$$\xi_\perp^{(0)} = \frac{iB_{zi}}{mB_i} \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r}. \quad (3.4.26)$$

В первом приближении находим

$$\xi_\perp^{(1)} = \frac{r^2}{m^2} \left[ \frac{i}{m} \frac{\partial^3(r\xi_r)}{\partial r \partial Z^2} - \frac{i\tilde{A}r}{B_0} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r \partial Z} + \frac{i\mu_0 \rho_i \Omega^2}{mB_0^2} \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + \frac{\tilde{A}}{B_0} \frac{\partial \xi_r}{\partial Z} \right]. \quad (3.4.27)$$

Подстановка уравнений (3.4.25)-(3.4.27) в (3.4.21) даёт

$$P = \epsilon^2 \frac{r}{m^2} \left( \rho_i \Omega^2 + \frac{B_0^2}{\mu_0} \tilde{\mathcal{D}}_\parallel^2 \right) \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} - \epsilon^2 \frac{2iB_0 \tilde{A}r}{m\mu_0} \tilde{\mathcal{D}}_\parallel \xi_r + O(\epsilon^4). \quad (3.4.28)$$

Заметим что в уравнения (3.4.27) и (3.4.28) было подставлено  $B_0$  вместо  $B_i$  поскольку разница между этими двумя величинами порядка  $\epsilon^2$ . Подставляя уравнения (3.4.26)-(3.4.28) в уравнение (3.4.19) и собирая члены порядка единицы получим

$$\left( \Omega^2 + \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_i} \tilde{\mathcal{D}}_\parallel^2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} - m^2 \xi_r \right) = 0. \quad (3.4.29)$$

Равенство нулю первого множителя соответствует альвеновским волнам распространяющимся внутри трубки. В дальнейшем альвеновские волны исключаются из анализа и предполагается что  $\Omega^2$  заметно отличается от любого собственного значения оператора определяемого дифференциальным выражением  $-(B_0^2/\mu_0 \rho_i) \tilde{\mathcal{D}}_\parallel^2$  и нулевыми граничными условиями при



$Z = 0, \epsilon L$ . Точнее, предполагается, что относительная разница между любым собственным значением и  $\Omega^2$  порядка единицы. После этого уравнение (3.4.29) сводится к

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} - m^2 \xi_r = 0. \quad (3.4.30)$$

Решение этого уравнения регулярное при  $r = 0$  имеет вид

$$\xi_r = r^{|m|-1} \eta(Z), \quad (3.4.31)$$

где  $\eta(Z)$  – произвольная функция удовлетворяющая условиям  $\eta(0) = \eta(\epsilon L) = 0$ . С помощью уравнения (3.4.31) легко получить

$$P = \epsilon^2 r^{|m|} \left[ \frac{B_0^2}{\mu_0 |m|} \frac{d^2 \eta}{dZ^2} + \frac{2i \tilde{A} B_0 (|m| - 1)}{m \mu_0} \frac{d\eta}{dZ} + \frac{\tilde{A}^2 (2 - |m|)}{\mu_0} \eta + \frac{\rho_i \Omega^2}{|m|} \eta \right] + O(\epsilon^4), \quad (3.4.32)$$

$$\xi_{\perp} = i r^{|m|-1} \eta(Z) \operatorname{sgn}(m) + O(\epsilon^2). \quad (3.4.33)$$

### 3.4.2b. Решение вне трубки

Во внешней области характерный пространственный масштаб в радиальном направлении в общем тот же что и в аксиальном направлении, т.е. он равен  $L$ . Это означает что в радиальном направлении также необходимо ввести растягивающую переменную  $X = \epsilon r$ . После этого система уравнений (3.4.14)-(3.4.16) для внешней области сводится к

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial Z^2} + \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} \xi_r = \frac{\epsilon^{-1} \mu_0}{B_0^2} \frac{\partial P}{\partial X}, \quad (3.4.34)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{\perp}}{\partial Z^2} + \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} \xi_{\perp} = \frac{i \epsilon^{-1} m \mu_0}{X B_0^2} P, \quad (3.4.35)$$

$$P = -\frac{\epsilon B_0^2}{X \mu_0} \left[ \frac{\partial(X \xi_r)}{\partial X} + i m \xi_{\perp} \right]. \quad (3.4.36)$$

Исключая  $\xi_r$  и  $\xi_{\perp}$  из этой системы уравнений получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{1}{X} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \left( \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} - \frac{m^2}{X^2} \right) P = 0. \quad (3.4.37)$$

Из уравнения (3.4.36) и граничных условий (3.4.11) следует, что  $P = 0$  при  $Z = 0, \epsilon L$ . Будем искать решение уравнения (3.4.37) с разделяющимися

переменными,  $P(X, Z) = F(X)G(Z)$ . Подставляя это выражение в уравнение (3.4.37), разделяя переменные и используя граничные условия для  $P$  получим уравнение для  $F(X)$

$$\frac{d^2 F}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{dF}{dX} - \left( k^2 + \frac{m^2}{X^2} \right) F = 0, \quad (3.4.38)$$

и задачу Штурма-Лиувилля для  $G(Z)$

$$\frac{d^2 G}{dZ^2} + \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} G = -k^2 G, \quad G = 0 \quad \text{при} \quad Z = 0, \epsilon L. \quad (3.4.39)$$

В уравнениях (3.4.38) и (3.4.39)  $k$  – постоянная. В соответствии с общей теорией (см. напр. Coddington and Levinson, 1955) собственные значения задачи Штурма-Лиувилля образуют монотонно возрастающую последовательность  $\{k_n^2\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причём  $k_n^2 \rightarrow \infty$  когда  $n \rightarrow \infty$ . Обозначим через  $G_n$  собственную функцию задачи Штурма-Лиувилля (3.4.39) соответствующую собственному значению  $k_n^2$ . Имеется две возможности: или  $k_1^2 > 0$ , и тогда все собственные значения положительны, или  $k_1^2 < 0$ , и тогда имеется одно или несколько отрицательных собственных значений.

Если  $k_n^2 > 0$ , то уравнение (3.4.38) – модифицированное уравнение Бесселя. С точностью до мультипликативной константы его решение убывающее на бесконечности даётся выражением  $F(X) = K_{|m|}(k_n X)$ , где  $K_{|m|}$  – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция МакДональда). Если  $k_n^2 < 0$ , то уравнение (3.4.38) – уравнение Бесселя. С точностью до константы его решение, удовлетворяющее условию излучения, даётся выражением  $F(X) = H_{|m|}^{(1)}(|k_n|X)$  (см. напр. Cally, 1986, 2003), где  $H_{|m|}^{(1)}$  – функция Ганкеля первого рода. Наконец, если  $k_n = 0$ , то решение убывающее на бесконечности даётся выражением  $F(X) = X^{-|m|}$ . Обозначим через  $N$  число отрицательных собственных значений, т.е.  $k_n^2 < 0$  при  $n = 1, \dots, N$ ,  $k_{N+1}^2 \geq 0$  и  $k_n^2 > 0$  при  $n \geq N + 2$ . По определению  $N = 0$  когда  $k_1^2 \geq 0$ . Общее решение уравнения (3.4.37) даётся выражением

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^N P_n G_n(Z) H_{|m|}^{(1)}(|k_n|R) + \chi A_{N+1} G_{N+1}(Z) R^{-|m|} \\ &+ \sum_{n=N+1+\chi}^{\infty} P_n G_n(Z) K_{|m|}(k_n R), \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

где  $\chi = 1$  в том случае когда  $k_{N+1} = 0$ . Если  $k_{N+1}^2 > 0$  то  $\chi = 0$  и второй член в правой части уравнения (3.4.40) отсутствует.

В дальнейшем используем только выражение (3.4.40) для  $P$  и уравнение (3.4.34).

### 3.4.2с. Сращивание решений

Для сращивания решений во внутренней и внешней областях используем граничные условия (3.4.12) и (3.4.13). Прежде всего перепишем эти условия в виде

$$\frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial Z^2} + \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} \xi_{ri} = \frac{\partial^2 \xi_{re}}{\partial Z^2} + \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} \xi_{re} \quad \text{при } r = R, \quad (3.4.41)$$

$$P_i - \epsilon^2 \frac{a \tilde{A}^2}{\mu_0} \xi_{ri} = P_e \quad \text{при } r = R. \quad (3.4.42)$$

Используя уравнение (3.4.34) представим уравнение (3.4.41) в виде

$$\frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial Z^2} + \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} \xi_{ri} = \frac{\epsilon^{-1} \mu_0}{B_0^2} \frac{\partial P_e}{\partial X} \quad \text{at } r = R. \quad (3.4.43)$$

В окрестности трубки ( $r \sim R$ ) используем асимптотические разложения функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя (Abramowitz and Stegun, 1964)

$$K_m(x) \sim \frac{(m-1)!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, \quad H_m^{(1)}(x) \sim -\frac{i(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}, \quad (3.4.44)$$

справедливые при  $|x| \ll 1$ , где  $m > 0$ . После этого для  $P$  получим асимптотическое разложение

$$P_e = f(Z) \left(\frac{\epsilon R}{X}\right)^{|m|}, \quad (3.4.45)$$

где

$$f(Z) = (\epsilon R)^{-|m|} \left\{ 2^{|m|} (|m| - 1)! \left[ -\frac{i}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{P_n G_n(Z)}{|k_n|^{|m|}} + \frac{1}{2} \sum_{n=N+1+\chi}^{\infty} \frac{P_n G_n(Z)}{k_n^{|m|}} \right] + \chi A_{N+1} G_{N+1}(Z) \right\}. \quad (3.4.46)$$

Подставляя уравнение (3.4.45) в уравнение (3.4.43) и используя уравнение (3.4.31) получим

$$f(Z) = -\epsilon^2 R^{|m|} \frac{B_0^2}{\mu_0 |m|} \left( \frac{d^2 \eta}{dZ^2} + \frac{\mu_0 \rho_e \Omega^2}{B_0^2} \eta \right). \quad (3.4.47)$$

Теперь подставим  $P_e$  с функцией  $f(Z)$  определяемой уравнением (3.4.47) в уравнение (3.4.42), используем уравнения (3.4.31) и (3.4.32), и возвращаемся к первоначальным переменным. В результате, после некоторых вычислений, получим задачу Штурма-Лиувилля определяющую собственную функцию  $\eta$  и собственную частоту  $\omega$  колебаний трубки:

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{iA[m - \text{sgn}(m)]}{B_0} \frac{d\eta}{dz} + \left( \frac{\omega^2}{C_k^2} - \frac{A^2|m|(|m| - 1)}{2B_0^2} \right) \eta = 0, \quad (3.4.48)$$

$$\eta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, L,$$

где

$$C_k^2(z) = \frac{2B^2}{\mu_0[\rho_i(z) + \rho_e(z)]}. \quad (3.4.49)$$

При  $A = 0$  уравнение (3.4.49) совпадает с уравнением (2.2.67) если в последнем положить  $R(z) = \text{const}$ . Подстановка

$$\eta = h \exp\left(-\frac{izA[m - \text{sgn}(m)]}{2B_0}\right) \quad (3.4.50)$$

преобразует задачу Штурма-Лиувилля (3.4.48) к виду

$$\frac{d^2h}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{C_k^2} - \frac{A^2(m^2 - 1)}{4B_0^2} \right) h = 0, \quad h = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, L. \quad (3.4.51)$$

Эта задача определяет собственные частоты и соответствующие собственные функции колебаний трубки с  $m \neq 0$ .

### 3.4.3. Собственные волновые моды колебаний трубки

Прежде всего отметим, что в случае изгибных колебаний ( $m = \pm 1$ ) член содержащий  $A$  в уравнении (3.4.51) равен нулю. Таким образом, кручение магнитных линий вызванное наличием продольного тока в магнитной трубке не влияет на частоты изгибных колебаний.

Задача на собственные значения (3.4.51) является самосопряжённой, так что все её собственные значения действительны. Поскольку собственные функции определены с точностью до умножения на произвольную комплексную постоянную, можно предположить, что все собственные функции действительны. Умножая уравнение (3.4.51) на  $h$ , интегрируя полученное уравнение, получим

$$\omega^2 \int_0^L \frac{h^2}{C_k^2} dz = \int_0^L \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 dz + \frac{A^2(m^2 - 1)}{4B_0^2} \int_0^L h^2 dz. \quad (3.4.52)$$

Это уравнение показывает, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (3.4.51) положительны, так что неустойчивые волновые моды отсутствуют.

Хотя в данной главе исследуются стоячие волны, для интерпретации результатов настоящего раздела необходимо сначала рассмотреть распространяющиеся волны в магнитной трубке с однородной плотностью. Поскольку замена переменной (3.4.50) изменяет волновое число, для исследования распространяющихся волн используем уравнение (3.4.48). Подставляя  $\eta = \eta_0 \exp(ikz)$  в уравнение (3.4.48) получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = C_k^2 \left\{ k^2 + \frac{A[m - \operatorname{sgn}(m)]}{2B_0^2} (2B_0k + Am) \right\}. \quad (3.4.53)$$

Поскольку это уравнение инвариантно относительно подстановки  $(-m, -k) \rightarrow (m, k)$ , в дальнейшем полагаем  $k > 0$ . Из уравнения (3.4.53) следует, что для каждого  $|m| > 1$  имеются две распространяющиеся желобковые моды: одна соответствует  $m > 0$ , другая  $m < 0$ . Обозначим частоты этих двух мод, соответственно,  $\omega_{m+}$  и  $\omega_{m-}$ . Полагая  $m > 0$  получим

$$\omega_{m\pm}^2 = C_k^2 \left\{ k^2 + \frac{A(m-1)}{2B_0^2} (Am \pm 2B_0k) \right\}. \quad (3.4.54)$$

Поскольку  $\omega_{m+}^2 > \omega_{m-}^2$ , назовём эти желобковые моды ускоренная и замедленная. Очевидно  $\omega_{m+}^2$  — монотонно возрастающая функция  $k$ , а  $\omega_{m-}^2$  принимает минимальное значение равное  $\frac{1}{4}(m^2 - 1)(A/B_0)^2$  при  $k = \frac{1}{2}(m-1)(A/B_0)$ .

Переходя теперь к исследованию стоячих волн прежде всего отметим что уравнение (3.4.51) не зависит от знака  $m$ . Таким образом, существует только одна стоячая волна для каждого  $|m| \geq 1$ , так что в дальнейшем будем рассматривать только  $m > 0$ . В трубке с постоянной плотностью квадрат частоты стоячей волны даётся выражением

$$\omega_{mf}^2 = C_k^2 \left( \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{A^2(m^2 - 1)}{4B_0^2} \right). \quad (3.4.55)$$

Поучительно связать стоячие и распространяющиеся волны. В трубке с прямыми магнитными линиями фундаментальная стоячая мода является суперпозицией двух волн с длиной  $2L$  распространяющихся в двух противоположных направлениях. В трубке со скрученными магнитными линиями ситуация более сложная. Из уравнения (3.4.53) следует, что для любых

значений  $\omega$  и  $m > 0$  имеются две распространяющиеся волновые моды. Волновые числа этих двух волновых мод даются выражением

$$k_{\pm} = -\frac{A(m-1)}{2B_0} \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{C_k^2} - \frac{A^2(m^2-1)}{4B_0^2}}. \quad (3.4.56)$$

Теперь отыскиваем решение соответствующее стоячей волне в виде суперпозиции двух распространяющихся волн с волновыми числами  $k_+$  and  $k_-$ . Из граничного условия  $\eta = 0$  при  $z = 0$  следует, что, с точностью до умножения на произвольную постоянную,

$$\eta = \exp(ik_+z) - \exp(ik_-z).$$

Используя граничное условие  $\eta = 0$  при  $z = L$  получим  $(k_+ - k_-)L = 2\pi$ . Подставляя выражения (3.4.56) для  $k_+$  и  $k_-$  в это уравнение в итоге получаем уравнение (3.4.55). Подстановка уравнения (3.4.55) в уравнение (3.4.56) даёт

$$k_{\pm} = -\frac{A(m-1)}{2B_0} \pm \frac{\pi}{L}. \quad (3.4.57)$$

Как видим, фундаментальная стоячая мода снова является суперпозицией двух распространяющихся волн однако, при  $m \neq 1$ , длины ни одной из этих двух волн не равны  $2L$ . Более того, когда  $A(m-1)/B_0 > 2\pi/L$ , обе волны распространяются в одном направлении.

Докажем что фундаментальная мода изгибных колебаний является захваченной при условии что  $\rho_i(z)/\rho_e(z) = \text{const}$ . Для этого необходимо доказать что, в случае фундаментальной моды,  $k_1^2 > 0$ . Поскольку  $k_1^2$  является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (3.4.39) с соответствующей собственной функцией  $G_1(z)$ , из уравнения (3.4.39) следует что

$$\epsilon^2 k_1^2 = -\frac{1}{G_1} \frac{d^2 G_1}{dz^2} - \frac{\mu_0 \rho_e \omega_1^2}{B_0^2}, \quad (3.4.58)$$

где  $\omega_1$  — собственная частота фундаментальной моды. Отметим что  $G_1(z)$  не обращается в нуль при  $z \in (0, L)$ . Далее,  $\omega_1^2$  является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (3.4.51) с  $m = 1$  и соответствующей собственной функцией  $h_1(z)$ , которая также не обращающаяся в нуль при  $z \in (0, L)$ . Теперь, исключая  $\omega_1^2$  с помощью уравнения (3.4.51) и используя уравнение (3.4.49), перепишем уравнение (3.4.58) в виде

$$\epsilon^2 k_1^2 G_1^2 = -G_1 \frac{d^2 G_1}{dz^2} + \frac{2\rho_e G_1^2}{h_1(\rho_i + \rho_e)} \frac{d^2 h_1}{dz^2}. \quad (3.4.59)$$

После некоторых вычислений, приведём (3.4.59) к уравнению

$$\epsilon^2 k_1^2 G_1^2 = -\frac{\rho_i - \rho_e}{\rho_i + \rho_e} G_1 \frac{d^2 G_1}{dz^2} - \frac{2\rho_e G_1}{h_1(\rho_i + \rho_e)} \frac{d}{dz} \left[ h_1^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{G_1}{h_1} \right) \right]. \quad (3.4.60)$$

Интегрируя это уравнения и используя граничные условия  $G_1 = h_1 = 0$  при  $z = 0, L$ , получим

$$\epsilon^2 k_1^2 \int_0^L G_1^2 dz = \frac{\rho_i - \rho_e}{\rho_i + \rho_e} \int_0^L \left( \frac{dG_1}{dz} \right)^2 + \frac{2\rho_e}{\rho_i + \rho_e} \int_0^L h_1^2 \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{G_1}{h_1} \right) \right]^2 dz. \quad (3.4.61)$$

Очевидно, из этого уравнения следует  $k_1^2 > 0$ .

#### 3.4.4. Выводы

В этой главе были рассмотрены колебания тонкой скрученной магнитной трубки с концами замороженными в плотную фотосферную плазму. Использовалось приближение холодной плазмы. Предполагалось, что плотность плазмы как внутри так и вне трубки может меняться вдоль трубки, но не меняется в поперечных направлениях. Считалось, что плотность плазмы внутри трубки больше чем плотность снаружи. Магнитное поле вне трубки имело постоянную амплитуду и было направлено вдоль оси трубки. Поле внутри трубки имело как аксиальную так и азимутальную компоненты, причём предполагалось, что азимутальная компонента много меньше аксиальной. Более точно считалось, что отношение этих двух компонент порядка отношения радиуса трубки  $R$  к её длине  $L$ .

Рассматривались неосесимметричные колебания и полагалось, что возмущения всех величин пропорциональны  $\exp(im\varphi)$ , где  $m$  — целое число,  $m \neq 0$ . С помощью разложений по малому параметру  $\epsilon = R/L$  показано, что собственные частоты и собственные функции колебаний описываются задачей Штурма-Лиувилля (3.4.48).

Наиболее важный результат полученный в этой главе заключается в том что скрученность трубки не влияет на частоту изгибных колебаний ( $m = \pm 1$ ). Однако оказывается что этот результат верен только для частной невозмущённой конфигурации рассмотренной в данной главе. Terradas and Goossens (2012) рассмотрели стоячие волны в магнитной трубке, в которой кручение магнитных линий сосредоточено в кольцевой области внутри трубки. В этом случае оказывается что частота изгибных колебаний зависит от степени скрученности магнитных линий.

### 3.5. Изгибные колебания неплоских магнитных трубок

До сих пор рассматривались изгибные колебания или прямых магнитных трубок или кривых трубок с осью являющейся плоской кривой. Однако наблюдения показывают, что довольно часто ось петли не является плоской кривой (Aschwanden et al., 2008a, b; Aschwanden, 2009). Это означает что ось петли имеет не только кривизну, но и кручение. Поэтому представляется важным исследовать влияние кручения оси магнитной петли на её собственные колебания. Такое исследование было впервые проведено в работе Ruderman and Scott (2011). В этой главе будут представлены результаты данной работы.

#### 3.5.1. Невозмущённое состояние

Введём декартовы координаты  $x, y, z$  с осью  $z$  в вертикальном направлении и цилиндрические координаты  $\varpi, \varphi, x$  (см. Fig. 3.5.1). Декартовы и цилиндрические координаты связаны соотношениями

$$x = x, \quad y = \varpi \cos \varphi, \quad z = \varpi \sin \varphi. \quad (3.5.1)$$

Рассмотрим магнитное поле  $\mathbf{B}$  с компонентами определяемыми выражениями

$$B_x = \frac{q^2 B_0}{q^2 + \varpi^2}, \quad B_\varpi = 0, \quad B_\varphi = \frac{q\varpi B_0}{q^2 + \varpi^2}, \quad (3.5.2)$$

где  $q$  — постоянная. Нетрудно показать, что

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{2q\mathbf{B}}{q^2 + \varpi^2}. \quad (3.5.3)$$

Этот результат означает, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  является бессипловым и может быть использовано в качестве невозмущённого магнитного поля в приближении холодной плазмы. Параметрические уравнения магнитных линий имеют вид

$$x = q\varphi + x_0, \quad y = \varpi_0 \cos \varphi, \quad z = \varpi_0 \sin \varphi, \quad (3.5.4)$$

где  $x_0$  и  $\varpi_0$  — постоянные, т.е. магнитные линии являются спиралями с одним и тем же шагом равным  $2\pi q$ . Это означает что любая магнитная линия инвариантна по отношению к винтовому преобразованию пространства определяемому формулами

$$\varphi \mapsto \varphi + \tilde{\varphi}, \quad x \mapsto x + q\tilde{\varphi}, \quad (3.5.5)$$



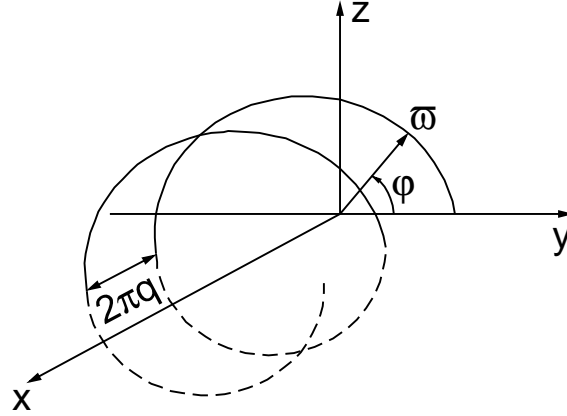


Рис. 3.5.1. Вспомогательные декартовы и цилиндрические координаты. Показана типичная магнитная линия. Часть этой линии находящаяся выше плоскости  $xy$  показана сплошной линией, а часть находящаяся ниже плоскости  $xy$  — пунктирной линией.

где  $\tilde{\varphi}$  — произвольная постоянная.

Предполагается что магнитные линии заморожены в плотную неподвижную фотосферную плазму при  $z = z_0$ . Одна из магнитных линий соответствующая  $x_0 = 0$  и  $\varpi_0 = R > |z_0|$  в уравнении (3.5.4) является осью магнитной петли. Её уравнение

$$x = q\varphi, \quad y = R \cos \varphi, \quad z = R \sin \varphi, \quad \varphi \in [\varphi_0, \pi - \varphi_0], \quad (3.5.6)$$

где  $\varphi_0 = \arcsin(z_0/R)$ . Ось магнитной трубки пересекает плоскость  $z = z_0$  в точках с координатами

$$\left( q\varphi_0, \sqrt{R^2 - z_0^2}, z_0 \right), \quad \left( q\pi - q\varphi_0, -\sqrt{R^2 - z_0^2}, z_0 \right). \quad (3.5.7)$$

Кривизна и кручение оси петли равны, соответственно,  $R(q^2 + R^2)^{-1}$  и  $q(q^2 + R^2)^{-1}$ . Необходимо отличать скрученность петли от её кручения. Кручение петли связано с формой её оси. Оно характеризует насколько петля является неплоской. Скрученность петли связана с поведением магнитных линий в окрестности оси петли. Прямая петля скручена если магнитные линии в окрестности её оси имеют вид спиралей. Как можно отличить скрученную петлю от нескрученной в том случае когда петля не является прямой? Как известно, в случае прямой петли скрученность создаёт электрический ток направленный вдоль петли. Это соотношение между скрученностью и электрическим током можно распространить также и на искривлённые петли и ввести следующее определение: магнитная петля является скрученной если имеется электрический ток текущий внутри петли вдоль петли, и не скрученной в противном случае. Из уравнения (3.5.3)

следует, что в модели корональной петли рассматриваемой в данной главе имеется электрический ток параллельный оси петли. Таким образом эта петля является скрученной.

Ось петли (или её продолжение если  $z_0 > 0$ ) пересекает плоскость  $xy$  в точке  $(0, R)$ . Введём плоскость  $\Pi_0$  ортогональную оси петли (или её продолжению) в этой точке и рассмотрим окружность  $\mathcal{C}_0$  радиуса  $a$  с центром в  $(0, R)$ , причём предполагается что  $a \ll R$ . Магнитные линии пересекающие плоскость  $\Pi_0$  в точках окружности  $\mathcal{C}_0$  образуют границу трубки. Плотность плазмы равна  $\rho_i$  внутри трубки и  $\rho_e$  вне трубки. Как  $\rho_i$  так и  $\rho_e$  могут изменяться вдоль петли, но не изменяются поперёк оси. При  $q = 0$  и  $\varphi_0 = 0$  получаем трубку в форме половинки тора.

Произведём винтовое преобразование пространства определяемое уравнением (3.5.5). Напомним, что каждая магнитная линия инвариантна относительно этого преобразования. В частности, это означает, что магнитная линия содержащая ось трубки отображается в себя. Поскольку винтовое преобразование является ортогональным преобразованием, оно отображает плоскость  $\Pi_0$  в плоскость  $\Pi$  которая ортогональна оси трубки в точке их пересечения. Окружность  $\mathcal{C}_0$  отображается в окружность  $\mathcal{C}$  с радиусом  $a$  в плоскости  $\Pi$  и с центром в точке пересечения плоскости  $\Pi$  с осью магнитной трубки. Поскольку каждая магнитная линия отображается в себя, каждая точка на окружности  $\mathcal{C}$  одновременно находится на границе трубки. Таким образом, окружность  $\mathcal{C}$  является пересечением плоскости  $\Pi$  с границей магнитной трубки. Из этого следует, что поперечное сечение трубки везде является окружностью с радиусом  $a$  и центром на оси трубки. Магнитная петля схематически изображена на Рис. 3.5.2. На Рис. 3.5.3 показаны проекции оси петли на горизонтальную плоскость для различных значений параметра  $q/R$ . Можно видеть, что проекции напоминают букву S, поэтому неплоские петли иногда называют петлями S-формы.

### 3.5.2. Криволинейные координаты

Введём малый параметр  $\varepsilon = a/R$ . В дальнейшем рассматриваем только возмущения, которые затухают вдали от петли с характерным масштабом равным  $a$ . Таким образом движение плазмы изучается только внутри петли и в её непосредственной окрестности. В результате криволинейные координаты необходимо ввести только в области вытянутой вдоль оси пет-

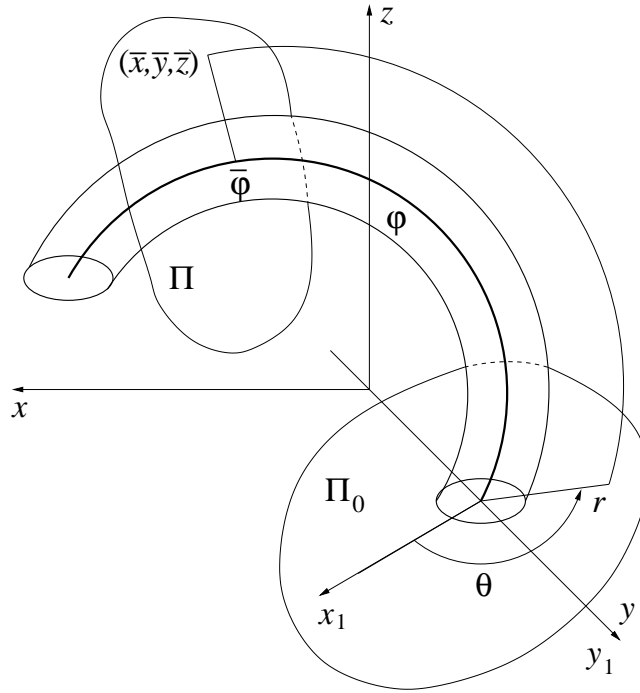


Рис. 3.5.2. Схематический рисунок невозмущённого состояния. Предполагается что концы магнитной трубки заморожены в плотную фотосферную плазму. Ось магнитной трубки показана толстой сплошной линией. Проиллюстрировано введение криволинейных координат.

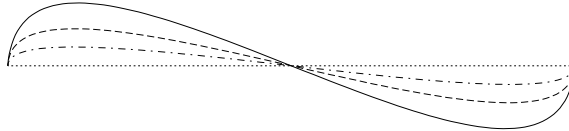


Рис. 3.5.3. Проекция оси петли на горизонтальную плоскость  $xy$ . Сплошная, пунктирная и штрих-пунктирная линии соответствуют  $q/R = 0.2, 0.1$  и  $0.05$ .

ли и с размерами в направлениях перпендикулярных оси в несколько раз превышающих  $a$ .

Построение криволинейной системы координат начнём с введения полярных координат в плоскости  $\Pi_0$ . Из параметрического уравнения оси петли (3.5.6) следует, что вектор

$$\mathbf{l} = (q, -R \sin \varphi, R \cos \varphi) \quad (3.5.8)$$

касается оси петли или её продолжения. Тогда уравнение плоскости  $\Pi_0$  имеет вид

$$qx + Rz = 0. \quad (3.5.9)$$

Введём новые декартовы координаты  $x_1, y_1, z_1$  связанные со старыми декартовыми координатами формулами

$$x_1 = \frac{Rx - qz}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \quad y_1 = y, \quad z_1 = \frac{qx + Rz}{\sqrt{R^2 + q^2}}. \quad (3.5.10)$$

В новых координатах уравнение плоскости  $\Pi_0$  имеет вид  $z_1 = 0$ , так что  $x_1$  и  $y_1$  являются декартовыми координатами в плоскости  $\Pi_0$ . Теперь вводим полярные координаты  $r$  и  $\theta$  в плоскости  $\Pi_0$  связанными с  $x_1$  и  $y_1$  формулами

$$x_1 = r \cos \theta, \quad y_1 = R + r \sin \theta. \quad (3.5.11)$$

В этих координатах уравнение окружности  $\mathcal{C}_0$  с радиусом  $a \ll R$  в плоскости  $\Pi_0$  с центром в точке с координатами  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = R$  имеет вид  $r = a$ . Из уравнений (3.5.10) и (3.5.11) находим что для любой точки  $(x, y, z) \in \Pi_0$ , имеем

$$x = \frac{Rr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \quad y = R + r \sin \theta, \quad z = -\frac{qr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}. \quad (3.5.12)$$

Криволинейные координаты произвольной токи  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  вводятся следующим образом. Сначала рассмотрим магнитную линию  $\mathcal{L}$ , которая проходит через эту точку. Эта магнитная линия пересекает плоскость  $\Pi_0$  в точке с полярными координатами  $r, \theta$  (см. Рис. 3.5.2);  $r$  и  $\theta$  являются первой и второй криволинейными координатами точки  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Для получения третьей криволинейной координаты рассмотрим плоскость  $\Pi$  ортогональную оси трубки и содержащую точку  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Эта плоскость пересекает ось трубки в точке соответствующей значению  $\bar{\varphi}$  параметра  $\varphi$ . Теперь криволинейные координаты точки  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  равны  $(r, \theta, \bar{\varphi})$ .

Выразим величины  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и  $\bar{z}$  через  $r$ ,  $\theta$  и  $\bar{\varphi}$ . Пусть магнитная линия  $\mathcal{L}$  пересекает плоскость  $\Pi_0$  в точке  $(x_c, y_c, z_c)$ . Параметрическое уравнение магнитной линии  $\mathcal{L}$  даётся уравнением (3.5.4), в которое подставлено  $\varphi'$  вместо  $\varphi$  для того чтобы не смешивать параметр магнитной линии  $\mathcal{L}$  с третьей координатой криволинейной системы координат. Из уравнения (3.5.4) следует, что  $\bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \varpi_0^2 = \text{const}$ . Тогда на магнитной линии  $\mathcal{L}$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \bar{y}^2 + \bar{z}^2 &= \varpi_0^2 = y_c^2 + z_c^2 = (R + r \sin \theta)^2 + \frac{q^2 r^2 \cos^2 \theta}{R^2 + q^2} \\ &= R^2 + 2Rr \sin \theta + r^2 \frac{q^2 + R^2 \sin^2 \theta}{R^2 + q^2}. \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Магнитная линия  $\mathcal{L}$  пересекает плоскость  $\Pi_0$  при  $\varphi' = \varphi'_c$ . Тогда, в соответствии с уравнениями (3.5.4) и (3.5.13),

$$x_c = q\varphi'_c + x_0, \quad y_c = \varpi_0 \cos \varphi'_0, \quad z_c = \varpi_0 \sin \varphi'_0. \quad (3.5.14)$$

С другой стороны, из уравнения (3.5.12) следует, что

$$x_c = \frac{Rr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \quad y_c = R + r \sin \theta, \quad z_c = -\frac{qr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}. \quad (3.5.15)$$

Используя уравнения (3.5.14) и (3.5.15) получим

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{Rr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}} - q\varphi'_c, & \cos \varphi'_c &= \frac{R + r \sin \theta}{\varpi_0}, \\ \sin \varphi'_c &= -\frac{qr \cos \theta}{\varpi_0 \sqrt{R^2 + q^2}}. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Касательный вектор к оси петли в точке её пересечения с плоскостью  $\Pi$  определяется уравнением (3.5.8) с  $\bar{\varphi}$  вместо  $\varphi$ . Тогда уравнение этой плоскости записывается в виде

$$q(x - \bar{x}) - R \sin \bar{\varphi}(y - \bar{y}) + R \cos \bar{\varphi}(z - \bar{z}) = 0. \quad (3.5.17)$$

Координаты точки пересечения определяются уравнением (3.5.6) с  $\bar{\varphi}$  вместо  $\varphi$ . Они удовлетворяют уравнению (3.5.17), так что

$$q\bar{x} = q^2\bar{\varphi} - R(\bar{y} \sin \bar{\varphi} - \bar{z} \cos \bar{\varphi}). \quad (3.5.18)$$

Точка  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  соответствует  $\varphi' = \bar{\varphi}'$ . Теперь, из уравнений (3.5.4) и (3.5.16) следует, что

$$\bar{x} = q(\bar{\varphi}' - \varphi'_c) + \frac{Rr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \quad \bar{y} = \varpi_0 \cos \bar{\varphi}', \quad \bar{z} = \varpi_0 \sin \bar{\varphi}'. \quad (3.5.19)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.5.18) получим уравнение определяющее  $\bar{\varphi}'$ ,

$$q^2(\bar{\varphi}' - \bar{\varphi} - \varphi'_c) + \varpi_0 R \sin(\bar{\varphi}' - \bar{\varphi}) = -\frac{qRr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}. \quad (3.5.20)$$

Это уравнение не удаётся решить аналитически. Однако это не вызывает никаких проблем поскольку такое решение не используется в дальнейшем. Как уже упоминалось ранее, криволинейные координаты используются только в окрестности петли с поперечными размерами в несколько  $a$ . Таким образом, достаточно получить приближённые выражения декартовых координат через величины  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , которые являются линейными функциями  $r$ . Для этого прежде всего заметим что, в нулевом приближении, т.е. когда  $r = 0$ , из уравнений (3.5.13) и (3.5.16) следует  $\varpi_0 = R$  и

$\varphi'_c = 0$ . Тогда решение уравнения (3.5.20) имеет вид  $\bar{\varphi}' = \bar{\varphi}$ . Фактически этот результат очевиден поскольку, когда  $r = 0$ ,  $\mathcal{L}$  совпадает с осью петли и точка  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  совпадает с точкой пересечения плоскости  $\Pi$  с осью петли.

В следующем приближении получим из уравнений (3.5.13) и (3.5.16)

$$\varpi_0 \approx R + r \sin \theta, \quad \varphi'_c \approx -\frac{qr \cos \theta}{R\sqrt{(R^2 + q^2)}}. \quad (3.5.21)$$

Теперь ищем приближённое решение уравнение (3.5.20) в виде  $\bar{\varphi}' = \bar{\varphi} + cr$ , где  $c$  — постоянная которую надо определить. Подставляя это выражение в уравнение (3.5.20) и используя уравнение (3.5.21) находим  $c$  и в результате получаем

$$\bar{\varphi}' \approx \bar{\varphi} - \frac{qr \cos \theta}{R\sqrt{R^2 + q^2}}. \quad (3.5.22)$$

Подставляя уравнения (3.5.21) и (3.5.22) в уравнение (3.5.19) и опуская черту над переменными окончательно получаем

$$\begin{aligned} x &= q\varphi + \frac{Rr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}} + O(\varepsilon^2), \\ y &= R \cos \varphi + r \sin \theta \cos \varphi + \frac{qr \cos \theta \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} + O(\varepsilon^2), \\ z &= R \sin \varphi + r \sin \theta \sin \varphi - \frac{qr \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

где  $\varepsilon = a/R$ , а  $O(\varepsilon^2)$  обозначает квадратичные члены и члены более высокого порядка по  $r$ . Выражения (3.5.23) используются в следующем разделе для того чтобы записать линейные уравнения идеальной магнитной гидродинамики в криволинейных координатах.

### 3.5.3. Уравнения и граничные условия

В этом разделе выводятся уравнения описывающие движение плазмы и граничные условия в криволинейных координатах. Вывод начинаем с введения растягивающей переменной  $\sigma = \varepsilon^{-1}r/R$ . Введение этой переменной является естественным поскольку в дальнейшем рассматриваем движение плазмы только в окрестности магнитной тркбки где  $r/R = O(\varepsilon)$ . Таким образом в дальнейшем криволинейными координатами являются  $\sigma$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Для того чтобы использовать правило Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу введём другие обозначения для криволинейных координат,

$$u^1 = \sigma, \quad u^2 = \theta, \quad u^3 = \varphi. \quad (3.5.24)$$

Вычислим теперь компоненты метрического тензора. Введём вектор  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  и вычислим производные этого вектора по  $u^i$ . С помощью уравнения (3.5.23) получим

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} = \varepsilon R \left( \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \sin \theta \cos \varphi + \frac{q \cos \theta \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \right. \\ \left. \sin \theta \sin \varphi - \frac{q \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (3.5.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} = \varepsilon \sigma R \left( -\frac{R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \cos \theta \cos \varphi - \frac{q \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \right. \\ \left. \cos \theta \sin \varphi + \frac{q \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (3.5.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi} = \left( q, -R \sin \varphi - \varepsilon \sigma R \sin \theta \sin \varphi + \frac{\varepsilon \sigma q R \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \right. \\ \left. R \cos \varphi + \varepsilon \sigma R \sin \theta \cos \varphi + \frac{\varepsilon \sigma q R \cos \theta \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (3.5.27)$$

Используя уравнения (3.5.25)-(3.5.27) и формулу

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^j},$$

находим следующие выражения для ковариантных компонент метрического тензора,

$$g_{11} = \varepsilon^2 R^2 + O(\varepsilon^3), \quad g_{12} = O(\varepsilon^3), \\ g_{13} = O(\varepsilon^2), \quad g_{22} = \varepsilon^2 \sigma^2 R^2 + O(\varepsilon^3), \quad (3.5.28) \\ g_{23} = O(\varepsilon^2), \quad g_{33} = R^2 + q^2 + O(\varepsilon).$$

Как видим, криволинейные координаты не являются ортогональными. Ковариантные компоненты метрического тензора образуют  $3 \times 3$  матрицу. Определитель этой матрицы равен

$$g = \varepsilon^4 \sigma^2 R^4 (R^2 + q^2) + O(\varepsilon^5). \quad (3.5.29)$$

В дальнейшем используем как ковариантные так и контравариантные компоненты вектора  $\boldsymbol{\xi}$  равные, соответственно,  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . Аналогично обозначаются ковариантные и контравариантные компоненты векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{B}$ . Из построения криволинейной системы координат следует,

что произвольная магнитная линия задаётся уравнениями  $\sigma = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$ , так что любая магнитная линия является координатной линией соответствующей координате  $\varphi$ . Поскольку  $\mathbf{B}$  касается магнитной линии, контравариантные компоненты этого вектора задаются выражениями

$$B^1 = 0, \quad B^2 = 0, \quad B^3 = \frac{B}{\sqrt{g_{33}}}, \quad (3.5.30)$$

где  $B$  — величина магнитного поля равная

$$B = \frac{qB_0}{\sqrt{q^2 + \varpi^2}} = \frac{qB_0}{\sqrt{q^2 + R^2}} + O(\varepsilon). \quad (3.5.31)$$

Используя уравнения (3.5.28) and (3.5.31) получим

$$B^3 = \frac{qB_0}{q^2 + R^2} + O(\varepsilon). \quad (3.5.32)$$

Теперь из тождества  $|\mathbf{B}|^2 = B_i B^i = B_3 B^3$  следует что

$$B_3 = qB_0 + O(\varepsilon). \quad (3.5.33)$$

В дальнейшем используем выражения для векторного произведения двух векторов и для ротора (см. напр. Korn and Korn, 1961; Riley et al., 2002)

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w})_i = \sqrt{g} \epsilon_{ijk} v^j w^k, \quad (\nabla \times \mathbf{v})^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial u^j}. \quad (3.5.34)$$

Здесь  $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$  — символы Леви-Чивита. Напомним что  $\epsilon_{ijk} = \pm 1$  когда все индексы различны и  $\epsilon^{ijk} = 0$  когда по крайней мере два индекса совпадают.

Введём физические компоненты вектора смещения  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi)$ . Они связаны с контравариантными компонентами соотношениями

$$\xi_r = \sqrt{g_{11}} \xi^1, \quad \xi_\theta = \sqrt{g_{22}} \xi^2, \quad \xi_\varphi = \sqrt{g_{33}} \xi^3. \quad (3.5.35)$$

В дальнейшем рассматриваем  $\xi_r$  и  $\xi_\theta$  как величины порядка единицы. После этого из уравнения (3.5.28) следует что  $\xi^1 = O(\varepsilon^{-1})$  и  $\xi^2 = O(\varepsilon^{-1})$ . В соответствии с этими оценками вводим масштабированные контравариантные компоненты вектора смещения

$$\bar{\xi}^1 = \varepsilon \xi^1, \quad \bar{\xi}^2 = \varepsilon \xi^2. \quad (3.5.36)$$

Для ковариантных компонент с помощью уравнения (3.5.28) получим

$$\xi_1 = g_{1j} \xi^j = O(\varepsilon), \quad \xi_2 = g_{2j} \xi^j = O(\varepsilon). \quad (3.5.37)$$



В соответствии с этими оценками вводим масштабированные ковариантные компоненты вектора смещения

$$\bar{\xi}_1 = \varepsilon^{-1}\xi_1, \quad \bar{\xi}_2 = \varepsilon^{-1}\xi_2. \quad (3.5.38)$$

Для описания движения плазмы используем линеаризованные уравнения идеальной МГД в приближении холодной плазмы. В этом приближении уравнения (1.2.10) и (1.2.12) приводятся к виду

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{b}, \quad (3.5.39)$$

$$\mathbf{b} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}). \quad (3.5.40)$$

Из уравнения (3.5.30) и первого уравнения (3.5.34) следует, что  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_3 = 0$  для любого вектора  $\mathbf{v}$ . После этого, учитывая уравнение (3.5.3), приходим к заключению что ковариантная компонента правой части уравнения (3.5.39) тождественно равна нулю. Отсюда следует что  $\xi_3 = 0$ . Теперь, используя тождество  $\xi_3 = g_{31}\xi^1 + g_{32}\xi^2 + g_{33}\xi^3$  и уравнения (3.5.28) и (3.5.36) получим  $\xi^3 = O(\varepsilon)$ .

С помощью уравнений (3.5.30) и (3.5.34) и тождества

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j, \quad (3.5.41)$$

где  $\delta_j^i$  – Кронекер дельта-символ, получим из уравнения (3.5.40)

$$b^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^3} \left( B \xi^i \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) - \frac{\delta_3^i}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^j} \left( B \xi^j \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right). \quad (3.5.42)$$

Введём возмущение магнитного давления

$$P = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\mu_0} B^i b_i = \frac{B b_3}{\mu_0 \sqrt{g_{33}}}. \quad (3.5.43)$$

Используя уравнение (3.5.42) и формулу  $b_i = g_{ij} b^j$  получим

$$P = \frac{B}{\mu_0 \sqrt{g}} \left( \frac{g_{3i}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial u^3} - \sqrt{g_{33}} \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \left( B \xi^i \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right). \quad (3.5.44)$$

С помощью уравнений (3.5.28) и (3.5.36) и оценки  $\xi^3 = O(\varepsilon)$  уравнение (3.5.44) сводится к виду

$$P = -\frac{\varepsilon^{-1} B}{\mu_0} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \left( B \bar{\xi}^1 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left( B \bar{\xi}^2 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) \right] + O(\varepsilon). \quad (3.5.45)$$

Используя уравнения (3.5.34) и (3.5.41) получим

$$[(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}]_i = B^j \frac{\partial b_i}{\partial u^j} - B^j \frac{\partial b_j}{\partial u^i}. \quad (3.5.46)$$

С помощью уравнений (3.5.34) и (3.5.41) это выражение сводится к

$$[(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}]_i = -\mu_0 \frac{\partial P}{\partial u^i} + \frac{B}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial b_i}{\partial u^3} + \frac{\mu_0 P \sqrt{g_{33}}}{B} \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{B}{\sqrt{g_{33}}} \right). \quad (3.5.47)$$

Используя уравнения (3.5.3) и (3.5.28)-(3.5.30), первое уравнение (3.5.34) и соотношение  $\varpi = R + O(\varepsilon)$  получим

$$[(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{b}]_i = \frac{2\varepsilon^2 q R^2 B \sigma}{q^2 + R^2} \epsilon_{izj} b^j [1 + O(\varepsilon)]. \quad (3.5.48)$$

Подставляя уравнения (3.5.47) и (3.5.48) в уравнение (3.5.39), принимая во внимание что, в соответствии с уравнениями (3.5.28), (3.5.29) и (3.5.31), отношение последнего члена в правой части уравнения (3.5.47) к первому члену порядка  $\varepsilon$  и используя уравнение (3.5.38) находим

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\xi}_1}{\partial t^2} = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial P}{\partial \sigma} + \frac{\varepsilon^{-1} B}{\mu_0 \sqrt{q^2 + R^2}} \frac{\partial b_1}{\partial \varphi} - \frac{2\varepsilon q R^2 B \sigma}{\mu_0 (q^2 + R^2)} b^2 + O(\varepsilon), \quad (3.5.49)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\xi}_2}{\partial t^2} = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon^{-1} B}{\mu_0 \sqrt{q^2 + R^2}} \frac{\partial b_2}{\partial \varphi} + \frac{2\varepsilon q R^2 B \sigma}{\mu_0 (q^2 + R^2)} b^1 + O(\varepsilon). \quad (3.5.50)$$

Из уравнений (3.5.49) и (3.5.50) следует что  $P = O(\varepsilon)$ . После этого из уравнений (3.5.28) и (3.5.45) следует что

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \left( B \bar{\xi}^1 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left( B \bar{\xi}^2 \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \right) \right] = O(\varepsilon^2). \quad (3.5.51)$$

Используя уравнения (3.5.28), (3.5.29), (3.5.31) и (3.5.51), оценку  $\xi^3 = O(\varepsilon)$  и формулу  $b_i = g_{ij} b^j$  получим из уравнения (3.5.42)

$$b^i = \frac{\varepsilon^{-1} B}{\sqrt{q^2 + R^2}} \frac{\partial \bar{\xi}^i}{\partial \varphi} + O(1), \quad (i = 1, 2), \quad (3.5.52)$$

$$b_1 = \frac{\varepsilon B R^2}{\sqrt{q^2 + R^2}} \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \quad b_2 = \frac{\varepsilon B R^2 \sigma^2}{\sqrt{q^2 + R^2}} \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2). \quad (3.5.53)$$

Подставляя уравнения (3.5.52) и (3.5.53) в уравнения (3.5.49) и (3.5.50) преобразуем их к виду

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\xi}_1}{\partial t^2} = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial P}{\partial \sigma} + \frac{B^2 R^2}{\mu_0 (q^2 + R^2)} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^1}{\partial \varphi^2} - \frac{2q R^2 B^2 \sigma}{\mu_0 (q^2 + R^2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \varphi} + O(\varepsilon), \quad (3.5.54)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\xi}_2}{\partial t^2} = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{B^2 R^2 \sigma^2}{\mu_0 (q^2 + R^2)} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2qR^2 B^2 \sigma}{\mu_0 (q^2 + R^2)^{3/2}} \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon). \quad (3.5.55)$$

Введём расстояние вдоль оси петли

$$s = \sqrt{q^2 + R^2} (\varphi - \varphi_0). \quad (3.5.56)$$

С помощью уравнений (3.5.28), (3.5.35), (3.5.36) и (3.5.38) получим соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^1 &= \frac{\xi_r}{R} + O(\varepsilon), & \bar{\xi}^2 &= \frac{\xi_\theta}{R\sigma} + O(\varepsilon), \\ \bar{\xi}_1 &= R\xi_r + O(\varepsilon), & \bar{\xi}_2 &= R\sigma\xi_\theta + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.5.57)$$

Подставляя уравнение (3.5.57) в уравнения (3.5.51), (3.5.54) и (3.5.55), используя уравнения (3.5.28) и (3.5.56) и возвращаясь к первоначальной переменной  $r$  получим в главном приближении по малому параметру  $\varepsilon$  следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + \frac{\partial\xi_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (3.5.58)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial s^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2qV_A^2}{q^2 + R^2} \frac{\partial \xi_\theta}{\partial s}, \quad (3.5.59)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\theta}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\theta}{\partial s^2} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{2qV_A^2}{q^2 + R^2} \frac{\partial \xi_r}{\partial s}. \quad (3.5.60)$$

Заметим что, в общем случае, плотность  $\rho$  и Альфвеновская скорость  $V_A$  зависят от  $s$ .

Система уравнения (3.5.58)-(3.5.60) должна быть дополнена граничными условиями. Легко показать, что единичный вектор нормальный к границе трубки определяется выражением  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r + O(\varepsilon)$ . Таким образом, в главном порядке по малому параметру  $\varepsilon$ , имеем  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ . Нормальная компонента смещения плазмы приблизительно равна  $\xi_r$ . Напомним что, в криволинейных координатах, уравнение границы трубки имеет вид  $r = a$ . Введём скачок функции  $f$  на границе,

$$[[f]] = \lim_{\delta \rightarrow +0} \{f(a + \delta) - f(a - \delta)\}.$$

Возмущение магнитного давления и нормальная компонента смещения плазмы должны быть непрерывны на границе. Эти условия записываются в виде

$$[[P]] = 0, \quad [[\xi_r]] = 0 \quad \text{at} \quad r = a. \quad (3.5.61)$$

Заметим что, поскольку невозмущённое магнитное поле неоднородно, необходимо использовать условие непрерывности Лагранжева возмущения магнитного давления на границе. Однако невозмущённое магнитное поле и его частные производные по  $r$ ,  $\theta$  и  $s$  непрерывны на границе. Вследствие этого скачок Лагранжева возмущения магнитного давления на границе совпадает со скачком Эйлера возмущения.

Поскольку на концах петли магнитное поле заморожено в плотную фотосферную плазму предполагаемую неподвижной, должно выполняться граничное условие

$$\xi_r = \xi_\theta = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, L, \quad (3.5.62)$$

где

$$L = \sqrt{q^2 + R^2} (\pi - 2\varphi_0) \quad (3.5.63)$$

— длина петли. Система уравнений (3.5.58)-(3.5.60) с граничными условиями (3.5.61) и (3.5.62) используется в следующем разделе для вывода уравнения описывающего изгибные колебания магнитной петли.

#### 3.5.4. Вывод уравнения описывающего изгибные колебания магнитной петли

В этом разделе выводится уравнение описывающее изгибные колебания магнитной петли справедливое в главном приближении по малому параметру  $\varepsilon$ . Из уравнения (3.5.58) следует, что  $\xi_r$  и  $\xi_\theta$  можно выразить через одну функцию  $\psi$ ,

$$\xi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \xi_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.5.64)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.5.59) и (3.5.60) и исключая  $P$  из полученных уравнений с помощью перекрёстного дифференцирования получим уравнение для  $\psi$ ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0, \quad F = r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (3.5.65)$$

Из уравнений (3.5.62) и (3.5.64) следует что

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, L. \quad (3.5.66)$$

В дальнейшем рассматриваем собственные моды изгибных колебаний и полагаем, что возмущения всех переменных пропорциональны  $\exp(-i\omega t)$ . По-

сле этого первое уравнение (3.5.65) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\omega^2}{V_A^2} F = 0. \quad (3.5.67)$$

Это уравнение описывает альвеновские колебания индивидуальных магнитных линий. В дальнейшем предполагается что собственные частоты изгибных колебаний не совпадают с локальной альвеновской частотой. В этом случае уравнение (3.5.67) имеет только тривиальное решение  $F = 0$ . Поэтому  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.5.68)$$

Поскольку рассматриваются только изгибные колебания, полагаем что  $\psi$  пропорционально  $\exp(i\theta)$ . После этого уравнение (3.5.68) сводится к

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi = 0. \quad (3.5.69)$$

Подставляя уравнение (3.5.64) в уравнение (3.5.60) получим

$$P = \rho \left( irV_A^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial s^2} + ir\omega^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2qV_A^2 \psi}{q^2 + R^2} \right). \quad (3.5.70)$$

Используя уравнения (3.5.64) и (3.5.70) перепишем граничные условия (3.5.61) при  $r = a$  в виде

$$[[\psi]] = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad (3.5.71)$$

$$\left[ \left[ \rho \left( V_A^2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial s^2} + \omega^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2iqV_A^2 \psi}{a(q^2 + R^2)} \right) \right] \right] = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (3.5.72)$$

Решение уравнения (3.5.69) регулярное при  $r = 0$ , убывающее при  $r \rightarrow \infty$  и удовлетворяющее граничному условию (3.5.71) записывается в виде

$$\psi = \Psi(s) \begin{cases} r, & r < a, \\ a^2/r, & r > a, \end{cases} \quad (3.5.73)$$

где, на данном этапе,  $\Psi(s)$  – произвольная функция удовлетворяющая условиям  $\Psi(s) = 0$  при  $s = 0, L$ . Подставляя уравнение (3.5.73) в уравнение (3.5.72) и принимая во внимание что  $[[\rho V_A^2]] = [[B^2/\mu_0]] = 0$  получим уравнение для  $\Psi(s)$ ,

$$\frac{d^2 \Psi}{ds^2} + \frac{\omega^2}{C_k^2} \Psi = 0, \quad C_k^2 = \frac{2B^2}{\mu_0(\rho_e + \rho_i)}. \quad (3.5.74)$$

Поскольку плотность плазмы изменяется вдоль магнитной петли,  $C_k$  является функцией  $s$ . Функция  $\Psi$  удовлетворяет граничным условиям

$$\Psi = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, L, \quad (3.5.75)$$

Уравнения (3.5.74) и (3.5.75) представляют собой граничную задачу на собственные значения (задача Штурма-Лиувилля), которая определяет частоты фундаментальной моды и обертонов изгибных колебаний кривой неплюской петли. Отметим что эта граничная задача в точности совпадает с граничной задачей для прямой трубки, которую получаем если положить  $\eta \propto e^{-i\omega t}$  в уравнение (2.2.67) и добавить граничные условия  $\eta = 0$  при  $z = 0, L$ . Таким образом, кривизна и кручение магнитной петли напрямую не влияют на частоты её изгибных колебаний. Однако они могут повлиять на эти частоты косвенно поскольку они определяют зависимость  $\rho_e$  и  $\rho_i$  от  $s$ .

Из уравнений (3.5.64) и (3.5.73) следует, что  $\xi_r = i\Psi$  и  $\xi_\theta = \Psi$ . Эти соотношения означают что  $\xi_r$  и  $\xi_\theta$  не зависят от  $r$  внутри трубки. Следовательно  $\xi$  не зависит от  $r$  внутри трубки и, в первом приближении по  $\varepsilon$ , трубка колеблется как струна сделанная из несжимаемого материала.

### 3.5.5. Поляризация изгибных колебаний

Как уже было упомянуто в предыдущем разделе, тот факт что ось магнитной петли не является плоской кривой не влияет напрямую на частоты её изгибных колебаний. Основной эффект заключается в изменении поляризации изгибных колебаний.

При выводе уравнения (3.5.74) зависимость от  $t$  и  $\theta$  была исключена поскольку полагалось, что возмущения всех переменных пропорциональны  $\exp(-i\omega t + i\theta)$ . Для того чтобы учесть зависимость от  $t$  и  $\theta$  записываем  $\psi$  в виде  $\psi = r\Psi(s) \exp(-i\omega t + i\theta)$  внутри петли. Очевидно что уравнение (3.5.74) будет тем же если положить  $\psi = r\Psi(s) \exp(\pm i\omega t \pm i\theta)$  с любой комбинацией знаков. Поэтому общее решение является комбинацией четырёх различных экспонент. Теперь подберём коэффициенты в этой комбинации так чтобы  $\psi$  была действительной функцией. Поскольку из уравнений (3.5.74) и (3.5.75) следует что отношение мнимой и действительной частей  $\Psi$  является постоянной величиной, без ограничения общности можно принять что  $\Psi(s)$  — действительная функция. После этого нетрудно

показать, что наиболее общее выражение для  $\psi$  при ограничении что  $\psi$  является действительной функцией имеет вид

$$\psi = r\Psi(s)\Re\{\exp(i\theta)[A_1 \exp(-i\omega t) + A_2 \exp(i\omega t)]\}, \quad (3.5.76)$$

где  $\Re$  обозначает действительную часть величины, а  $A_1$  и  $A_2$  – произвольные комплексные постоянные. Подставляя уравнение (3.5.76) в уравнение (3.5.64) получим

$$\begin{aligned} \xi_r &= \Psi(s)[A_- \cos(\omega t - \theta + \alpha_-) + A_+ \cos(\omega t + \theta + \alpha_+)], \\ \xi_\theta &= \Psi(s)[A_- \sin(\omega t - \theta + \alpha_-) - A_+ \sin(\omega t + \theta + \alpha_+)], \end{aligned} \quad (3.5.77)$$

где  $A_\pm$  и  $\alpha_\pm$  – произвольные действительные постоянные.

Вычислим теперь компоненты вектора  $\boldsymbol{\xi}$  внутри трубки в декартовых координатах. С помощью уравнений (3.5.25) и (3.5.26) получим что, в главном порядке по малому параметру  $\varepsilon$ , декартовы компоненты единичных векторов в направлениях  $r$  и  $\theta$  даются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right|^{-1} = \left( \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \sin \theta \cos \varphi + \frac{q \cos \theta \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \right. \\ &\quad \left. \sin \theta \sin \varphi - \frac{q \cos \theta \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.5.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta} \right|^{-1} = \left( -\frac{R \sin \theta}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \cos \theta \cos \varphi - \frac{q \sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \right. \\ &\quad \left. \cos \theta \sin \varphi + \frac{q \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.5.79)$$

Теперь, используя соотношение  $\boldsymbol{\xi} = \xi_r \mathbf{e}_r + \xi_\theta \mathbf{e}_\theta$  и уравнения (3.5.56) и (3.5.77)-(3.5.79), находим

$$\xi_x = \Psi(s) \frac{RA_c \cos(\omega t + \alpha_c)}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \quad (3.5.80)$$

$$\begin{aligned} \xi_y &= \Psi(s) \left\{ A_s \sin(\omega t + \alpha_s) \cos \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{qA_c \cos(\omega t + \alpha_c)}{\sqrt{R^2 + q^2}} \sin \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.5.81)$$

$$\xi_z = \Psi(s) \left\{ A_s \sin(\omega t + \alpha_s) \sin \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) - \frac{q A_c \cos(\omega t + \alpha_c)}{\sqrt{R^2 + q^2}} \cos \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) \right\}, \quad (3.5.82)$$

где  $A_c$ ,  $A_s$ ,  $\alpha_c$  и  $\alpha_s$  выражаются через  $A_{\pm}$  и  $\alpha_{\pm}$ . Поскольку  $A_{\pm}$  и  $\alpha_{\pm}$  – произвольные действительные постоянные,  $A_c$ ,  $A_s$ ,  $\alpha_c$  и  $\alpha_s$  также являются произвольными действительными постоянными.

Введём базис Френе для оси петли. Он состоит из единичного вектора  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  касательного к оси, единичного вектора главной нормали  $\hat{\boldsymbol{n}}$  и единичного вектора бинормали  $\hat{\boldsymbol{b}}$ . Запишем уравнение оси петли в виде  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_a(s)$ . Тогда

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\mathbf{X}_a}{ds}, \quad \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \left| \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \right|^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\boldsymbol{n}}. \quad (3.5.83)$$

С помощью уравнений (3.5.6) and (3.5.56) получим что декартовы координаты векторов базиса Френе равны

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + q^2}} \left( q, -R \sin \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right), R \cos \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) \right), \quad (3.5.84)$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} = - \left( 0, \cos \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right), \sin \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) \right), \quad (3.5.85)$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + q^2}} \left( R, q \sin \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right), -q \cos \left( \varphi_0 + \frac{s}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right) \right). \quad (3.5.86)$$

С помощью уравнений (3.5.80)-(3.5.82) и (3.5.84)-(3.5.86) определяем проекции вектора  $\boldsymbol{\xi}$  на векторы базиса Френе

$$\begin{aligned} \xi_{\tau} &= \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, & \xi_n &= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\xi} = A_s \Psi(s) \sin(\omega t + \alpha_s), \\ \xi_b &= \hat{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{\xi} = A_c \Psi(s) \cos(\omega t + \alpha_c). \end{aligned} \quad (3.5.87)$$

Исключая  $t$  из этих уравнений получим

$$\frac{(\xi_n \cos \beta - \xi_b \sin \beta)^2}{[H_1 \Psi(s)]^2} + \frac{(\xi_n \sin \beta + \xi_b \cos \beta)^2}{[H_2 \Psi(s)]^2} = 1, \quad (3.5.88)$$

где  $\beta$  определяется уравнением

$$\tan 2\beta = \frac{2A_s A_c \sin \alpha}{A_s^2 - A_c^2}, \quad \alpha = \alpha_c - \alpha_s, \quad (3.5.89)$$



а  $H_1$  и  $H_2$  выражаются через  $A_s$ ,  $A_c$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Эти выражения не приводятся поскольку они не используются в дальнейшем. Уравнение (3.5.88) является уравнением эллипса в плоскости  $\xi_n, \xi_b$ . Его полуоси равны  $H_1\Psi(s)$  и  $H_2\Psi(s)$ . Угол между одной из осей эллипса и вектором  $\hat{n}$  равен  $\beta$ . Заметим что этот угол не зависит от  $s$ . Отношение длин осей равно  $H_2/H_1$ , так что оно также не зависит от  $s$ . Как видим, в общем случае колебание имеет эллиптическую поляризацию в плоскости определяемой векторами  $\hat{n}$  и  $\hat{b}$ . Эта плоскость ортогональна оси петли. Длины осей эллипса поляризации пропорциональны  $\Psi(s)$ . Когда плоскость нормальная к оси петли движется вдоль оси, эллипс поляризации вращается вместе с векторами  $\hat{n}$  и  $\hat{b}$ . Как известно из дифференциальной геометрии, угол вращения вектора главной нормали на единицу длины вдоль кривой равен кручению кривой. С помощью уравнения (3.5.6) легко получаем что кручение оси петли равно  $q(R^2 + q^2)^{-1}$ .

Колебание линейно поляризовано когда одна из осей эллипса поляризации равна нулю. Однако, поскольку выражения для  $H_1$  и  $H_2$  не приводятся, используем другое условие. Очевидно колебание линейно поляризовано если отношение  $\xi_n/\xi_b$  не зависит от  $t$ . Это условие сводится к уравнению  $\cos(\alpha_c - \alpha_s) = 0$ , из которого следует что  $\alpha_c = \alpha_s + \pi/2 + n\pi$ , где  $n$  — любое целое число. Без потери общности можно положить  $\alpha_c = \alpha_s + \pi/2$ . После этого получим

$$(\xi_n, \xi_b) = A(\cos \beta, \sin \beta)\Psi(s) \sin(\omega t + \alpha_s), \quad (3.5.90)$$

где

$$A = \sqrt{A_s^2 + A_c^2}, \quad \tan \beta = \frac{A_c}{A_s}. \quad (3.5.91)$$

Рис. 3.5.4 иллюстрирует поляризацию фундаментальной моды изгибных колебаний. Стрелки показывают смещение петли. Если мода поляризована линейно, то направления смещения в каждой точке не меняются со временем. Таким образом, конец вектора смещения движется вдоль прямой линии. В эллиптически поляризованной моде направление вектора смещения вращается с постоянной угловой скоростью вокруг касательной к оси трубки. Конец вектора смещения движется вдоль эллипса поляризации.

Для линейно поляризованной собственной моды можно произвольно зафиксировать направление поляризации в одной точке. После этого направления поляризации во всех остальных точках определены. Аналогично

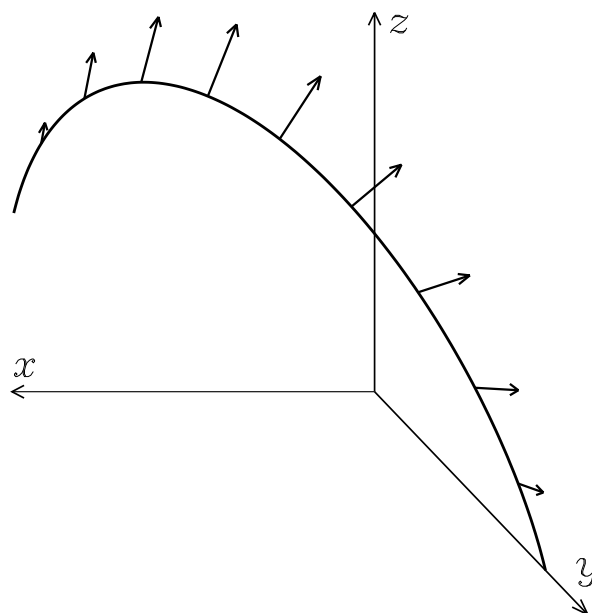


Рис. 3.5.4. Иллюстрация поляризации фундаментальной моды

для эллиптически поляризованной моды можно зафиксировать направление большой оси эллипса поляризации в одной точке. После этого направления осей эллипса поляризации во всех остальных точках определены. Тот факт что направление поляризации может быть выбрано произвольно в одной точке означает что изгибные колебания петли являются вырожденными. Имеется бесконечно много собственных мод соответствующих одной и той же собственной частоте. Все эти моды отличаются направлением поляризации. Ситуация аналогична той что имеет место в случае прямой трубки: из-за симметрии трубка может колебаться с одной и той же частотой в любом направлении.

Van Doorselaere et al. (2004) рассмотрели изгибные колебания петли в виде половинки тора. Они нашли что учёт кривизны снимает вырождение изгибных колебаний, которое имеет место в случае прямой трубки. В результате появляются две фундаментальные моды, одна поляризованная в вертикальном и другая в горизонтальном направлении. Эти моды имеют различные частоты. Тоже самое верно для всех обертонов. Эти результаты были подтверждены численным исследованием в работе Terradas et al. (2006).

Van Doorselaere et al. (2004) получили что разница частот вертикально и горизонтально поляризованных колебаний порядка  $\varepsilon^2$ , так что она весьма мала для любой реальной магнитной петли. Если петля смещена в направлении которое не является ни вертикальным ни горизонтальным то

будут возбуждены обе моды, вертикально поляризованная и горизонтально поляризованная. Поскольку они имеют различные частоты, то появится колебание с частотой равной разнице частот. Однако это колебание появится только после истечения времени порядка основной частоты колебаний умноженной на  $\varepsilon^{-2}$ . Это время много больше характерного времени затухания изгибных колебаний. Это означает что разница частот вызванная кривизной петли не важна с наблюдательной точки зрения.

Представляется что ситуация с изгибными колебаниями неплоских петель аналогичная ситуации с колебаниями плоских кривых петель. Можно ожидать, что при продолжении анализа в следующем приближении по  $\varepsilon$ , получим что имеются две фундаментальные моды с взаимно ортогональными направлениями поляризации и различными частотами. Можно также ожидать, что то же самое имеет место в случае обертонов. Однако разница частот будет порядка  $\varepsilon^2$  (или, по крайней мере, порядка  $\varepsilon$ ), так что эта разница не важна при интерпретации наблюдений.

### 3.5.6. Приложение к корональной сейсмологии

Исследование в этом разделе связано с наблюдениями изгибных колебаний неплоских корональных петель, результаты которых представлены в работах Schrijver et al. (2002) и De Moortel and Brady (2007). В частности, De Moortel and Brady (2007) сообщили, что наблюдавшиеся колебания содержали две гармоники, одну с периодом между 577 и 672 секундами и вторую с периодом между 250 и 346 секундами. Амплитуда гармоники с большим периодом была много больше чем амплитуда гармоники с меньшим периодом. Наиболее важный результат полученный в работе De Moortel and Brady (2007) заключается в том что доминирующая гармоника имела узел в некоторой точке в магнитной петле. Основываясь на этом результате De Moortel and Brady (2007) предположили, что гармоника с большим периодом и амплитудой является первым обертоном изгибных колебаний. После этого они обсуждают возможный механизм преимущественного возбуждения не фундаментальной гармоники, а первого обертона изгибных колебаний. Заметим что De Moortel and Brady (2007) не исключают возможности что гармоника с большей амплитудой была всё-таки фундаментальной модой, а узел на оси петли был чисто наблюдательным эффектом связанным с тем что петля была неплоской.

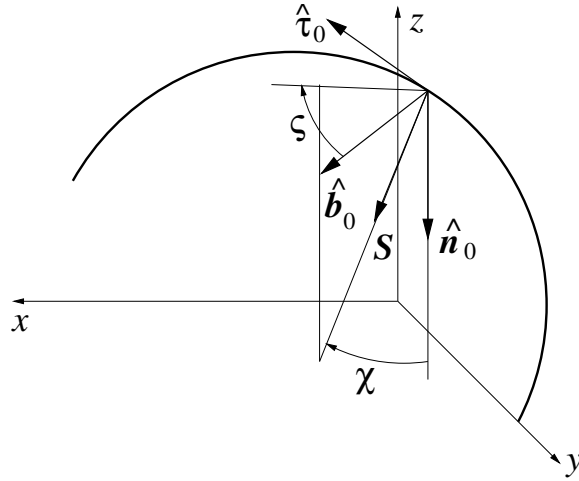


Рис. 3.5.5. Иллюстрация введения углов  $\chi$  и  $\zeta$ . Ось петли показана толстой линией.

В дальнейшем не планируется непосредственно использовать теоретические результаты для интерпретации наблюдений представленных в работах Schrijver et al. (2002) и De Moortel and Brady (2007). Вместо этого будет разработан метод позволяющий ответить на вопрос: является ли наблюдавшееся изгибное колебание неплоской петли с узлом в некоторой точке на оси петли первым обертоном, или оно является фундаментальной гармоникой, а наличие узла — чисто наблюдательный эффект.

Рассмотрим линейно поляризованное изгибное колебание неплоской корональной петли исследованное в предыдущем разделе. Предположим что направление в котором производится наблюдение определяется единичным вектором  $\mathbf{S}$ . Обозначим вектора базиса Френе при  $s = L/2$  через  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_0$  и  $\hat{\mathbf{b}}_0$ . Запишем вектор  $\mathbf{S}$  в виде (см. Рис. 3.5.5)

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}_0 \cos \chi + \hat{\mathbf{b}}_0 \sin \chi \cos \zeta + \hat{\boldsymbol{\tau}}_0 \sin \chi \sin \zeta, \quad (3.5.92)$$

где  $\chi \in [0, \pi]$  и  $\zeta \in [0, 2\pi]$ . Поскольку  $s = L/2$ , из уравнения (3.5.63) следует что  $\varphi_0 + s/\sqrt{R^2 + q^2} = \pi/2$ . Подставляя это выражение в уравнения (3.5.84)-(3.5.86) получим

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_0 = \frac{(q, -R, 0)}{\sqrt{R^2 + q^2}}, \quad \hat{\mathbf{n}}_0 = (0, 0, -1), \quad \hat{\mathbf{b}}_0 = \frac{(R, q, 0)}{\sqrt{R^2 + q^2}}. \quad (3.5.93)$$

Теперь нетрудно получить

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \sin \varphi \hat{\mathbf{n}}_0 + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} (R \hat{\boldsymbol{\tau}}_0 - q \hat{\mathbf{b}}_0), \\ \hat{\mathbf{b}} &= \frac{qR(1 - \sin \varphi) \hat{\boldsymbol{\tau}}_0 + (R^2 + q^2 \sin \varphi) \hat{\mathbf{b}}_0}{R^2 + q^2} + \frac{q \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} \hat{\mathbf{n}}_0, \end{aligned} \quad (3.5.94)$$

где  $\varphi$  выражается через  $s$  с помощью уравнения (3.5.56). Визуально можно наблюдать только компоненту вектора  $\boldsymbol{\xi}$  перпендикулярную к вектору  $\boldsymbol{S}$ . Эта компонента даётся выражением  $\boldsymbol{\xi}_\perp = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{S})$ . Условие что  $\boldsymbol{\xi}_\perp = 0$  записывается в виде  $\boldsymbol{\xi} \parallel \boldsymbol{S}$ . С помощью уравнений (3.5.90) и (3.5.94) получим из условия  $\boldsymbol{\xi} \parallel \boldsymbol{S}$  два уравнения:

$$\frac{(R^2 + q^2 \sin \varphi) \tan \beta}{R^2 + q^2} - \frac{q \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} = \tan \chi \cos \varsigma \left( \sin \varphi + \frac{q \cos \varphi \tan \beta}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right), \quad (3.5.95)$$

$$\frac{qR(1 - \sin \varphi) \tan \beta}{R^2 + q^2} + \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + q^2}} = \tan \chi \sin \varsigma \left( \sin \varphi + \frac{q \cos \varphi \tan \beta}{\sqrt{R^2 + q^2}} \right). \quad (3.5.96)$$

Исключая  $\tan \beta$  из уравнений (3.5.95) и (3.5.96) получим уравнение для  $\varphi$

$$R \sin \varphi \tan \chi (q \cos \varsigma - R \sin \varsigma) + R \sqrt{R^2 + q^2} \cos \varphi - q \tan \chi (R \cos \varsigma + q \sin \varsigma) = 0. \quad (3.5.97)$$

Если это уравнение не имеет решения удовлетворяющего условию  $\varphi \in [\varphi_0, \pi - \varphi_0]$ , то это означает что, для любого угла поляризации  $\beta$ , невозможно получить узел при наблюдении фундаментальной моды изгибных колебаний петли. Такой результат будет являться сильным аргументом в пользу того что наблюдался первый обертона.

Предположим теперь, что уравнение (3.5.97) имеет решение удовлетворяющее условию  $\varphi \in [\varphi_0, \pi - \varphi_0]$ . В принципе, возможно что имеется несколько решений уравнения (3.5.97) удовлетворяющих этому условию, но этот случай не рассматривается и предполагается, что имеется в точности одно решение. После того как найдено решение уравнения (3.5.97) используем уравнение (3.5.56) для нахождения положения узла на петле,  $s_{\text{th}}$ . Обозначим положение наблюдаемого узла через  $s_{\text{obs}}$ . Если величина  $|s_{\text{th}} - s_{\text{obs}}|$  достаточно мала, т.е. если она находится в доверительном интервале, то это будет являться сильным аргументом в пользу того что наблюдавшееся изгибное колебание корональной петли было фундаментальной модой, а узел является чисто наблюдательным эффектом. С другой стороны, если  $|s_{\text{th}} - s_{\text{obs}}|$  находится вне доверительного интервала, то это может рассматриваться как аргумент в пользу того что наблюдался первый обертона.

Рассмотрим один пример. Предположим что наблюдалось изгибное колебание неплоской петли описываемое моделью представленной в этом разделе с  $R = q$ ,  $\varphi_0 = 0$  (так что проекция петли на плоскость  $yz$  является

полуокружностью), а направление наблюдения определяется вектором  $\mathbf{S}$  с  $\chi = \pi/4$  и  $\varsigma = \pi/3$ . Тогда уравнение (3.5.97) сводится к виду

$$(1 - \sqrt{3}) \sin \varphi + 2\sqrt{2} \cos \varphi - (1 + \sqrt{3}) = 0. \quad (3.5.98)$$

Решение этого уравнения удовлетворяющее условию  $\varphi \in (0, \pi)$  даётся выражением

$$\varphi = \arcsin \frac{2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - 1}{6 - \sqrt{3}} \approx 0.109,$$

так что  $s_{\text{th}} = \varphi/\pi \approx 0.035 L$ . Таким образом, если величина  $s_{\text{obs}}$  близка к  $0.035 L$ , то можно заключить что наблюдавшееся изгибное колебание было фундаментальной модой. С другой стороны, если величина  $s_{\text{obs}}$  сильно отличается от  $0.035 L$ , то это будет серьёзным аргументом в пользу того что наблюдался первый обертон.

### 3.5.7. Выводы

В данной главе изучены изгибные колебания неплоской корональной магнитной петли. Была предложена простая модель неплоской петли в которой ось петли является частью винтовой линии. Поперечное сечение петли везде круговое с радиусом  $a$  и центром на оси петли. При этом предполагалось что  $a$  много меньше радиуса кривизны петли. Считалось что плотность плазмы внутри петли больше плотности снаружи петли и обе плотности могут меняться вдоль петли, однако не меняются в направлениях поперёк петли.

Были введены криволинейные координаты. В этих координатах граница петли является координатной поверхностью, а ось петли — координатной линией. После этого линейные уравнения идеальной магнитной гидродинамики и граничные условия были записаны в криволинейных координатах. Эти уравнения и граничные условия были затем использованы для вывода уравнения описывающего изгибные колебания магнитной петли. Для этого использовался асимптотический метод основанный на разложении возмущений всех величин в ряды по малому параметру равному отношению радиуса поперечного сечения к длине петли. Оказалось что выведенное уравнение в точности совпадает с уравнением описывающим изгибные колебания прямой трубки с круговым сечением имеющим постоянный радиус. Это означает что, аналогично кривизне петли, её кручение напрямую не влияет на собственные частоты изгибных колебаний. Оно может влиять

на эти частоты только косвенно модифицируя зависимость плотности от расстояния вдоль петли.

Главный эффект связанный с кручением петли это изменение поляризации колебаний вдоль петли. Смещение петли везде ортогонально оси петли. В общем случае смещение каждой точки оси эллиптически поляризовано в плоскости ортогональной оси петли. Отношение осей эллипса поляризации не меняется вдоль петли и угол между бóльшей осью эллипса поляризации и главной нормалью к оси петли также остаётся постоянным. Таким образом, вследствие кручения оси петли, эллипс поляризации вращается при движении вдоль петли. В том случае когда длина одной из осей поляризации равна нулю, поляризация является линейной. В этом случае угол между направлением поляризации и главной нормалью к оси везде один и тот же.

Обсуждается применение полученных результатов к корональной сейсмологии. Для этого рассмотрены линейно поляризованные изгибные колебания неплоской петли наблюдаемые с направления определяемого вектором  $\mathbf{S}$ . Предполагалось что наблюдаемое колебание петли является фундаментальной модой, так что колебание не имеет узлов нигде кроме оснований петли. Визуально можно наблюдать только смещение петли ортогональное вектору  $\mathbf{S}$ . Таким образом, будет наблюдаться узел колебания в точке где смещение параллельно вектору  $\mathbf{S}$ . Выведено уравнение (см. уравнение (3.5.97)) которое определяет точку на оси петли где смещение параллельно вектору  $\mathbf{S}$  в предположении что колебание петли линейно поляризовано.

Допустим теперь, что наблюдалось изгибное колебание корональной петли с узлом в некоторой точке. Если уравнение (3.5.97) не имеет решений то это означает что, в случае когда колебание является фундаментальной модой, узел не будет наблюдаться. Данный результат будем сильным свидетельством в пользу того что наблюдавшееся колебание было не фундаментальной модой а первым обертоном. Если же уравнение (3.5.97) имеет решение, то далее необходимо сравнить два положения узла, одно найденное из наблюдений и другое найденное из решения уравнения (3.5.97). Если эти два положения различаются сильно, то снова это следует рассматривать как свидетельство в пользу того что наблюдавшееся колебание было не фундаментальной модой а первым обертоном. Если же два положения близки, то это будет означать что, скорее всего, наблюдавшееся колебание

было фундаментальной модой, а наблюдавшееся наличие узла это чисто наблюдательный эффект.

### **3.6. Изгибные колебания двух параллельных магнитных трубок**

До сих пор рассматривались модели корональных магнитных петель в виде одной монолитной магнитной трубки. Однако в настоящее время не ясно являются ли магнитные петли монолитными, или они состоят из пучка более тонких магнитных трубок с различными плотностями и температурами. Если последнее верно, то встаёт задача исследования изгибных колебаний пучка магнитных трубок. Иногда наблюдаются одновременные колебания системы нескольких расположенных близко друг от друга корональных петель. В связи с этим снова возникает задача исследования близко расположенных друг к другу системы магнитных трубок.

Естественно начать изучение колебаний системы магнитных трубок с простейшего случая когда имеется всего две трубки. Впервые такая задача была решена численно в работе Luna et al. (2008) и аналитически в работе Van Doorselaere, Ruderman and Robertson (2008b). В обеих работах предполагалось, что обе трубки однородны. Позже в работе Robertson, Ruderman and Taroyan (2010) аналитическое решение было обобщено на случай когда плотность меняется вдоль магнитных трубок. В данной главе представлены результаты исследования изгибные колебания системы двух параллельных магнитных трубок проведённого в работах Van Doorselaere, Ruderman and Robertson (2008b) и Robertson, Ruderman and Taroyan (2010).

#### **3.6.1. Невозмущённое состояние и основные уравнения**

Рассматривается следующее невозмущённое состояние. Имеются параллельные магнитные петли расположенные в вертикальных плоскостях и линия соединяющая их основания перпендикулярна этим плоскостям (см. Рис. 3.6.1). Плотность плазмы меняется вдоль трубок вследствие гравитационной стратификации. В дальнейшем пренебрегаем кривизной петель. В результате получаем систему двух параллельных магнитных трубок с плотностью меняющейся вдоль трубок. Эта система показана на Рис. 3.6.2. Невозмущённое магнитное поле параллельно оси  $z$  декартовой системы координат  $x, y, z$ . Оси магнитных трубок также параллельны оси  $z$ . Радиусы



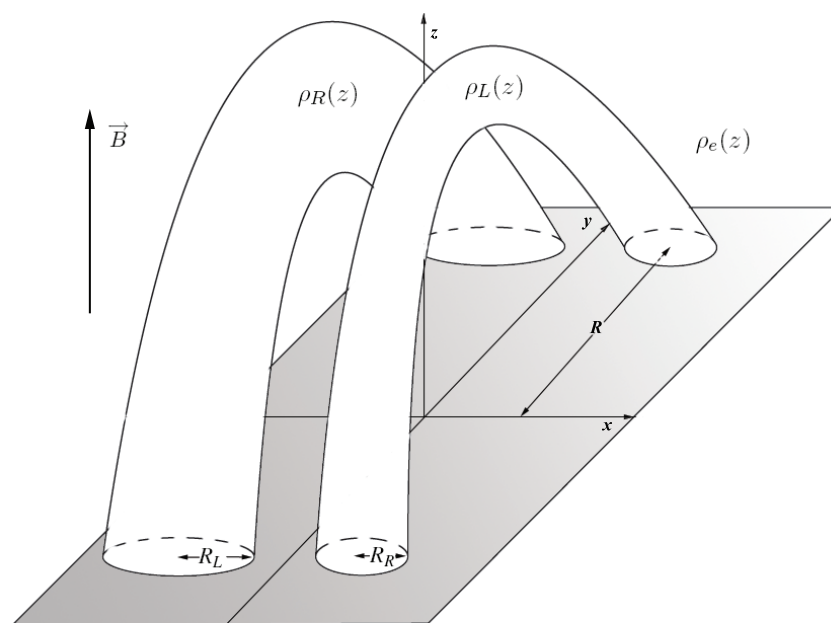


Рис. 3.6.1. Равновесие с двумя корональными петлями.

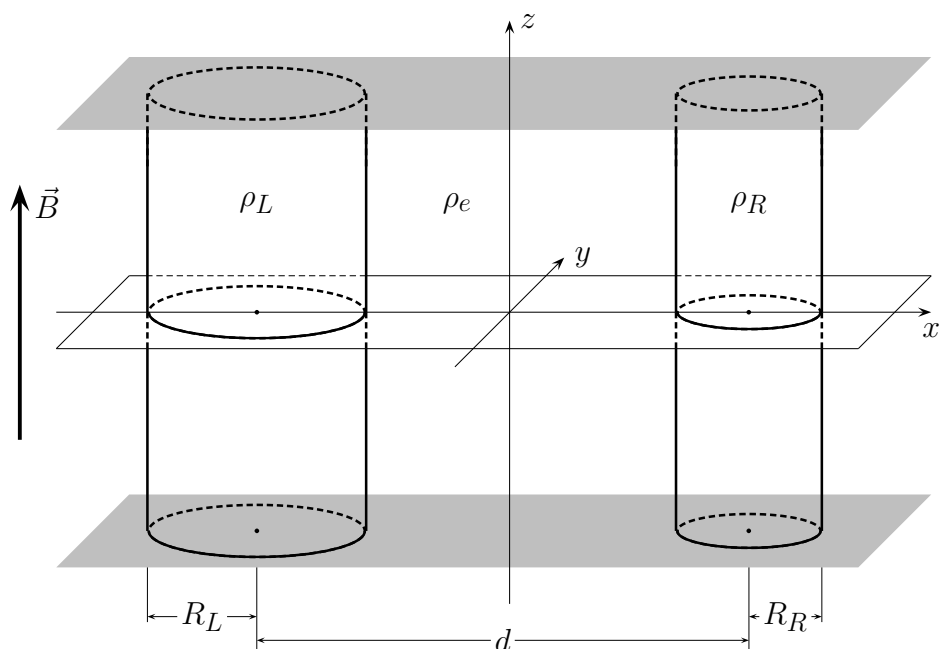


Рис. 3.6.2. Равновесие с двумя параллельными магнитными трубками. Магнитные линии вморожены в плотную фотосферную плазму при  $z = \pm L/2$ . Невозмущённые плотности в трубках равны, соответственно,  $\rho_L(z)$  и  $\rho_R(z)$ , а вне трубок плотность равна  $\rho_e(z)$ .

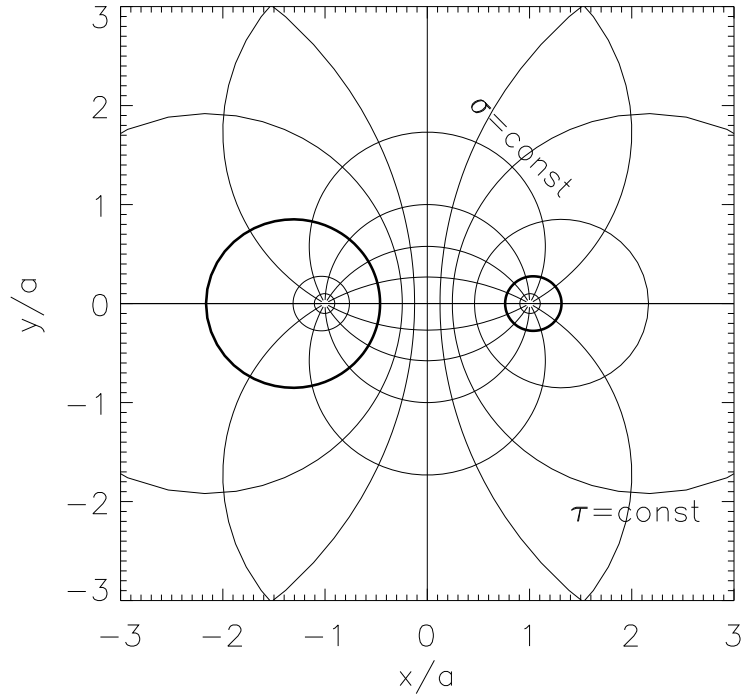


Рис. 3.6.3. Бицилиндрические координаты используемые в настоящей главе. Границы трубок показаны толстыми окружностями. Все координатные линии  $\sigma = \text{const}$  проходят через точки  $x = \pm a$ ,  $y = 0$ . Координатные линии  $\tau = \text{const}$  — окружности охватывающие эти точки.

трубок равны  $R_L$  и  $R_R$ , а расстояние между осями трубок равно  $d$ . Плотность равна  $\rho_L(z)$  внутри левой трубки,  $\rho_R(z)$  внутри правой трубки и  $\rho_e(z)$  вне трубок. Предполагается что  $\rho_{L,R}(z) > \rho_e(z)$ .

При принятых предположениях линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики сводятся к уравнениям (3.3.1). Условие вмороженности магнитного поля в неподвижную плотную фотосферную плазму записывается в виде

$$\xi = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm L/2. \quad (3.6.1)$$

Как обычно, нормальная компонента смещения плазмы  $\xi_n$  и возмущение магнитного давления  $P = Bb_z/\mu_0$  должны быть непрерывны на границах трубок. Наконец, все возмущения должны затухать вдали от трубок.

### 3.6.2. Бицилиндрические координаты

Для исследования колебаний системы состоящей из двух магнитных трубок используем бицилиндрические координаты  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $z$ , где  $\tau$  изменяется от  $-\infty$  до  $\infty$ , а  $\sigma$  изменяется от 0 до  $2\pi$  (см. напр. Korn and Korn 1961). Координатные линии в плоскости  $\tau\sigma$  показаны на Рис. 3.6.3. Декартовы и

бициллиндрические координаты связаны соотношениями

$$x = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad z = z, \quad (3.6.2)$$

где  $a$  — постоянная. Оси трубок параллельны оси  $z$  и пересекают плоскость  $xy$  в точках  $x = d/2$  и  $x = -d/2$ . Границы трубок задаются, соответственно, уравнениями  $\tau = -\tau_L$  и  $\tau = \tau_R$ . Радиусы трубок и расстояние между их осями связаны с параметрами  $\tau_L$  и  $\tau_R$  соотношениями

$$R_L = \frac{a}{\sinh \tau_L}, \quad R_R = \frac{a}{\sinh \tau_R}, \quad d = a(\coth \tau_L + \coth \tau_R). \quad (3.6.3)$$

Величины  $R_L$ ,  $R_R$  и  $d$  являются свободными геометрическими параметрами задачи. Единственное ограничение, которое накладывается на них это  $R_L + R_R < d$ . Полезно выразить параметры координатной системы через геометрические величины. Нетрудно получить следующие выражения:

$$\cosh \tau_L = \frac{1 + q^2(1 - s^2)}{2q}, \quad \cosh \tau_R = \frac{1 - q^2(1 - s^2)}{2qs}, \quad (3.6.4)$$

где

$$q = \frac{R_L}{d}, \quad s = \frac{R_R}{R_L}. \quad (3.6.5)$$

Координатную систему всегда можно выбрать так что  $R_R \leq R_L$ , откуда следует что  $s \leq 1$ . Из неравенства  $R_L + R_R < d$  следует что  $q(1 + s) < 1$ . После этого нетрудно показать, что правые части уравнений (3.6.4) больше единицы, так что из этих уравнений всегда можно единственным образом определить величины  $\tau_L$  и  $\tau_R$ . Зная эти величины находим параметр  $a$  из любого из трёх уравнений (3.6.4).

В дальнейшем также используются выражения для градиента и лапласиана определяемые формулами

$$\nabla f = \frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{a} \left( \mathbf{e}_\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} + \mathbf{e}_\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (3.6.6)$$

$$\nabla^2 f = \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (3.6.7)$$

Здесь  $f$  — произвольная функция, а  $\mathbf{e}_\tau$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_z$  — единичные вектора, соответственно, в направлениях  $\tau$ ,  $\sigma$  и  $z$ .

Из уравнения (3.6.2) следует, что  $x \rightarrow -a$  и  $y \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow a$  и  $y \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Эти соотношения означают что решение уравнений (3.3.1) должно быть ограничено при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Введём  $r =$

$\sqrt{x^2 + y^2}$ . Нетрудно показать, что  $\tau \rightarrow 0$  и  $\sigma \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом, условие что возмущения затухают вдали от трубок сводится к условию что решение уравнений (3.3.1) должно стремиться к нулю когда  $\tau^2 + \sigma^2 \rightarrow 0$ .

### 3.6.3. Вывод основных уравнений

Из первого уравнения (3.3.1) следует  $\xi_z = 0$ . После этого из второго уравнения (3.3.1) получим

$$P = -\rho V_A^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (3.6.8)$$

где, как и прежде,  $V_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$  – альвеновская скорость. Первое уравнение (3.3.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \frac{V_A^2}{B} \frac{\partial \mathbf{b}_\perp}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \nabla_\perp P, \quad (3.6.9)$$

где

$$\mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} - b_z \mathbf{e}_z, \quad \nabla_\perp = \nabla - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.6.10)$$

Из второго уравнения (3.3.1) следует что

$$\mathbf{b}_\perp = B \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial z}. \quad (3.6.11)$$

Подставляя этот результат в уравнение (3.6.9) получим

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla_\perp P. \quad (3.6.12)$$

Взяв дивергенцию этого уравнения и используя уравнение (3.6.8) находим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - V_A^2 \nabla^2 P = 0. \quad (3.6.13)$$

Далее снова используем приближение тонкой трубки. Но теперь поперечный размер системы определяется не радиусом трубки как было при исследовании колебаний индивидуальной трубки, а расстоянием между трубками. Поэтому малым параметром является  $\epsilon = d/L \ll 1$ . Поскольку характерный размер в направлении  $z$  много больше чем  $d$ , вводим растягивающую переменную  $Z = \epsilon z$ . Рассматриваем колебания с периодами порядка  $L/V_A^*$ , где  $V_A^*$  – характерное значение альвеновской скорости. Величина  $L/V_A^*$  может рассматриваться как характерное время задачи. Поскольку  $L/V_A^* = \epsilon^{-1} d/V_A^*$ , где  $d/V_A^*$  – характерное альвеновское время в

поперечном направлении, вводим также “медленное” время  $T = \epsilon t$ . В новых переменных уравнения (3.6.12) и (3.6.13) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial T^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial Z^2} = -\frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{\epsilon^2 a \rho} \frac{\partial P}{\partial \tau}, \quad (3.6.14)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial T^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial Z^2} = -\frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{\epsilon^2 a \rho} \frac{\partial P}{\partial \sigma}, \quad (3.6.15)$$

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} - \epsilon^2 V_A^2 \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} - V_A^2 \nabla_\perp P = 0. \quad (3.6.16)$$

Пренебрегая членами порядка  $\epsilon^2$  в уравнении (3.6.16) и используя (3.6.7) и (3.6.10) получим приближённое уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (3.6.17)$$

Общее решение этого уравнения можно искать в виде разложения в ряд Фурье по  $\sigma$ . Однако в дальнейшем рассматриваем только изгибные колебания, так что решение уравнения (3.6.17) ищется в виде

$$P = \Phi(\tau, T, Z) \cos(\sigma - \sigma_0) - \Phi(0, T, Z) \cos \sigma_0. \quad (3.6.18)$$

Второй член в правой части этого выражения введён для того чтобы удовлетворить условию  $P \rightarrow 0$  при  $\tau^2 + \sigma^2 \rightarrow 0$ . Теперь легко находим, что функция  $P$  удовлетворяет уравнению (3.6.17), стремится к конечным пределам при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  и непрерывна на границах трубок если  $\Phi$  определяется выражением

$$\Phi(\tau, T, Z) = \begin{cases} (C_1 + C_2 e^{2\tau_L}) e^\tau, & \tau < -\tau_L, \\ C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}, & -\tau_L < \tau < \tau_R, \\ (C_1 e^{2\tau_R} + C_2) e^{-\tau}, & \tau > \tau_R, \end{cases} \quad (3.6.19)$$

где  $C_1$  and  $C_2$  – произвольные функции  $T$  и  $Z$  удовлетворяющие условиям  $C_1(T, \pm\epsilon L/2) = C_2(T, \pm\epsilon L/2) = 0$ .

Подставляя найденное выражение для  $P$  в уравнения (3.6.14) и (3.6.15) преобразуем их к виду

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial T^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial Z^2} = -\frac{Q(\tau, \sigma)}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \cos(\sigma - \sigma_0), \quad (3.6.20)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial T^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial Z^2} = \frac{Q(\tau, \sigma)}{\rho} \Phi(\tau) \sin(\sigma - \sigma_0), \quad (3.6.21)$$

где  $Q(\tau, \sigma)$  определяется выражением

$$Q(\tau, \sigma) = \frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{\epsilon^2 a}. \quad (3.6.22)$$

Используя уравнение (3.6.19) получим что  $\xi_\tau$  и  $\xi_\sigma$  описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial T^2} - V_{AL}^2 \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial Z^2} = -\frac{Q}{\rho_L} (C_1 + C_2 e^{2\tau_L}) e^\tau \cos(\sigma - \sigma_0), \quad (3.6.23)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial T^2} - V_{AL}^2 \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial Z^2} = \frac{Q}{\rho_L} (C_1 + C_2 e^{2\tau_L}) e^\tau \sin(\sigma - \sigma_0) \quad (3.6.24)$$

при  $\tau < -\tau_L$ , уравнениями

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial T^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial Z^2} = \frac{Q}{\rho_e} (-C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}) \cos(\sigma - \sigma_0), \quad (3.6.25)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial T^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial Z^2} = \frac{Q}{\rho_e} (C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}) \sin(\sigma - \sigma_0), \quad (3.6.26)$$

при  $-\tau_L < \tau < \tau_R$ , и уравнениями

$$\frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial T^2} - V_{AR}^2 \frac{\partial^2 \xi_\tau}{\partial Z^2} = \frac{Q}{\rho_R} (C_1 e^{2\tau_R} + C_2) e^{-\tau} \cos(\sigma - \sigma_0), \quad (3.6.27)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial T^2} - V_{AR}^2 \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial Z^2} = \frac{Q}{\rho_R} (C_1 e^{2\tau_R} + C_2) e^{-\tau} \sin(\sigma - \sigma_0) \quad (3.6.28)$$

при  $\tau > \tau_R$ .

Введём функции  $\eta_L(T, Z)$ ,  $\eta_1(T, Z)$ ,  $\eta_2(T, Z)$  и  $\eta_R(T, Z)$  удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 \eta_L}{\partial T^2} - V_{AL}^2 \frac{\partial^2 \eta_L}{\partial Z^2} = \frac{e^{\tau_R} (C_1 + C_2 e^{2\tau_L})}{\rho_L}, \quad (3.6.29)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_R}{\partial T^2} - V_{AR}^2 \frac{\partial^2 \eta_R}{\partial Z^2} = \frac{e^{\tau_L} (C_1 e^{2\tau_R} + C_2)}{\rho_R}, \quad (3.6.30)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial T^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial Z^2} = \frac{C_{1,2}}{\rho_e}. \quad (3.6.31)$$

Тогда из уравнений (3.6.23)-(3.6.28) следует что

$$\xi_\tau = Q \cos(\sigma - \sigma_0) \begin{cases} -\eta_L e^{\tau - \tau_R}, & \tau < -\tau_L, \\ -\eta_1 e^\tau + \eta_2 e^{-\tau}, & -\tau_L < \tau < \tau_R, \\ \eta_R e^{-\tau - \tau_L}, & \tau > \tau_R, \end{cases} \quad (3.6.32)$$

$$\xi_\sigma = -Q \sin(\sigma - \sigma_0) \begin{cases} \eta_L e^{\tau - \tau_R}, & \tau < -\tau_L, \\ \eta_1 e^\tau + \eta_2 e^{-\tau}, & -\tau_L < \tau < \tau_R, \\ \eta_R e^{-\tau - \tau_L}, & \tau > \tau_R. \end{cases} \quad (3.6.33)$$

Нормальная компонента смещения плазмы на границе трубки равна  $\xi_\tau$ . После этого из условия непрерывности смещения плазмы на границах трубок и уравнения (3.6.32) следует что

$$E\eta_L = \eta_1 e^{-\tau_L} - \eta_2 e^{\tau_L}, \quad E\eta_R = -\eta_1 e^{\tau_R} + \eta_2 e^{-\tau_R}, \quad (3.6.34)$$

где  $E = \exp[-(\tau_L + \tau_R)]$ . Из этих уравнений находим

$$\eta_1 = -\frac{\eta_R e^{\tau_L} + \eta_L e^{-\tau_R}}{E^{-2} - 1}, \quad \eta_2 = -\frac{\eta_L e^{\tau_R} + \eta_R e^{-\tau_L}}{E^{-2} - 1}. \quad (3.6.35)$$

Подстановка этих выражений в уравнение (3.6.31) даёт

$$e^{\tau_L} \left( \frac{\partial^2 \eta_R}{\partial T^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \eta_R}{\partial Z^2} \right) + e^{-\tau_R} \left( \frac{\partial^2 \eta_L}{\partial T^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \eta_L}{\partial Z^2} \right) = \frac{C_1}{\rho_e} (1 - E^{-2}), \quad (3.6.36)$$

$$e^{\tau_R} \left( \frac{\partial^2 \eta_L}{\partial T^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \eta_L}{\partial Z^2} \right) + e^{-\tau_L} \left( \frac{\partial^2 \eta_R}{\partial T^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \eta_R}{\partial Z^2} \right) = \frac{C_2}{\rho_e} (1 - E^{-2}). \quad (3.6.37)$$

Исключая  $C_1$  и  $C_2$  из уравнений (3.6.29), (3.6.30), (3.6.36) и (3.6.37) и возвращаясь к первоначальным переменным, получаем уравнения для  $\eta_L$  и  $\eta_R$ ,

$$\frac{\partial^2 \eta_L}{\partial t^2} - C_{kL}^2 \frac{\partial^2 \eta_L}{\partial z^2} = E \frac{\rho_R - \rho_e}{\rho_L + \rho_e} \frac{\partial^2 \eta_R}{\partial t^2}, \quad (3.6.38)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_R}{\partial t^2} - C_{kR}^2 \frac{\partial^2 \eta_R}{\partial z^2} = E \frac{\rho_L - \rho_e}{\rho_R + \rho_e} \frac{\partial^2 \eta_L}{\partial t^2}, \quad (3.6.39)$$

где квадраты изгибных скоростей для левой и правой трубок даются выражениями

$$C_{kL}^2 = \frac{2\rho V_A^2}{\rho_L + \rho_e}, \quad C_{kR}^2 = \frac{2\rho V_A^2}{\rho_R + \rho_e}. \quad (3.6.40)$$

Введём безразмерные параметры

$$r = \frac{R_L + R_R}{d}, \quad s = \frac{R_R}{R_L}. \quad (3.6.41)$$

Очевидно  $r \leq 1$ . С помощью уравнения (3.6.3) легко получить

$$\cosh \tau_L = \frac{1 + s + r^2(1 - s)}{2r}, \quad \cosh \tau_R = \frac{1 + s - r^2(1 - s)}{2rs}. \quad (3.6.42)$$

Эти уравнения можно рассматривать как квадратные уравнения для  $e^{-\tau_L}$  и  $e^{-\tau_R}$ . Найдя эти величины можно вычислить  $E = \exp[-(\tau_L + \tau_R)]$  и получить соотношение между  $E$ ,  $r$  и  $s$ . После длинных, но очевидных вычислений находим

$$r^2 = \frac{E(1+s)^2}{(s+E)(1+sE)}. \quad (3.6.43)$$

Если зафиксировать  $E$ , то  $r$  будет функцией  $s$ . Нетрудно показать что  $r < 1$  при любом  $s > 0$ ,  $r \rightarrow 1$  когда  $s \rightarrow 0$  или  $s \rightarrow \infty$  и достигает минимального значения  $r_{\min}$  при  $s = 1$ , где

$$r_{\min} = \frac{2\sqrt{E}}{1+E}. \quad (3.6.44)$$

Изгибная мода прямой магнитной трубки является единственной волновой модой смещающей ось трубки. Таким образом, желобковые моды не смещают ось трубки. В системе двух магнитных трубок линии не возмущаемые желобковыми модами это не оси трубок а две линии параллельные осям, одна пересекающая плоскость  $xy$  в точке с координатами  $(-a, 0)$ , а другая — в точке с координатами  $(a, 0)$ . В бицилиндрических координатах эти две линии соответствуют  $\tau \rightarrow -\infty$  и  $\tau \rightarrow \infty$ . Обозначим смещения этих линий через  $\xi_L$  and  $\xi_R$ . С помощью уравнений (3.6.32) и (3.6.33) получим

$$\begin{aligned} \xi_L &= \frac{\eta_L e^{-\tau_R}}{2\epsilon^2 a} [-\mathbf{e}_\tau \cos(\sigma - \sigma_0) + \mathbf{e}_\sigma \sin(\sigma - \sigma_0)], \\ \xi_R &= \frac{\eta_R e^{-\tau_L}}{2\epsilon^2 a} [\mathbf{e}_\tau \cos(\sigma - \sigma_0) + \mathbf{e}_\sigma \sin(\sigma - \sigma_0)]. \end{aligned} \quad (3.6.45)$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\tau &= \frac{\mathbf{e}_x(1 - \cosh \tau \cos \sigma) - \mathbf{e}_y \sinh \tau \sin \sigma}{(\cosh \tau - \cos \sigma)}, \\ \mathbf{e}_\sigma &= -\frac{\mathbf{e}_x \sinh \tau \sin \sigma + \mathbf{e}_y(1 - \cosh \tau \cos \sigma)}{(\cosh \tau - \cos \sigma)}, \end{aligned} \quad (3.6.46)$$

где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  — единичные векторы в направлениях  $x$  и  $y$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\tau &\rightarrow -\mathbf{e}_x \cos \sigma + \mathbf{e}_y \sin \sigma \\ \mathbf{e}_\sigma &\rightarrow \mathbf{e}_x \sin \sigma + \mathbf{e}_y \cos \sigma, \end{aligned} \quad (3.6.47)$$

при  $\tau \rightarrow -\infty$ , и

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\tau &\rightarrow -\mathbf{e}_x \cos \sigma - \mathbf{e}_y \sin \sigma, \\ \mathbf{e}_\sigma &\rightarrow -\mathbf{e}_x \sin \sigma + \mathbf{e}_y \cos \sigma, \end{aligned} \quad (3.6.48)$$



при  $\tau \rightarrow \infty$ . С помощью этих результатов перепишем уравнение (3.6.45) в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}_L &= \frac{\eta_L e^{-\tau R}}{2\epsilon^2 a} (-\mathbf{e}_x \cos \sigma_0 + \mathbf{e}_y \sin \sigma_0), \\ \boldsymbol{\xi}_R &= \frac{\eta_R e^{-\tau L}}{2\epsilon^2 a} (\mathbf{e}_x \cos \sigma_0 + \mathbf{e}_y \sin \sigma_0).\end{aligned}\quad (3.6.49)$$

Эти соотношения будут использованы в дальнейшем при обсуждении поляризаационных свойств собственных мод.

#### 3.6.4. Собственные моды колебаний в случае постоянной плотности

Для исследования собственных волновых мод системы двух параллельных магнитных трубок используем уравнения (3.6.38) и (3.6.39). Будем рассматривать только фундаментальные моды по отношению к переменной  $z$  и положим  $\eta_L$  и  $\eta_R$  пропорциональными  $\exp(-i\omega) \cos(kz)$ , где  $k = \pi/L$ . После этого система уравнений (3.6.38) и (3.6.39) сводится к

$$(\omega^2 - k^2 C_{kL}^2) \eta_L = E \frac{\rho_R - \rho_e}{\rho_L + \rho_e} \omega^2 \eta_R, \quad (3.6.50)$$

$$(\omega^2 - k^2 C_{kR}^2) \eta_R = E \frac{\rho_L - \rho_e}{\rho_R + \rho_e} \omega^2 \eta_L. \quad (3.6.51)$$

Уравнения (3.6.50) и (3.6.51) являются системой однородных линейных алгебраических уравнений относительно переменных  $\eta_L$  и  $\eta_R$ . Эта система имеет нетривиальные решения только когда её определитель равен нулю. Это условие даёт дисперсионное уравнение связывающее  $\omega$  и  $k$ :

$$(\omega^2 - C_{kL}^2 k^2) (\omega^2 - C_{kR}^2 k^2) = \frac{\omega^4 E^2 (\rho_L - \rho_e) (\rho_R - \rho_e)}{(\rho_L + \rho_e) (\rho_R + \rho_e)}. \quad (3.6.52)$$

Заметим что  $\rho V_A^2 = \rho_L V_{AL}^2 = \rho_R V_{AR}^2 = \rho_e V_{Ae}^2 = B^2/\mu_0$ . Уравнение (3.6.52) имеет четыре решения,  $\omega = \pm\omega_+$  и  $\omega = \pm\omega_-$ , где

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{V_{Ae}^2 k^2 (\zeta_L + \zeta_R + 2 \pm Q)}{(\zeta_L + 1)(\zeta_R + 1) - (\zeta_L - 1)(\zeta_R - 1)E^2}, \quad (3.6.53)$$

$$\zeta_L = \frac{\rho_L}{\rho_e}, \quad \zeta_R = \frac{\rho_R}{\rho_e}, \quad (3.6.54)$$

$$Q = \sqrt{(\zeta_L - \zeta_R)^2 + 4(\zeta_L - 1)(\zeta_R - 1)E^2}. \quad (3.6.55)$$

В дальнейшем моду с частотой  $\omega_+$  называем высокочастотной, а моду с частотой  $\omega_-$  — низкочастотной. Нетрудно показать что неравенство

$$\omega_+^2 < \omega_{Ae}^2 \equiv V_{Ae}^2 k^2 \quad (3.6.56)$$

эквивалентно очевидному неравенству

$$(\zeta_L - 1)(\zeta_R - 1)(1 - E^2) + 2(\zeta_L - \zeta_R) > 0.$$

Таким образом, неравенство (3.6.56) справедливо и, следовательно как высокочастотная так и низкочастотная моды являются захваченными.

При  $\rho_L = \rho_e$  левая трубка исчезает и получаем невозмущённое состояние состоящее из одной прямой магнитной трубки. В этом случае уравнение (3.6.53) сводится к

$$\omega_-^2 = \frac{2\rho V_A^2 k^2}{\rho_e + \rho_R} \quad \text{и} \quad \omega_+^2 = V_{Ae}^2 k^2.$$

Первое выражение правильно воспроизводит изгибную частоту уединённой магнитной трубки. Второе выражение даёт частоту альвеновских колебаний во внешней среде. Другой важный случай получается в пределе  $d \rightarrow \infty$ . В соответствии с уравнениями (3.6.4) имеем  $\tau_L \rightarrow \infty$  и  $\tau_R \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $E \rightarrow 0$ . Тогда корни уравнения (3.6.52) стремятся к  $kC_{kL}$  и  $kC_{kR}$ , это означает что трубки осциллируют независимо каждая со своей изгибной частотой.

Исследуем теперь поляризацию собственных волновых мод. Из уравнения (3.6.51) получим

$$\frac{\eta_R}{\eta_L} = \frac{\omega^2 E (\rho_L - \rho_e)}{(\rho_R + \rho_e)(\omega^2 - k^2 C_{kR}^2)}. \quad (3.6.57)$$

Графическое исследование уравнения (3.6.52), рассматриваемое как уравнение определяющее  $\omega^2$ , имеет два действительных корня, один меньше чем  $k^2 C_{kL}^2$  и  $k^2 C_{kR}^2$ , а другой — больше чем  $k^2 C_{kL}^2$  и  $k^2 C_{kR}^2$ . Отсюда следует что  $\omega_-^2 < k^2 C_{kL}^2, k^2 C_{kR}^2$ , а  $\omega_+^2 > k^2 C_{kL}^2, k^2 C_{kR}^2$ . Тогда из уравнения (3.6.57) следует что  $\eta_R$  и  $\eta_L$  имеют разные знаки в случае низкочастотной моды и одинаковые знаки в случае высокочастотной моды. Из этих результатов следует что в высокочастотной моде трубки колеблются в антифазе когда  $\sigma_0 = 0$  и в фазе когда  $\sigma_0 = \pi/2$ . В случае низкочастотной моды ситуация обратная. Трубки колеблются в фазе когда  $\sigma_0 = 0$  и в антифазе когда  $\sigma_0 = \pi/2$ .

Интересно сравнить полученные результаты с численными результатами представленными в работе Luna et al. (2008). Эти авторы исследовали колебания двух одинаковых параллельных магнитных трубок. Они получили следующие результаты. Имеется четыре собственные моды колебаний, которые Luna et al. (2008) обозначили через  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $S_x$  и  $S_y$ . Моды  $A_x$  и  $S_x$  поляризованы вдоль оси  $x$  которая параллельна линии соединяющей точки пересечения осей трубок с плоскостью  $xy$ . Моды  $A_y$  и  $S_y$  поляризованы вдоль оси  $y$  которая перпендикулярна линии соединяющей точки пересечения осей трубок с плоскостью  $xy$ . В модах  $A_x$  и  $A_y$  трубки колеблются в антифазе, а в модах  $S_x$  и  $S_y$  — в фазе. Обозначим частоты этих мод через  $\omega_{Ax}$ ,  $\omega_{Ay}$ ,  $\omega_{Sx}$  и  $\omega_{Sy}$ . Имеют место следующие неравенства:

$$\omega_{Sx} < \omega_{Ay} < \omega_{Sy} < \omega_{Ax}. \quad (3.6.58)$$

При  $d \rightarrow \infty$  все четыре частоты стремятся к  $kC_k$ , где  $C_k$  — изгибная скорость для обеих трубок.

Если трубки идентичны вводим обозначения  $R = R_L = R_R$ ,  $\rho_i = \rho_L = \rho_R$ ,  $\zeta = \zeta_L = \zeta_R$  и  $\tau_0 = \tau_L = \tau_R$ . В этом случае уравнение (3.6.53) определяющее частоты колебаний сводится к

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k^2 C_k^2}{1 \mp E \frac{\zeta-1}{\zeta+1}}, \quad (3.6.59)$$

где теперь  $E = e^{-2\tau_0}$ . Поскольку  $\tau_0 \rightarrow \infty$  при  $d \rightarrow \infty$ , получаем  $\omega_{\pm} \rightarrow kC_k$  в полном соответствии с результатами полученными в работе Luna et al. (2008).

Однако аналитические результаты не вполне совпадают с численными. Основное различие заключается в следующем. Низкочастотная мода поляризованная вдоль оси  $x$  может быть отождествлена с  $S_x$ , а мода поляризованная вдоль оси  $y$  — с  $A_y$ . Высокочастотная мода поляризованная вдоль оси  $x$  может быть отождествлена с  $A_x$ , а мода поляризованная вдоль оси  $y$  — с  $S_y$ . Однако в аналитическом исследовании имеем  $\omega_{Sx} = \omega_{Ay}$  и  $\omega_{Sy} = \omega_{Ax}$ , так что имеется вырождение волновых мод. В результате система из двух трубок может колебаться в любом направлении с частотой  $\omega_-$ , а также в любом направлении с частотой  $\omega_+$ . Это вырождение можно снять если продолжить анализ до следующего приближения по малому параметру  $\epsilon$ .

### 3.6.5. Эффект изменения плотности вдоль трубок

В этом разделе изучается влияние изменения плотности вдоль трубок на собственные моды. Будем искать решение системы уравнений (3.6.38) и (3.6.39) с  $\eta_L$  and  $\eta_R$  пропорциональными  $\exp(-i\omega)$ . Решение должно удовлетворять граничным условиям

$$\eta_L = \eta_R = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm L/2. \quad (3.6.60)$$

Уравнения (3.6.38) и (3.6.39) приводятся к виду

$$\frac{d^2\eta_L}{dz^2} + \frac{\omega^2}{C_{kL}^2} \left( \eta_L - \frac{\zeta_R - 1}{\zeta_L + 1} E\eta_R \right) = 0, \quad (3.6.61)$$

$$\frac{d^2\eta_R}{dz^2} + \frac{\omega^2}{C_{kR}^2} \left( \eta_R - \frac{\zeta_L - 1}{\zeta_R + 1} E\eta_L \right) = 0. \quad (3.6.62)$$

Уравнения (3.6.61) и (3.6.62) вместе с граничными условиями (3.6.60) являются задачей на собственные значения определяющей  $\omega$ . Эта задача была решена численно. Предполагалось что обе трубки имеют форму полуокружностей с радиусом  $R$ , так что расстояние вдоль трубки,  $z$ , связано с высотой в атмосфере  $h$  соотношением  $h = R \cos(z/R)$ . Предполагалось также что атмосфера изотермическая и температура плазмы одна и та же внутри трубок и в окружающей плазме, так что  $\rho_{e,L,R} = \bar{\rho}_{e,L,R} \exp(-h/H)$ , где  $H$  — шкала высот, а  $\bar{\rho}_{e,L,R}$  — плотности в основании петли. Выражение для плотностей можно переписать в виде

$$\rho_{e,L,R} = \bar{\rho}_{e,L,R} \exp\left(-\frac{R}{H} \cos \frac{z}{R}\right). \quad (3.6.63)$$

Таким образом,  $\zeta_L = \rho_L/\rho_e$  и  $\zeta_R = \rho_R/\rho_e$  являются постоянными, а выражения для  $C_{kL}^2$  и  $C_{kR}^2$  сводятся к

$$C_{kL,R}^2 = \frac{2\bar{V}_{Ae}^2}{\zeta_{L,R} + 1} \exp\left(\frac{R}{H} \cos \frac{z}{R}\right), \quad (3.6.64)$$

где  $\bar{V}_{Ae}^2 = B_0^2/(\mu_0\bar{\rho}_e)$  — квадрат альвеновской скорости в окружающей плазме у основания петель.

На Рис. 3.6.4 показана зависимость частот высокочастотной и низкочастотной мод от параметра  $\lambda = R/H$  при  $\zeta_L = \zeta_R = 10$ . Левая часть рисунка соответствует  $E = 0.188$ . При  $s = 2$  это значение  $E$  соответствует  $r = 3/4$ , т.е. при отношении радиусов трубок равном 2 расстояние между

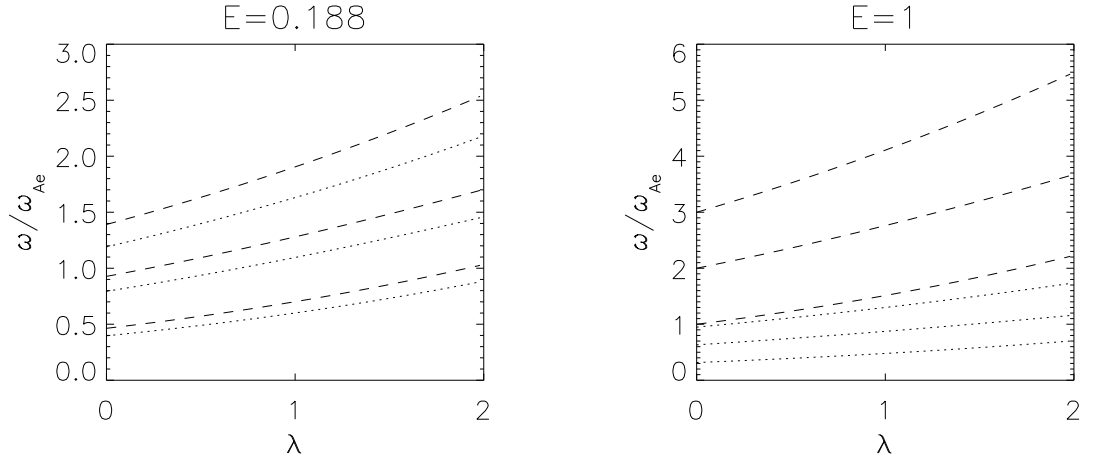


Рис. 3.6.4. Зависимость частот низкочастотной и высокочастотной мод от  $\lambda$  при  $\zeta_L = \zeta_R = 10$  и  $E = 0.188$  и  $E = 1$ . Пунктирная и точечная кривые соответствуют высокочастотной и низкочастотной модам. Показаны частоты фундаментальной моды (две нижние кривые), первого обертона (две средние кривые) и второго обертона (две верхние кривые).

осями трубок равно удвоенному большому радиусу. Правая часть рисунка соответствует  $E = 1$ . Из уравнения (3.6.43) следует что  $r = 1$  при любом значении  $s$ , т.е. это соответствует предельному случаю когда трубки касаются друг друга. На рисунке частоты высокочастотных мод показаны штриховыми кривыми, а частоты низкочастотных мод — точечными кривыми для фундаментальной моды, первого обертона и второго обертона. Частоты нормализованы с помощью альвеновской частоты внешней плазмы  $\omega_{Ae} = k\bar{V}_{Ae}$ .

На Рис. 3.6.5 показана зависимость частот высокочастотной и низкочастотной мод от  $E$  при  $\zeta_L = \zeta_R = 10$ . Левая часть рисунка соответствует  $\lambda = 0$ , т.е. петлям с постоянной плотностью. Правая часть рисунка соответствует  $\lambda = 1$ , что, в свою очередь, соответствует  $H = R$ . Для того чтобы найти частоты для данных значений  $r$  и  $s$ , необходимо вычислить  $E$  с помощью уравнения (3.6.43). Например, если положить  $s = 1$ , т.е.  $R_L = R_R$ , и  $r = 4/5$ , т.е.  $d = \frac{5}{2}R_L$ , то получим  $E = 1/4$ .

На Рис. 3.6.6 показана зависимость частот высокочастотной и низкочастотной мод от отношения плотностей плазмы внутри и снаружи трубок в том случае когда плотности внутри обеих трубок совпадают,  $\zeta_L = \zeta_R = \zeta$ , и  $E = 7 - 3\sqrt{5} \approx 0.292$ . Если радиусы трубок равны ( $s = 1$ ), это значение  $E$  соответствует  $r = 2/3$ . Левый рисунок соответствует  $\lambda = 0$ , т.е. случаю когда плотность постоянна. Правый рисунок соответствует  $\lambda = 1$ , т.е.  $H = R$ .

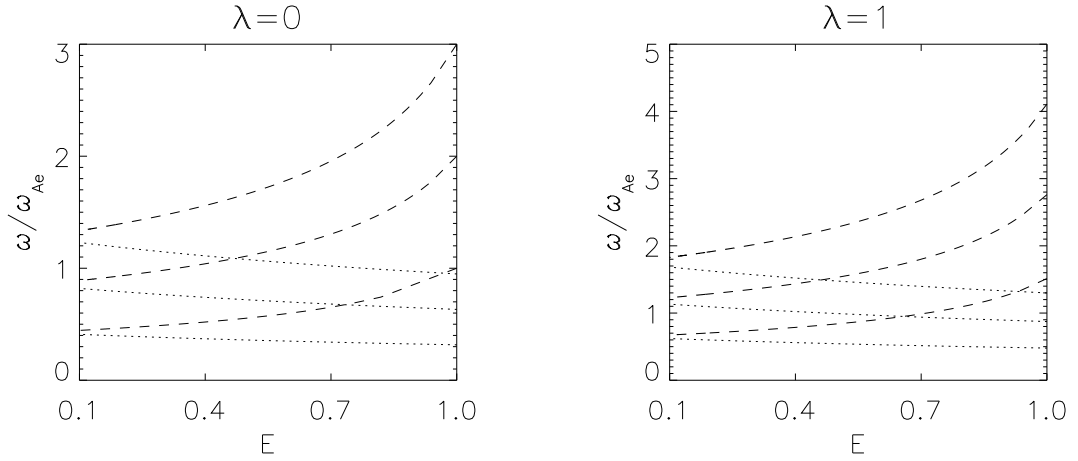


Рис. 3.6.5. Зависимость частот низкочастотной и высокочастотной мод от  $E$  при  $\zeta_L = \zeta_R = 10$ . Левый и правый рисунки соответствуют  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$ . Пунктирная и точечная кривые соответствуют высокочастотной и низкочастотной модам. Показаны частоты фундаментальной моды (две нижние кривые), первого обертона (две средние кривые) и второго обертона (две верхние кривые). Заметим что, при заданном отношении  $R_L/R_R$ , уменьшение  $E$  соответствует увеличению  $d$ .

### 3.6.6. Приложение к корональной сейсмологии

Как уже упоминалось ранее, Verwichte et al. (2004) впервые сообщили об одновременном наблюдении фундаментальной моды и первого обертона изгибных колебаний корональных петель. Важным свойством наблюдавшихся колебаний было то что отношение частот первого обертона и фундаментальной моды было меньше двух. Оно было равно 1.81 в первом случае и 1.64 во втором. Позже Van Doorselaere et al. (2007) использовали улучшенную технику обработки наблюдений и получили значения 1.82 и 1.58. Andries et al. (2005a) предположили, что отклонение отношения частот от двух связано с изменением плотности плазмы вдоль петли и разработали метод оценки шкалы высот в короне по наблюдаемым значениям отношения частот первого обертона и фундаментальной моды изгибных колебаний корональных петель.

Как в пионерской работе Andries et al. (2005a), так и во всех последующих работах посвящённых оценке шкалы высот в короне на основе наблюдаемых значений отношения частот первого обертона и фундаментальной моды, использовались модели корональной магнитной петли в виде монолитной магнитной трубки. Поскольку в настоящее время не ясно являются ли корональные петли монолитными магнитными трубками или они представляют собой пучок более тонких магнитных трубок, представляется интересным исследовать как изменится оценка шкалы высот если

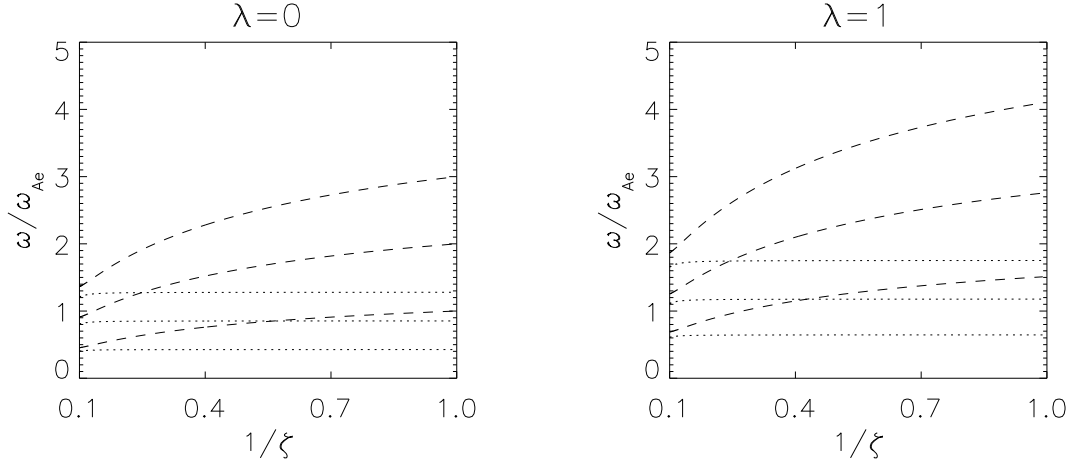


Рис. 3.6.6. Зависимость частот низкочастотной и высокочастотной мод от  $1/\zeta = \rho_e/\rho_L = \rho_e/\rho_R$  при  $E = 7 - 3\sqrt{5} \approx 0.292$ . Левый и правый рисунки соответствуют  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$ . Пунктирная и точечная кривые соответствуют высокочастотной и низкочастотной модам. Показаны частоты фундаментальной моды (две нижние кривые), первого обертона (две средние кривые) и второго обертона (две верхние кривые).

вместо модели монолитной трубки использовать модель петли в виде пучка более тонких трубок.

В данном разделе это исследование будет проведено для модели петли состоящей из двух более тонких трубок. Используем ту же модель, которая была использована в предыдущем разделе. Предполагается что две трубки колеблются в фазе, так что рассматриваются только волновые моды  $S_x$  и  $S_y$ . Частота первой моды равна  $\omega_-$ , а частота второй равна  $\omega_+$ . Дополнительно предполагается, что отношения плотностей плазмы внутри трубок и в окружающей плазме постоянны, т.е.  $\zeta_L$  и  $\zeta_R$  являются постоянными. После этого, вводя новые переменные

$$\begin{aligned}\eta_+ &= 2E(\zeta_R - 1)\eta_R + (Q - \zeta_L + \zeta_R)\eta_L, \\ \eta_- &= (Q - \zeta_L + \zeta_R)\eta_R - 2E(\zeta_L - 1)\eta_L,\end{aligned}\quad (3.6.65)$$

сводим систему уравнений (3.6.61) и (3.6.62) к виду

$$4V_{Ae}^2 \frac{d^2\eta_{\pm}}{dz^2} + \omega^2(\zeta_L + \zeta_R + 2 \mp Q)\eta_{\pm} = 0. \quad (3.6.66)$$

Как видим, получено два не связанных уравнения, одно для  $\eta_+$  и другое для  $\eta_-$ . Используя уравнение (3.6.49) нетрудно показать что, в том случае когда трубки колеблются в фазе,  $\eta_-$  соответствует горизонтально поляризованным колебаниям, а  $\eta_+$  — вертикально поляризованным колебаниям. Используя безразмерные величины

$$\bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \Omega_{\pm}^2 = \frac{\omega^2 L^2}{4V_{Ae}^2} (\zeta_L + \zeta_R + 2 \mp Q), \quad (3.6.67)$$

сводим уравнение (3.6.66) к виду

$$\frac{d^2\eta_{\pm}}{d\bar{z}^2} + q(\bar{z})\Omega_{\pm}^2\eta_{\pm} = 0, \quad (3.6.68)$$

где  $q(\bar{z}) = \rho_e/\bar{\rho}_e$ ,  $\bar{\rho}_e = \rho_e(0)$ . Это уравнение вместе с условием в замороженности  $\eta_{\pm}(\pm 1/2) = 0$  образуют задачу на собственные значения определяющую частоты колебаний. Как видим, в безразмерных переменных задача на собственные значения одна и та же для низкочастотных и высокочастотных колебаний. Изгибные колебания прямой трубки описываются уравнением (2.2.67) с  $R(z) = \text{const}$ . Полагая в этом уравнении  $\eta \propto e^{-i\omega t}$  получим

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{\omega^2}{C_k^2}\eta = 0, \quad C_k^2 = \frac{2B^2}{\mu_0(\rho_i + \rho_e)}. \quad (3.6.69)$$

Если  $\rho_i/\rho_e = \zeta = \text{const}$  то, в безразмерных переменных

$$\bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \Omega^2 = \frac{\omega^2 L^2 (\zeta + 1)}{2\bar{V}_{Ae}^2}, \quad (3.6.70)$$

уравнение (3.6.69) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\eta}{d\bar{z}^2} + q(\bar{z})\Omega^2\eta = 0. \quad (3.6.71)$$

Как видим, уравнение (3.6.71) совпадает с уравнением (3.6.68). Пусть  $\Omega_f$  – фундаментальная частота, а  $\Omega_{on}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – частоты обертонов задачи на собственные значения состоящей из уравнения (3.6.68) (или, что то же самое, уравнения (3.6.71)) и граничных условий  $\eta(\pm 1/2) = 0$ . Тогда квадраты размерных частот высокочастотных и низкочастотных колебаний системы двух трубок даются выражениями

$$\omega_{f+}^2 = \frac{2\Omega_f^2 \bar{V}_{Ae}^2 L^{-2}}{\zeta_L + \zeta_R + 2 - Q}, \quad \omega_{on+}^2 = \frac{2\Omega_{on}^2 \bar{V}_{Ae}^2 L^{-2}}{\zeta_L + \zeta_R + 2 - Q}, \quad (3.6.72)$$

$$\omega_{f-}^2 = \frac{2\Omega_f^2 \bar{V}_{Ae}^2 L^{-2}}{\zeta_L + \zeta_R + 2 + Q}, \quad \omega_{on-}^2 = \frac{2\Omega_{on}^2 \bar{V}_{Ae}^2 L^{-2}}{\zeta_L + \zeta_R + 2 + Q}, \quad (3.6.73)$$

а частоты колебаний уединённой трубки даются выражениями

$$\omega_f^2 = \frac{2\Omega_f^2 \bar{V}_{Ae}^2 L^{-2}}{\zeta + 1}, \quad \omega_{on}^2 = \frac{2\Omega_{on}^2 \bar{V}_{Ae}^2 L^{-2}}{\zeta + 1}, \quad (3.6.74)$$

где индексы ‘ $f$ ’ и ‘ $o$ ’ относятся к фундаментальной моде и обертонам, а  $n = 1, 2, \dots$  – порядковые номера обертонов. Как видим, частоты горизонтальных и вертикальных колебаний системы двух трубок различны. Они



так же отличаются от частот колебаний уединённой трубки. Эти различия вызваны тем что нестационарное течение плазмы вокруг трубок возникающее при колебании уединённой магнитной трубки отличается от течения вокруг трубок в системе двух трубок. Однако отношения частот обертонов к частоте фундаментальной моды одни и те же в случае одной трубки и системы двух трубок. Это означает что оценка шкалы высот полученная в работе Andries et al. (2005a) не изменится если предположить что наблюдались колебания не одной магнитной трубки а системы двух трубок.

В работе Andries et al. (2005a) принималось  $\zeta = 10$ . Из анализа представленного в данном разделе следует что отношение частот обертонов к фундаментальной частоте не зависит от  $\zeta$ . Единственное условие которое необходимо удовлетворить это  $\zeta = \text{const}$ .

### 3.6.7. Выводы

В настоящей главе исследованы изгибные колебания системы состоящей из двух параллельных корональных петель с плотностью изменяющейся вдоль петель. В качестве модели такой системы рассматривалось невозмущённое состояние с двумя параллельными магнитными трубками. Бицилиндрические координаты были использованы для вывода системы уравнений описывающих изгибные колебания системы двух трубок в приближении тонкой трубки. Эта система использовалась для исследования собственных волновых мод. Вначале были исследованы собственные моды однородных трубок, т.е. трубок с постоянной плотностью. Затем было исследовано влияние изменения плотности вдоль трубок на собственные моды. Предполагалось что имеется система состоящая из двух петель расположенных в двух параллельных вертикальных плоскостях и имеющих форму полукруга с радиусом  $R$ . Также предполагалось что атмосфера изотермическая и температура плазмы одна и та же внутри трубок и в окружающей плазме. Из этого предположения, в частности, следует что отношения плотностей внутри петель к плотности окружающей плазмы постоянны. Система петель моделировалась системой двух параллельных прямых магнитных трубок. Таким образом, кривизной петель пренебрегалось. После этого задача на собственные значения была решена численно.

Обсуждалось приложение полученных результатов к корональной сейсмологии. Рассматривалась проблема определения шкалы высот в ко-

роне с помощью отношения частот первого обертона и фундаментальной моды изгибных колебаний корональных петель. Сравнивались результаты полученные на основе двух моделей. В первой модели предполагалось что корональная петля является монолитной магнитной трубкой. Во второй модели считалось что петля состоит из двух близко расположенных параллельных трубок. Было показано что обе модели дают одну и ту же оценку для шкалы высот и эта оценка не зависит от отношения плотностей в трубках и в окружающей плазме.

### 3.7. Изгибные колебания корональных петель в присутствии течения

Наблюдения на борту SoHO (см. Brekke et al. 1997; Winebarger et al. 2002), TRACE (см. Winebarger et al. 2001) и Hinode (см. Chae et al. 2008; Ofman et al. 2008; Terradas et al. 2008) показывают что течения регулярно присутствуют в корональных петлях в активных областях короны. Таким образом, возникает необходимость изучения влияния течения в корональной петле на их изгибные колебания.

Gruszecki et al. (2008) численно исследовали изгибные колебания корональных петель в присутствии течения используя модель петли в виде магнитного слоя. Terradas et al. (2010b) изучили влияние течения на распространяющиеся изгибные волны в однородных магнитных трубках. В данной главе исследуется влияние течения на стоячие волны в магнитных трубках с плотностью изменяющейся вдоль трубки.

#### 3.7.1. Невозмущённое состояние, уравнения и граничные условия

В качестве модели корональной петли рассматривается прямая магнитная трубка. Магнитное поле параллельно оси петли и имеет везде постоянную величину. Используем цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  с осью  $z$  совпадающей с осью трубки. Плотность плазмы  $\rho$  является функцией  $r$  и  $z$  и может также меняться со временем. Магнитная трубка аналогична трубке рассматривавшейся в разделе 2.4 и состоит из двух частей, внутренней области и окружающей её кольцевой области с толщиной  $\ell$  (см. Рис. 3.7.1). Во внутренней части плотность не меняется в радиальном направлении. В кольцевой области она убывает от её значения во внутренней области

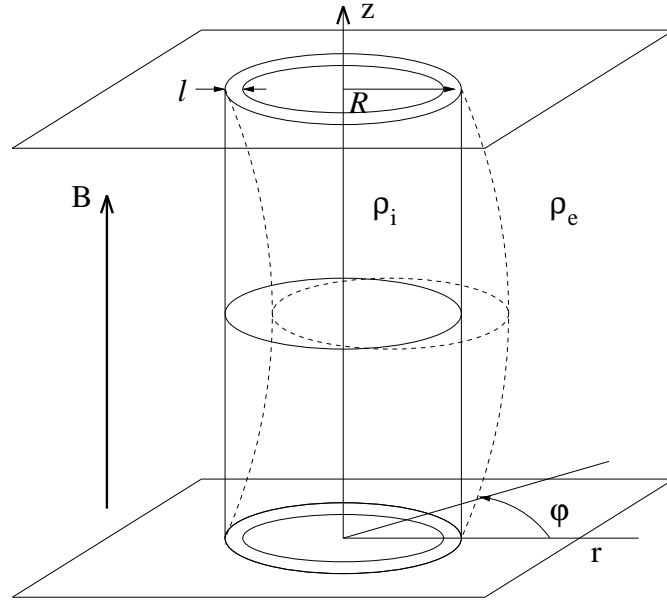


Рис. 3.7.1. Невозмущённое состояние в виде однородной магнитной трубки с тонким переходным слоем между двумя однородными областями. Пунктирная линия показывает возмущение в виде фундаментальной изгибной моды.

до значения в окружающей плазме. Во внешней плазме плотность опять не зависит от радиальной координаты. Таким образом, плотность задаётся выражением

$$\rho = \begin{cases} \rho_i(t, z), & 0 < r < R - \ell/2, \\ \rho_t(t, r, z), & R - \ell/2 < r < R + \ell/2, \\ \rho_e(t, z), & r > R + \ell/2, \end{cases} \quad (3.7.1)$$

где  $R$  — радиус сечения трубки и  $\rho_t(t, r, z)$  — монотонная функция  $r$ ,  $\rho_t(t, R - \ell/2, z) = \rho_i(t, z)$ ,  $\rho_t(t, R + \ell/2, z) = \rho_e(t, z)$ . Изменение плотности со временем вызывает течение плазмы в направлении оси  $z$ . Плотность плазмы и скорость невозмущённого течения  $U(t, r, z)$  связаны уравнением сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial z} = 0. \quad (3.7.2)$$

Возмущения магнитного поля и скорости,  $\mathbf{b} = (b_r, b_\varphi, b_z)$  и  $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$ , описываются линеаризованными уравнениями идеальной магнитной гидродинамики в приближении холодной плазмы,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}, \quad (3.7.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} + U \times \mathbf{b}), \quad (3.7.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (3.7.5)$$

где  $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ,  $B = \text{const}$  — величина магнитного поля,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор в направлении  $z$ . В дальнейшем увидим что имеется цилиндрическая поверхность  $r = r_A$  с  $R - \ell/2 < r_A < R + \ell/2$  где частота изгибных колебаний совпадает с локальной альвеновской частотой. В окрестности этой поверхности изгибные колебания характеризуются большими градиентами возмущённых величин, так что в этой окрестности важен учёт диссипации. Так как в уравнениях (3.7.3) и (3.7.4) отсутствуют диссипативные члены, система (3.7.3)-(3.7.5) описывает движение плазмы везде кроме диссипативного слоя охватывающего резонансную поверхность  $r = r_A$ . Так как  $\rho$  не зависит от  $r$  при  $r < R - \ell/2$  и  $r > R + \ell/2$ , то же самое верно для  $U$ . Тогда из уравнения (3.7.3) следует что  $u_z = 0$  при  $r < R - \ell/2$  и  $r > R + \ell/2$ .

В дальнейшем используем так называемое квази-Лагранжево описание. Рассмотрим индивидуальную магнитную линию. Уравнение невозмущённой магнитной линии можно записать в векторной форме в виде  $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z + \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки на магнитной линии, а  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор удовлетворяющий условию  $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}_z$ . Уравнение возмущённой магнитной линии имеет вид

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z + \mathbf{a} + \boldsymbol{\xi}(t, z), \quad (3.7.6)$$

где  $\boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{e}_z$  — смещение магнитной линии. Рассмотрим бесконечно малый объём плазмы который находится на магнитной линии в начальный момент времени. Поскольку поле заморожено в плазму, этот объём остаётся на магнитной линии в любой последующий момент времени. Тогда траектория этого объёма определяется уравнением

$$\mathbf{r}(t) = z(t)\mathbf{e}_z + \mathbf{a} + \boldsymbol{\xi}(t, z(t)), \quad (3.7.7)$$

а его скорость даётся выражением

$$U\mathbf{e}_z + \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (U + u_z)\mathbf{e}_z + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (U + u_z)\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial z}. \quad (3.7.8)$$

Принимая во внимание что  $u_z = 0$  в областях  $r < R - \ell/2$  и  $r > R + \ell/2$  где  $U$  не зависит от  $r$  получим соотношение в этих областях,

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + U\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial z}. \quad (3.7.9)$$

Вектор магнитного поля касателен к магнитной линии. Из этого следует что вектор  $B\mathbf{e}_z + \mathbf{b}$  параллелен вектору  $\mathbf{e}_z + \partial\boldsymbol{\xi}/\partial z$ . Из этого условия следует что, в линейном приближении,

$$\mathbf{b}_\perp = B \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial z}, \quad (3.7.10)$$

где  $\mathbf{b}_\perp = (b_r, b_\varphi, 0)$ . Подставляя уравнения (3.7.9) и (3.7.10) в уравнение (3.7.4) находим что компонента этого уравнения перпендикулярная оси  $z$  удовлетворяется тождественно.

Введём возмущение магнитного давления  $P = Bb_z/\mu_0$ . Для того чтобы получить соотношение между  $b_z$  и  $\boldsymbol{\xi}$  используем  $z$ -компоненту уравнения (3.7.4) и уравнение (3.7.5). Используя уравнения (3.7.9) и (3.7.10) получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\rho V_A^2 \frac{\partial(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})}{\partial t}, \quad (3.7.11)$$

где, как и прежде,  $V_A^2 = B^2/\mu_0\rho$  — квадрат альвеновской скорости. Полагая что в начальный момент времени  $P = -\rho V_A^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$ , получим из уравнения (3.7.11)

$$P = -\rho V_A^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (3.7.12)$$

Подставляя уравнения (3.7.9) и (3.7.10) в уравнение (3.7.3), учитывая что  $u_z = 0$  и используя тождество

$$(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B} = -\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$

справедливое при  $\mathbf{B} = \text{const}$ , получим

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{\rho} \nabla_\perp P + V_A^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial z^2}, \quad (3.7.13)$$

где

$$\nabla_\perp = \nabla - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Как обычно, предполагаем что магнитные линии заморожены в плотную неподвижную плазму у основания петли. Таким образом выполняются граничные условия

$$\boldsymbol{\xi} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm L/2, \quad (3.7.14)$$

где  $L$  — длина петли. Поскольку уравнения (3.7.12) и (3.7.13) выведены в предположении что  $U$  не зависит от  $r$ , эти уравнения вместе с граничными условиями (3.7.14) используются для описания движения плазмы везде кроме переходного слоя между двумя областями с невозмущённой плотностью не зависящей от  $r$ .

### 3.7.2. Вывод уравнения описывающего изгибные колебания магнитной трубки в присутствии течения

Как и в предыдущих главах считаем что радиус трубки много меньше её длины и вводим малый параметр  $\epsilon = R/L$ . Затем вводим “растянутую” переменную  $Z = \epsilon z$ . Характерным временем задачи является период колебаний который, по порядку величины, равен  $L/C_{kh} = \epsilon^{-1}R/C_{kh}$ , где  $C_{kh}$  – характерная изгибная скорость. В соответствии с этой оценкой вводим “медленное” время  $T = \epsilon t$ . Применим оператор  $(\nabla_{\perp} \cdot)$  к уравнению (3.7.13). В результате, используя уравнение (3.7.12), получим уравнение для  $P$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - \frac{\epsilon^2}{V_A^2} \left( \frac{\partial}{\partial T} + U \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 P + \epsilon^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (3.7.15)$$

В дальнейшем рассматриваем только изгибные колебания и полагаем  $\xi$  и  $P$  пропорциональными  $\exp(i\varphi)$ . После этого, пренебрегая членами порядка  $\epsilon^2$  в уравнении (3.7.15), приводим его к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{P}{r^2} = 0. \quad (3.7.16)$$

Приближение тонкой трубки нельзя использовать вдали от трубки. Однако амплитуда изгибных колебаний быстро убывает с расстоянием от трубки, так что, фактически, необходимо описывать движение плазмы только на расстоянии в несколько радиусов поперечного сечения. На таком расстоянии приближение тонкой трубки справедливо и можно использовать уравнение (3.7.16). Решение этого уравнения регулярное при  $r = 0$  и убывающее при удалении от трубки имеет вид

$$P = \epsilon^2 \begin{cases} (r/R)Q_i(t, z), & 0 \leq r \leq R - \ell/2, \\ (R/r)Q_e(t, z), & r \geq R + \ell/2, \end{cases} \quad (3.7.17)$$

где  $Q_i(t, z)$  и  $Q_e(t, z)$  – произвольные функции удовлетворяющие условиям  $Q_i(t, \pm L/2) = Q_e(t, \pm L/2) = 0$ , а множитель  $\epsilon^2$  введён для удобства. Подставляя этот результат в уравнение (3.7.13) получим

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} + U_i \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \xi_{ri} - V_{Ai}^2 \frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial Z^2} = -\frac{Q_i}{R\rho_i}, \quad 0 \leq r \leq R - \frac{\ell}{2}, \quad (3.7.18)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} + U_e \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \xi_{re} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \xi_{re}}{\partial Z^2} = \frac{RQ_e}{r^2\rho_e}, \quad r \geq R + \frac{\ell}{2}. \quad (3.7.19)$$

Из уравнений (3.7.12) и (3.7.18), в частности, следует что  $\xi$  не зависит от  $r$  в области  $0 \leq r \leq R - \ell/2$ .

Введём скачок функции  $f(r)$  через неоднородный слой

$$\delta f = f(R + \ell/2) - f(R - \ell/2).$$

В дальнейшем считаем что  $\ell/R \ll 1$  и во всех вычислениях удерживаем члены пропорциональные  $\ell/R \ll 1$ , а членами порядка  $(\ell/R)^2$  и более высокого порядка пренебрегаем. Из уравнений (3.7.12) и (3.7.13) следует что  $\delta\xi_r \sim \ell/R$  и  $\delta P \sim \ell/R$ . Используя вторую оценку и уравнение (3.7.17) получим приближённое равенство

$$Q_e = Q_i + \epsilon^{-2} \delta P. \quad (3.7.20)$$

Подставляя этот результат в уравнение (3.7.19) получим приближённое уравнение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial T} + U_e \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \xi_{ri} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial Z^2} &= \frac{Q_i}{R \rho_e} \left( 1 - \frac{\ell}{R} \right) + \frac{\delta P}{\epsilon^2 \rho_e R} \\ &- \left( \frac{\partial}{\partial T} + U_e \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \delta \xi_r + V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \delta \xi_r}{\partial Z^2}. \end{aligned} \quad (3.7.21)$$

Исключая  $Q_i$  из уравнений (3.7.18) и (3.7.21) находим

$$\begin{aligned} \rho_i \left( \frac{\partial}{\partial T} + U_i \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \xi_{ri} + \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial T} + U_e \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \xi_{ri} - \frac{2B^2}{\mu_0} \frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial Z^2} \\ = \frac{\ell \rho_i}{R} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial T} + U_i \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \xi_{ri} - V_{Ai}^2 \frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial Z^2} \right] + \frac{\delta P}{\epsilon^2 R} \\ - \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial T} + U_e \frac{\partial}{\partial Z} \right)^2 \delta \xi_r + \rho_e V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \delta \xi_r}{\partial Z^2}. \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

Для того чтобы упростить обозначения введём  $\eta = \xi_{ri}$ . После этого, возвращаясь к первоначальным независимым переменным, получим

$$\rho_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \eta + \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_e \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \eta - \frac{2B^2}{\mu_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \mathcal{L}, \quad (3.7.23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\ell \rho_i}{R} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \eta - V_{Ai}^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right] + \frac{\delta P}{R} \\ &- \rho_e \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_e \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \delta \xi_r + \rho_e V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \delta \xi_r}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.7.24)$$

Заметим что  $\mathcal{L} = 0$  когда  $\ell = 0$ .

### 3.7.3. Изгибные колебания магнитных трубок с однородной плотностью и скоростью течения

В оставшейся части настоящей главы считается что трубка имеет резкую границу, так что  $\ell = 0$ . Таким образом, правая часть уравнения (3.7.23) равна нулю и оно является замкнутым уравнением описывающим эволюцию  $\eta$ . В данном разделе предполагаем также что  $\rho_i$ ,  $\rho_e$  и  $U_i$  являются постоянными и  $U_e = 0$ . Ищем решения уравнения (3.7.23) с граничными условиями

$$\eta = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm L/2, \quad (3.7.25)$$

в виде собственных волновых мод и полагаем  $\eta \sim \exp(-i\omega t)$ . После этого уравнение (3.7.23) сводится к виду

$$(C_k^2 - V_2^2) \frac{d^2\eta}{dz^2} + 2i\omega V_1 \frac{d\eta}{dz} + \omega^2 \eta = 0, \quad (3.7.26)$$

где

$$C_k^2 = \frac{2B^2}{\mu_0(\rho_i + \rho_e)}, \quad V_1 = \frac{\rho_i U_i + \rho_e U_e}{\rho_i + \rho_e}, \quad V_2^2 = \frac{\rho_i U_i^2 + \rho_e U_e^2}{\rho_i + \rho_e}. \quad (3.7.27)$$

Напомним что  $C_k$  – фазовая скорость изгибных колебаний тонкой однородной магнитной трубки в отсутствии течения. Общее решение уравнения (3.7.26) имеет вид

$$\eta = A_+ e^{ik_+ z} + A_- e^{ik_- z}, \quad (3.7.28)$$

где

$$k_{\pm} = \omega \frac{-V_1 \pm \sqrt{C_k^2 - V_3^2}}{C_k^2 - V_2^2}, \quad V_3^2 = V_2^2 - V_1^2 = \frac{\rho_i \rho_e (U_i - U_e)^2}{(\rho_i + \rho_e)^2}. \quad (3.7.29)$$

Подставляя уравнение (3.7.28) в граничные условия (3.7.25) получим систему двух однородных линейных алгебраических уравнений для  $A_+$  и  $A_-$ . Эта система имеет нетривиальное решение только когда её детерминант равен нулю. Это условие даёт дисперсионное уравнение определяющее  $\omega$ ,

$$\exp\left(\frac{2i\omega L \sqrt{C_k^2 - V_3^2}}{C_k^2 - V_2^2}\right) = 1. \quad (3.7.30)$$

Неотрицательные решения этого дисперсионного уравнения даются выражением

$$\omega_n = \frac{\pi n |C_k^2 - V_2^2|}{L \sqrt{C_k^2 - V_3^2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7.31)$$



Здесь  $n = 1$  соответствует фундаментальной моде, а  $n > 1$  — обертонам. Поскольку  $V_3 < V_2$ , имеем  $\omega_n < \pi C_k/L$  в случае умеренной скорости течения, т.е. когда  $C_k > V_2$ . Это вполне ожидаемый результат. Период фундаментальной моды равен времени прохождения сигнала от одного конца трубки до другого и обратно. Время прохождения сигнала от одного конца трубки до другого в направлении течения уменьшается за счёт течения, а время прохождения сигнала в обратном направлении увеличивается. Хорошо известно что сумма двух времён больше чем удвоенное время прохождения сигнала от одного конца трубки до другого в отсутствии течения.

Частота становится мнимой, что соответствует появлению неустойчивости, когда  $C_k^2 < V_3^2$ . При  $C_k^2 - V_3^2 \rightarrow 0$ ,  $\omega_n \rightarrow \infty$ , что конечно является нефизичным результатом. Однако, при выводе уравнения (3.7.23) предполагалось что характерное время задачи порядка альвеновского времени посчитанного по характерной длине равной длине трубки, т.е. это время было порядка  $L/C_k$ . Таким образом, уравнение (3.7.23) и, следовательно, уравнение (3.7.26) не описывает колебания с частотой много больше чем  $\pi C_k/L$ .

Собственные функции определяются выражениями

$$\eta_n = \exp\left(\frac{i\pi n V_1 \text{sign}(V_2^2 - C_k^2)}{L\sqrt{C_k^2 - V_3^2}} z\right) \begin{cases} \cos \frac{\pi n z}{L}, & n \text{ чётное,} \\ \sin \frac{\pi n z}{L}, & n \text{ нечётное.} \end{cases} \quad (3.7.32)$$

Как видим собственные функции комплексны и не являются ни чётными ни нечётными. Это также ожидаемый результат поскольку течение нарушает симметрию по отношению к оси  $z$ .

#### 3.7.4. Задача на собственные значения: общий случай

В этом разделе исследуются общие свойства задачи на собственные значения для уравнения (3.7.23) с  $\mathcal{L} = 0$ . Как и в предыдущем разделе полагаем  $\eta \propto \exp(-i\omega t)$ . Поскольку в настоящей главе предполагается что невозмущённое состояние стационарно, уравнения неразрывности связывающие плотность плазмы и скорость течения внутри и вне трубки сводятся к

$$\rho_i U_i = \text{const}, \quad \rho_e U_e = \text{const}. \quad (3.7.33)$$

В остальном  $\rho_{i,e}$  и  $U_{i,e}$  – произвольные функции  $z$ . Теперь уравнение (3.7.23) с  $\mathcal{L} = 0$  приводится к виду

$$C_k^2 \frac{d^2 \eta}{dz^2} - \frac{1}{\rho_i + \rho_e} \frac{d}{dz} (\rho_i + \rho_e) V_2^2 \frac{d\eta}{dz} + 2i\omega V_1 \frac{d\eta}{dz} + \omega^2 \eta = 0, \quad (3.7.34)$$

где  $C_k$ ,  $V_1$  и  $V_2$  как и в предыдущем разделе определяются уравнением (3.7.27), однако теперь они являются функциями  $z$ . Наблюдения показывают что скорости стационарных течений в короне обычно не превышают 100 км/с, в то время как типичное значение  $C_k$  по крайней мере несколько сотен км/с. Исходя из этого в дальнейшем предполагаем что  $V_2(z) < C_k(z)$  при  $z \in [-L/2, L/2]$ .

Введём новые переменные

$$u = \int_{-L/2}^z \frac{\psi_f dz'}{\psi(z')}, \quad q = \eta \exp(i\alpha\omega u), \quad (3.7.35)$$

где

$$\psi(z) = (\rho_i + \rho_e)(C_k^2 - V_2^2), \quad \alpha = \frac{\rho_i U_i + \rho_e U_e}{\psi_f}, \quad \psi_f = \psi(-L/2). \quad (3.7.36)$$

Из уравнения (3.7.33) следует что  $\alpha = \text{const}$ . Поскольку  $u(z)$  – монотонно возрастающая функция, существует обратная к ней функция  $z(u)$  которая также монотонно возрастает. В новых переменных уравнения (3.7.25) и (3.7.34) сводятся к

$$\frac{d^2 q}{du^2} + \omega^2 W(u) q = 0, \quad (3.7.37)$$

$$q = 0 \quad \text{при} \quad u = 0, u_0, \quad (3.7.38)$$

где

$$W(u) = \frac{1}{\psi_f^2} [(\rho_i + \rho_e)^2 C_k^2 - \rho_i \rho_e (U_i - U_e)^2], \quad u_0 = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\psi_f dz}{\psi(z)}. \quad (3.7.39)$$

Уравнения (3.7.37) и (3.7.38) образуют классическую задачу Штурма-Лиувилля для уравнения второго порядка в которой  $\omega^2$  является спектральным параметром. В соответствии с теорией задачи Штурма-Лиувилля собственные значения образуют монотонно возрастающую неограниченную последовательность (см. напр. Coddington and Levinson 1955). Нименьшее собственное значение равно квадрату частоты фундаментальной моды, а соответствующая собственная функция не имеет нулей в интервале  $(0, u_0)$ . Все остальные собственные значения равны квадратам

частот обертонов. Собственная функция соответствующая обертону с номером  $n$  имеет  $n$  нулей в интервале  $(0, u_0)$ .

Поскольку  $W(u)$  — действительная функция, без ограничения общности можно считать что  $q(u)$  тоже действительная функция. После этого, умножая уравнение (3.7.37) на  $q$ , интегрируя полученное уравнение от 0 до  $u_0$  и используя уравнение (3.7.38) получим

$$\omega^2 \int_0^{u_0} W(u) q^2 du = \int_0^{u_0} \left( \frac{dq}{du} \right)^2 du. \quad (3.7.40)$$

Поскольку  $\rho_i \rho_e (U_i - U_e)^2 < (\rho_i + \rho_e)^2 V_2^2$ , из предположения  $V_2 < C_k$  следует что  $W(u) > 0$ . Таким образом, из уравнения (3.7.40) следует что  $\omega^2 > 0$ , т.е. все собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (3.7.37), (3.7.38) положительны.

### 3.7.5. Собственные моды изгибных колебаний корональных петель с сифонными течениями

В настоящем разделе изучается влияние сифонных течений на изгибные колебания в корональных петлях. Первым шагом в этом анализе будет описание невозмущённого состояния.

#### 3.7.5a. Невозмущённое состояние

Существуют многочисленные исследования посвящённые сифонным течениям в корональных петлях (см. напр. Orlando et al. 1995 и ссылки в этой статье). В частности, были изучены сифонные течения вызванные разницей давлений у оснований корональной петли и несимметричным нагревом петли (см. напр. Vetta et al. 1999). Однако в данном разделе не будут обсуждаться различные сложные механизмы ответственные за возникновение сифонных течений поскольку целью анализа в данном разделе является не изучение самих сифонных течений, а анализ их влияния на изгибные колебания. В соответствии с этим используем очень простую модель сифонного течения “созданного” граничным условием у одного из оснований петли. Именно, предполагаем что скорость задана и равна  $U_f > 0$  у этого основания.

Рассматриваем петлю в форме полукруга с постоянным круговым сечением радиуса  $a$ . Предполагаем что атмосфера изотермическая и темпе-

ратура одна и та же внутри и вне петли. Плазма снаружи петли находится в покое,  $U_e = 0$ . После этого легко получить что плотность плазмы вне петли определяется выражением

$$\rho_e(z) = \frac{\rho_f}{\zeta} \exp\left(-\frac{L}{\pi H} \cos \frac{\pi z}{L}\right), \quad (3.7.41)$$

где  $H$  – шкала высот,  $\rho_f$  – плотность плазмы вне петли у её оснований, а  $\zeta > 1$  – отношение плотностей внутри и вне петли у основания где задана скорость. Внутри петли имеется течение со скоростью  $U_i = U$ . Плотность плазмы и скорость течения внутри петли связаны законом сохранения массы

$$\rho_i(z)U(z) = \rho_f U_f. \quad (3.7.42)$$

Плотность и скорость течения внутри трубки должны также удовлетворять уравнению сохранения момента которое в случае одномерного стационарного изотермического течения принимает вид

$$U \frac{dU}{dz} = -g \left( \frac{H}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dz} - \sin \frac{\pi z}{L} \right), \quad (3.7.43)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести, а последний член в правой части это проекция силы тяжести на касательную к оси петли. Интегрируя это уравнение получим

$$\frac{U^2}{2} + gH \ln \frac{\rho_i}{\rho_f} = \frac{U_f^2}{2} - \frac{gL}{\pi} \cos \frac{\pi z}{L}. \quad (3.7.44)$$

Используя уравнение (3.7.42) преобразуем это уравнение к виду

$$f(\kappa) \equiv \chi \left( \frac{1}{\kappa^2} - 1 \right) + 2 \ln \kappa = -\frac{2L}{\pi H} \cos \frac{\pi z}{L}, \quad (3.7.45)$$

где

$$\chi = \frac{U_f^2}{gH}, \quad \kappa = \frac{\rho_i}{\rho_f}. \quad (3.7.46)$$

Решение описывающее течение существует только если существует решение уравнения (3.7.45) определяющее  $\kappa$  как однозначную функцию  $z$  при  $z \in [-L/2, L/2]$ . Функция  $f(\kappa)$  принимает минимальное значение равное  $f_m(\chi) = 1 - \chi + \ln \chi$  при  $\kappa = \sqrt{\chi}$ . Она монотонно убывает от  $\infty$  до  $f_m(\chi)$  на интервале  $(0, \sqrt{\chi})$  и монотонно возрастает от  $f_m(\chi)$  до  $\infty$  на интервале  $(\sqrt{\chi}, \infty)$ . Нетрудно видеть что уравнение (3.7.45) имеет решение при любом  $z \in [-L/2, L/2]$  если и только если

$$\frac{L}{\pi H} \leq \frac{L_M}{\pi H} = -\frac{f_m(\chi)}{2} \equiv \frac{1}{2}(\chi - 1 - \ln \chi). \quad (3.7.47)$$

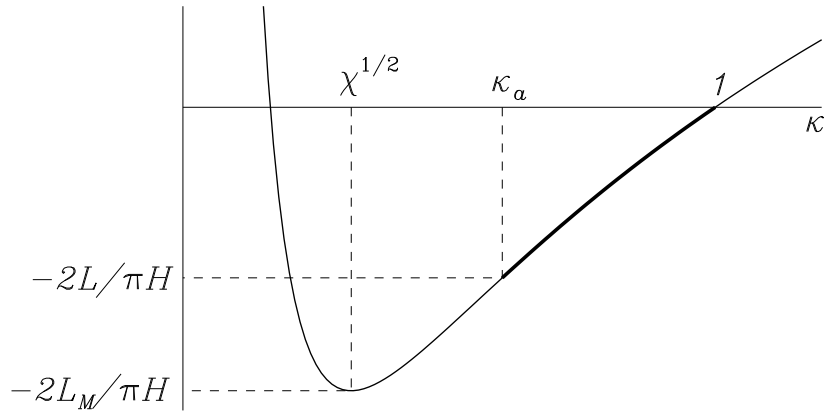


Рис. 3.7.2. График функции  $f(\kappa)$ . Толстая кривая показывает часть графика соответствующую решению уравнения (3.7.45) описывающего зависимость  $\kappa$  от  $z$  в корональной петле.

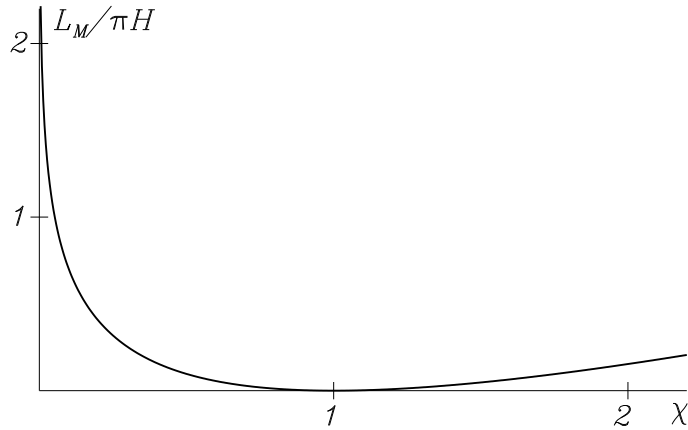


Рис. 3.7.3. Зависимость максимально возможного отношения высоты корональной петли к шкале высот,  $L_M/\pi H$ , от  $\chi$ .

На Рис. 3.7.2 показан график функции  $f(\kappa)$  и проиллюстрирован приведённый выше анализ. Зависимость максимально возможного отношения высоты корональной петли к шкале высот,  $L_M/\pi H$ , от  $\chi$  показана на Рис. 3.7.3.

Как следует из приведённого анализа а также видно на Рис. 3.7.2, при  $L \leq L_M$  имеется два решения уравнения (3.7.45) при любом  $z \in [-L/2, L/2]$ . Эти решения определяют две непрерывные функции на интервале  $[-L/2, L/2]$ ,  $\kappa_1(z)$  и  $\kappa_2(z)$ . Они удовлетворяют неравенствам  $\kappa_1(z) \leq \sqrt{\chi}$  и  $\kappa_2(z) \geq \sqrt{\chi}$ . В солнечной атмосфере  $g \approx 274 \text{ м/с}^2$ . Как уже упоминалось ранее, скорости наблюдаемых квази-стационарных течений в корональных петлях обычно не превышают 100 км/с, так что можно положить  $U_f \lesssim 100 \text{ км/с}$ . После этого, принимая  $H \sim 60 \text{ Мм}$ , получим  $\chi \lesssim 0.61 < 1$ . Поскольку  $\kappa(-L/2) = 1$ , этот результат означает что необ-

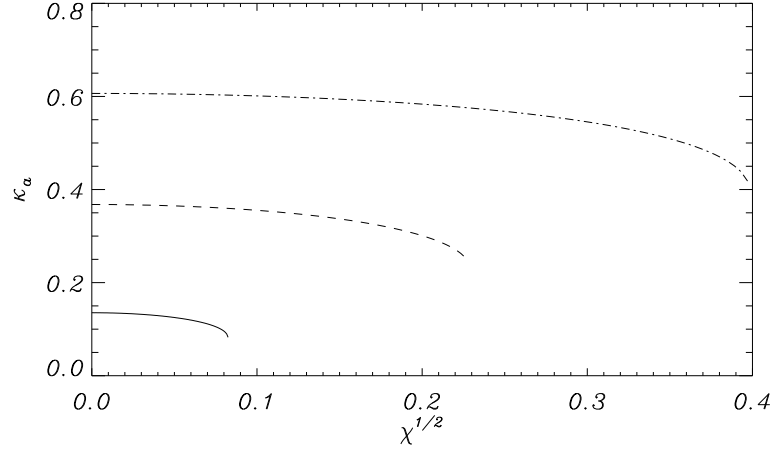


Рис. 3.7.4. Зависимость  $\kappa_a$  от  $\chi$ . Штрих-пунктирная, штриховая и сплошная кривые соответствуют  $L/\pi H = 0.5, 1$  и  $2$ . Каждая кривая показывает зависимость  $\kappa_a$  от  $\chi$  при  $0 \leq \chi \leq \chi_M$ .

ходимо выбрать  $\kappa_2(z)$ . В дальнейшем опускаем индекс ‘2’.

Если зафиксировать  $L/\pi H$ , то из предыдущего анализа следует что, в предположении  $\chi < 1$ , имеется максимальное значение параметра  $\chi$ ,  $\chi_M(L/\pi H)$ , такое что невозмущённое состояние существует только при  $\chi \leq \chi_M$ . Зависимость  $\chi_M$  от  $L/\pi H$  может быть найдена с помощью Рис. 3.7.3. Для нахождения  $\chi_M$  соответствующего данному значению  $L/\pi H$  необходимо определить точку на графике показанном на Рис. 3.7.3 с ординатой равной  $L/\pi H$ . Абсцисса этой точки определяет  $\chi_M$ . В частности,  $\chi_M \approx 0.16, 0.052$  и  $0.0068$  при  $L/\pi H = 0.5, 1$  и  $2$ . При  $H = 60$  Мм эти величины соответствуют  $U_f \approx 51$  км/с,  $29$  км/с и  $10.5$  км/с.

Можно рассматривать  $\kappa$  как функцию двух переменных: расстояния вдоль петли  $z$  и параметра  $\chi$ . Тогда, дифференцируя уравнение (3.7.45) по  $\chi$  получим

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \chi} = \frac{\kappa(1 - \kappa^2)}{2(\chi - \kappa^2)}. \quad (3.7.48)$$

При  $\sqrt{\chi} < \kappa \leq 1$  из этого уравнения следует что, при любом фиксированном  $z$ ,  $\kappa$  является монотонно убывающей функцией  $\chi$ , т.е. плотность в петле уменьшается когда  $U_f$  увеличивается. В частности, плотность в вершине петли,  $\rho_f \kappa_a$ , является уменьшающейся функцией  $\chi$ . На Рис. 3.7.4 показана зависимость  $\kappa_a$  от  $\sqrt{\chi}$  при  $L/\pi H = 0.5, 1$  и  $2$ . Нетрудно видеть что присутствие течения практически не влияет на  $\kappa_a$  если скорость течения не очень близка к максимальному значению. Фактически это верно не только для вершины, но и для всей петли.

В заключении укажем на одно интересное свойство модели представ-

ленной в настоящем разделе. Оказывается что в том случае когда  $U_f$  принимает максимально возможное значение,  $U_{fM}$ , скорость в вершине петли не зависит от длины петли  $L$ . Докажем это свойство. В соответствии с уравнением (3.7.45), при  $\chi = \chi_M$  имеем соотношение

$$\chi_M \left( \frac{1}{\kappa_a^2} - 1 \right) + 2 \ln \kappa_a = -\frac{2L}{\pi H}. \quad (3.7.49)$$

С другой стороны  $\chi_M$  связано с длиной петли уравнением

$$\chi_M - 1 + \ln \chi_M = \frac{2L}{\pi H}. \quad (3.7.50)$$

Подставляя уравнение (3.7.49) в уравнение (3.7.50) получим

$$\frac{\chi_M}{\kappa_a^2} + \ln \frac{\chi_M}{\kappa_a^2} = 1. \quad (3.7.51)$$

Из этого уравнения следует что  $\chi_M/\kappa_a^2 = 1$ . Данное равенство может быть переписано в виде  $U_{fM}^2 \rho_f^2 = \rho_{ia}^2 gH$ , где  $\rho_{ia}$  – плотность внутри трубки в её вершине. Теперь, используя уравнение (3.7.42), получим для скорости в вершине петли  $U_a = \sqrt{gH}$ . При  $H = 60$  Мм имеем  $U_a \approx 128$  км/с.

### 3.7.5b. Влияние течения на частоты собственных мод

Исследуем теперь влияние течения на частоты собственных мод изгибных колебаний используя модель магнитной трубки с сифонным течением. Для определения частот собственных мод уравнение (3.7.37) с граничными условиями (3.7.38) было решено численно. Безразмерная частота  $\Omega = \omega/\omega_f$  зависит от безразмерных параметров  $\chi$ ,  $L/\pi H$  и  $gH/C_f^2$ , где  $\omega_f = \pi C_f/L$  – частота фундаментальной моды однородной трубки в отсутствии течения. Если положить  $H = 60$  Мм, то, для реалистических значений  $C_f$ , т.е. при  $C_f \gtrsim 600$  км/с, получим  $gH/C_f^2 \lesssim 0.05$ . На Рис. 3.7.5 показана зависимость  $\Omega = \omega/\omega_f$  от  $\chi$  для фундаментальной моды при различных значениях  $L/\pi H$  и  $gH/C_f^2$ .

Также была рассчитана зависимость отношения частот первого обертона и фундаментальной моды,  $\mathcal{R}$ , от  $\chi$  при различных значениях параметров  $L/\pi H$  и  $gH/C_f^2$ . Эта зависимость показана на Рис. 3.7.6. Как видим, и частота фундаментальной моды и отношение частот первого обертона и фундаментальной моды практически не зависят от параметра  $gH/C_f^2$ . Это ожидаемый результат поскольку параметр  $gH/C_f^2$  порядка плазменного  $\beta$ ,

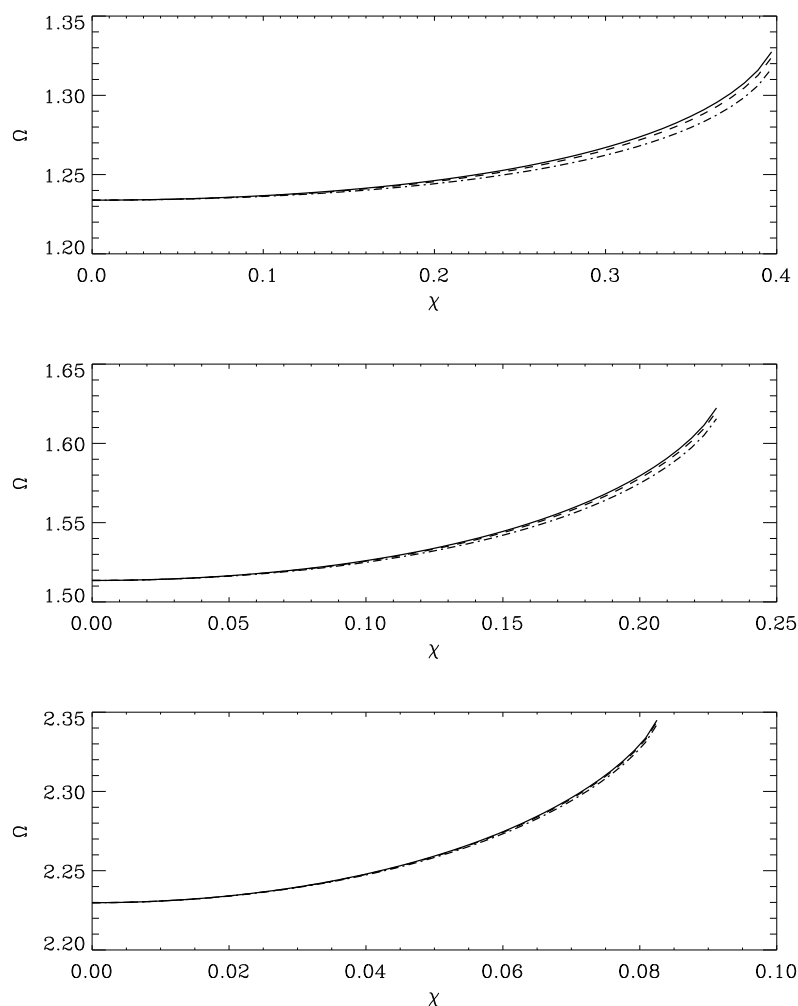


Рис. 3.7.5. Зависимость частоты фундаментальной моды  $\Omega$  от  $\chi$  при  $\chi \in [0, \chi_M]$ . Верхняя, средняя и нижняя части рисунка соответствуют  $L/\pi H = 0.5, 1$  и  $2$ . Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые соответствуют  $gH/C_f^2 = 0.02, 0.03$  и  $0.05$ . При  $H = 60$  Мм эти значения  $gH/C_f^2$  соответствуют  $C_f \approx 905, 739$  и  $572$  км/с.

а этот последний параметр принимает очень маленькие значения в короне. Кроме того, как частота фундаментальной моды так и отношение частот достаточно слабо зависят от параметра  $\chi$  характеризующего интенсивность сифонного течения. Тем не менее на Рис. 3.7.5 видно что частота фундаментальной моды является возрастающей функцией  $\chi$ . В разделе 3.7.3 было показано что наличие течения уменьшает частоту изгибных колебаний и было дано простое физическое объяснение этому эффекту. Означает ли это что результат полученный в настоящем разделе противоречит результату полученному в разделе 3.7.3? На самом деле противоречия нет. Наличие течения продолжает увеличивать время необходимое для того чтобы сигнал пробежал от одного конца петли до другого и назад, что, в свою очередь, приводит к уменьшению частоты. Однако, как можно видеть на Рис. 3.7.4,



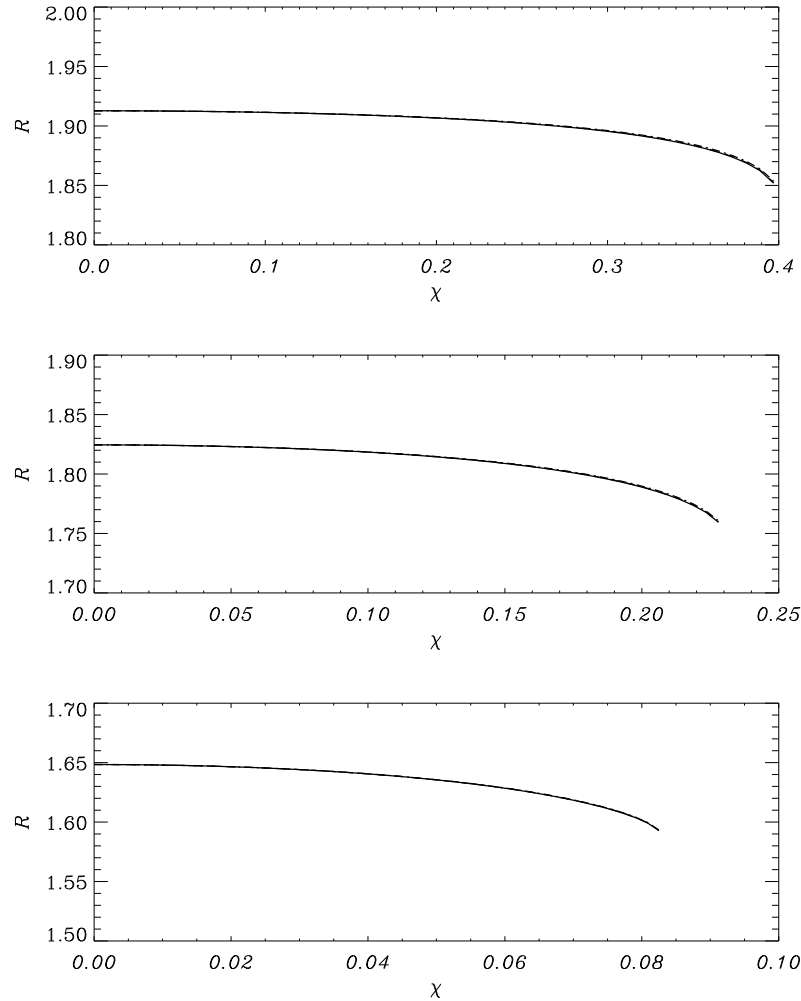


Рис. 3.7.6. Зависимость отношения частот первого обертона и фундаментальной моды,  $\mathcal{R}$ , от  $\chi$  при  $\chi \in [0, \chi_M]$ . Верхняя, средняя и нижняя части рисунка соответствуют  $L/\pi H = 0.5, 1$  and  $2$ . Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые соответствуют  $gH/C_f^2 = 0.02, 0.03$  and  $0.05$ , однако эти кривые практически не различимы.

в то же самое время наличие течения приводит к уменьшению плотности плазмы в магнитной трубке что, в свою очередь, ведёт к увеличению  $C_k$  и, как следствие, к увеличению частоты. Рисунок 3.7.5 показывает что второй эффект доминирует над первым.

Тот результат что сифонное течение слабо влияет на частоту фундаментальной моды и на отношение частот первого обертона к частоте фундаментальной моды следует рассматривать как положительный результат с точки зрения корональной сейсмологии.

В первых работах по корональной сейсмологии использовались очень простые модели корональных петель. Nakariakov and Ofman (2001) использовали модель прямой однородной магнитной трубки. Andries et al. (2005a) предполагали что петля имеет форму полукруга и круговое сечение с по-

стоянным радиусом, а плазма была изотермической с одинаковыми температурами внутри и вне магнитной трубки. Возникает вопрос как сильно изменятся результаты корональной сейсмологии если использовать более сложные модели корональных петель? Как было показано в главе 3.2, учёт расширения трубки может сильно повлиять на оценку шкалы высот (см. также Verth et al. 2008). С другой стороны, Dymova and Ruderman (2006b) и Morton and Erdélyi (2009) нашли что форма петли оказывает довольно слабое влияние на эту оценку. Наконец, в главе 3.4 показано что скрученностью магнитной петли можно пренебречь при получении оценки для шкалы высот в короне. Теперь список эффектов которыми можно пренебречь можно расширить и добавить в него сифонные течения в корональных петлях.

### 3.7.6. Выводы

В этой главе исследованы изгибные колебания корональной магнитной петли в присутствии течения. Была использована простейшая модель сифонного течения в магнитной трубке “создаваемого” граничным условием у одного из оснований петли. Численно исследовано влияние течения на частоту фундаментальной моды и на отношение частот первого обертона и фундаментальной моды.

Основные результаты настоящей главы можно суммировать как следующее. Для наблюдаемых скоростей сифонных течений проведённый анализ показывает что влияние течения на частоту фундаментальной моды и на отношение частот первого обертона и фундаментальной моды мало. Важный вывод который можно сделать из полученных результатов состоит в том что можно не учитывать влияние сифонного течения на оценку шкалы высот в короне полученную на основе одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона. Однако, необходимо подчеркнуть что эти результаты получены в предположении что невозмущённое состояние является стационарным, так что ни плотность плазмы ни её скорость не меняются со временем. Как увидим ниже, результат будет другим в случае нестационарного равновесия.

### 3.8. Резонансное затухание изгибных колебаний в магнитных трубках с аксиально однородной плотностью

В этой главе рассматривается затухание стоячих изгибных волн в прямой магнитной трубке в предположении что плотность плазмы изменяется только в радиальном направлении. Качественно процесс резонансного затухания уже описан в главе 2.4. Было также получено выражение для пространственного декремента распространяющейся изгибной волны. Используя это выражение нетрудно получить выражение для временного декремента резонансного затухания стоячей изгибной волны, так что нет необходимости повторять анализ главы 2.4 для вывода выражения для временного декремента стоячей изгибной волны. В настоящей главе будет сделано нечто большее: будет решена начальная задача описывающая эволюцию произвольного изгибного возмущения тонкой магнитной трубки. Результаты анализа представленного в этой главе опубликованы в работе Ruderman and Roberts (2002) (см. также обзорную статью Goossens et al. 2011).

#### 3.8.1. Постановка задачи

Рассматриваются колебания магнитной трубки в приближении холодной плазмы. В плазме с параметрами типичными для солнечной короны коэффициент сдвиговой вязкости в классическом выражении для тензора вязкости полученном Брагинским (1963) по крайней мере на десять порядков величины меньше чем коэффициент объёмной вязкости. Однако даже коэффициент объёмной вязкости весьма мал, так что вязкостью можно пренебречь везде кроме тонкого резонансного или диссипативного слоя в окрестности идеальной резонансной позиции. Как уже было упомянуто в главе 2.4, с помощью численного исследования в работах Ofman, Davila and Steinolfson (1994) и Erdélyi and Goossens (1994, 1995) показано что в альвеновском диссипативном слое “работает” только сдвиговая вязкость, а всеми остальными членами в выражении Брагинского для тензора вязкости можно пренебречь. В соответствии с этим слагаемое для вязкой силы в уравнении движения можно записать в упрощённой форме  $\rho\nu_v\nabla^2\mathbf{v}$ , где, как и прежде,  $\mathbf{v}$  — скорость плазмы,  $\rho$  — невозмущённая плотность и  $\nu_v$  — кинематический коэффициент вязкости (см. уравнении (1.2.3)).

Невозмущённое состояние имеет следующий вид. Внутри магнитной

трубки плотность плазмы равна  $\rho_i$ , а вне  $\rho_e$ . Между этими двумя областями расположен тонкий слой определяемый неравенством  $R - \ell < r < R$  с  $\ell \ll R$  в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  с осью  $z$  совпадающих с осью трубки. В этом переходном слое плотность плазмы меняется монотонно от  $\rho_i$  до  $\rho_e$ , причём  $\rho_i > \rho_e$ . Невозмущённое магнитное поле,  $\mathbf{B}_0$ , имеет постоянную величину и везде направлено вдоль оси  $z$ ,  $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор оси  $z$ . Это невозмущённое состояние изображено на Рис. 3.7.1. Неоднородность плотности в переходном слое приводит к неоднородности альвеновской скорости. Именно внутри этого слоя находится резонансная поверхность в окрестности которой происходит взаимодействие глобальной изгибной волны с локальными альвеновскими колебаниями. Вязкость необходимо учитывать только в тонком диссипативном слое охватывающем резонансную поверхность.

В диссипативном слое большие градиенты возникают только в радиальном направлении. Поэтому можно использовать приближение  $\nu_v \nabla^2 \mathbf{v} \approx \nu_v \partial^2 \mathbf{v} / \partial r^2$ . Для описания движения вязкой холодной плазмы используются только уравнения (1.2.10), (1.2.12) и (1.2.13) системы линеаризованных МГД уравнений (1.2.9)-(1.2.13). В компонентах они записываются в виде

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \nu_v \frac{\partial^3 \xi_r}{\partial t \partial r^2}, \quad (3.8.1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \nu_v \frac{\partial^3 \xi_\varphi}{\partial t \partial r^2}, \quad (3.8.2)$$

$$b_r = B_0 \frac{\partial \xi_r}{\partial z}, \quad b_\varphi = B_0 \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (3.8.3)$$

$$P = -\frac{\rho_0 V_A^2}{r} \left[ \frac{\partial(r \xi_r)}{\partial r} + \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \quad (3.8.4)$$

Напомним что смещение плазмы  $\boldsymbol{\xi}$  и скорость  $\mathbf{v}$  связаны уравнением (1.2.8). Здесь, как и прежде,  $P = B_0 b_z / \mu_0$  — возмущение магнитного давления.

Предполагается что магнитное поле заморожено в плотную фотосферную плазму при  $z = 0$  и  $z = L$ . В соответствии с этим ставится граничное условие

$$\xi_r = \xi_\varphi = 0 \quad z = 0, L. \quad (3.8.5)$$

Из уравнений (3.8.4) и (3.8.5) следует что  $P = 0$  при  $z = 0, L$ .

В соответствии с наблюдательными данными изгибные колебания корональных петель в основном вызываются распространяющимися в короне

возмущениями, которые прежде всего приводят к смещению верхней части петли вблизи апекса. Если амплитуда первоначального смещения петли монотонно убывает с расстоянием от вершины петли, то такое возмущение наиболее эффективно возбуждает фундаментальную моду изгибных колебаний. Этот вывод позволяет ограничиться рассмотрением только фундаментальной моды. Однако анализ остаётся справедливым и для обертонов если считать что  $L$  — не длина петли а расстояние между двумя последовательными узлами в стоячей волне.

В изгибной волне возмущения всех величин пропорциональны  $e^{i\varphi}$  (с коэффициентами пропорциональности действительными для  $\xi_r$ ,  $b_r$  и  $P$ , и чисто мнимыми для  $\xi_\varphi$  и  $b_\varphi$ ). Кроме того, в соответствии с граничными условиями (3.2.5) и  $P = 0$  при  $z = 0, L$ , в фундаментальной моде  $\xi_r$ ,  $\xi_\varphi$  и  $P$  пропорциональны  $\sin(\pi z/L)$ .

Исключая  $b_r$  и  $b_\varphi$  из уравнений (3.8.1)-(3.8.3) получим

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \omega_A^2 \xi_r - \nu_v \frac{\partial^3 \xi_r}{\partial t \partial r^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (3.8.6)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} + \omega_A^2 \xi_\varphi - \nu_v \frac{\partial^3 \xi_\varphi}{\partial t \partial r^2} = -\frac{iP}{r\rho}, \quad (3.8.7)$$

где альвеновская частота определяется выражением  $\omega_A = \pi V_A/L$ .

Умножим уравнение (3.8.1) на  $r\rho$  и продифференцируем по  $r$ . Затем умножим уравнение (3.8.2) на  $\rho$  и продифференцируем результат по  $\varphi$ . Складывая полученные уравнения находим

$$\begin{aligned} r \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + i\xi_\varphi \right] &= \frac{P}{r} - \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} \\ + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial(rb_r)}{\partial r} + ib_\varphi \right] - \nu_v \rho_0 \frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2} \left[ \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} + i\xi_\varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

Наконец, используем уравнение (3.2.4) для того чтобы исключить  $\xi_\varphi$  и уравнение  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$  для исключения  $b_r$  и  $b_\varphi$ . В результате получаем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{V_A^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} + \left( \omega_A^2 + \frac{V_A^2}{r^2} \right) P = V_A^2 \frac{d\rho}{dr} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}. \quad (3.8.9)$$

Используя уравнение (3.8.4) для того чтобы выразить  $\xi_\varphi$  через  $\xi_r$  и  $P$  и подставляя результат в уравнение (3.8.7) находим

$$\frac{\partial^3(r\xi_r)}{\partial t^2 \partial r} + \omega_A^2 \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} - \nu_v \frac{\partial^4(r\xi_r)}{\partial t \partial r^3} = -\frac{r}{\rho V_A^2} \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \left( \omega_A^2 + \frac{V_A^2}{r^2} \right) P \right]. \quad (3.8.10)$$

Заметим что при выводе уравнений (3.8.9) и (3.8.10) были отброшены члены пропорциональные  $\nu_v \partial^2 P / \partial r^2$ . Это можно сделать потому что вязкость важна только когда имеются большие градиенты возмущений. Однако, в отличие от  $\xi_r$  и  $\xi_\varphi$ ,  $P$  почти постоянно в диссипативном слое (см. главу 2.4) и, таким образом, большие градиенты  $P$  отсутствуют.

Уравнения (3.8.6), (3.8.7), (3.8.9) и (3.8.10) будут использованы в дальнейшем для изучения затухающих колебаний возмущённой магнитной трубки. Заметим что эти уравнения не независимы поскольку имеется четыре уравнения для трёх переменных. Однако оказывается что уравнение (3.8.6) удобно использовать в областях  $r > R$  и  $r < R - \ell$ , в то время как уравнение (3.8.10) удобно использовать в области  $R - \ell < r < R$ .

Для того чтобы завершить постановку задачи необходимо ещё задать начальные условия при  $t = 0$ . Система уравнений (3.8.1)-(3.8.4) является системой четвёртого порядка по времени. Нетрудно видеть что она может быть сведена к двум уравнениям второго порядка по времени для переменных  $\xi_r$  и  $\xi_\varphi$ . Поэтому естественно задать  $\xi_r$  и  $\xi_\varphi$  и их первые производные по времени при  $t = 0$ :

$$\xi_r = \xi_{r0}(r), \quad \frac{\partial \xi_r}{\partial t} = \xi_{r1}(r), \quad \xi_\varphi = \xi_{\varphi0}(r), \quad \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial t} = \xi_{\varphi1}(r) \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3.8.11)$$

В дальнейшем удобно также ввести обозначение для  $P$  при  $t = 0$ . Из уравнений (3.8.4) и (3.8.11) следует что

$$P = P_0(r) \equiv -\frac{\rho_0 V_A^2}{r} \left[ \frac{\partial(r\xi_{r0})}{\partial r} + i\xi_{\varphi0} \right] \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3.8.12)$$

Для решения уравнения (3.8.9) необходимо также задать  $\partial P / \partial t$  при  $t = 0$ . Снова используя уравнения (3.8.4) и (3.8.11) получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P_1(r) \equiv -\frac{\rho_0 V_A^2}{r} \left[ \frac{\partial(r\xi_{r1})}{\partial r} + i\xi_{\varphi1} \right] \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3.8.13)$$

Предполагается что все возмущения, как в начальный так и в произвольный момент времени стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Заметим что величины  $\xi_{r0}$ ,  $\xi_{r1}$ ,  $P_0$ , и  $P_1$  являются действительными, а величины  $\xi_{\varphi0}$  и  $\xi_{\varphi1}$  — чисто мнимыми.

### 3.8.2. Решение для возмущения магнитного давления

Для того чтобы получить решение описывающее эволюцию магнитного давления сначала необходимо вывести уравнение для этой величины.

Это будет сделано в несколько шагов. Вначале получим решение во внешней ( $r > R$ ) и внутренней ( $r < R - \ell$ ) областях, а затем в переходной области ( $R - \ell < r < R$ ). Последним шагом будет сшивка этих решений на границах областей.

### 3.8.2a. Решение во внешней области

Поскольку плотность плазмы во внешней области ( $r > R$ ) постоянна, возмущение магнитного давления в этой области описывается уравнением (3.8.9) с нулевой правой частью. Единственная величина которая используется в дальнейшем это  $\partial P / \partial r$  при  $r = R$ . Введём преобразование Лапласа по времени

$$\mathcal{L}[f(t)](\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt. \quad (3.8.14)$$

Применяя это преобразование к уравнению (3.8.9) с  $dp/dr = 0$  и делая подстановку переменной

$$Q_e = \mathcal{L}[P] - \mathcal{L}[A_e] \frac{K_1(\pi r/L)}{K_1(\pi R/L)}, \quad (3.8.15)$$

где  $A_e(t) = P(t, R)$  и  $K_1$  — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) первого порядка, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial Q_e}{\partial r} - \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{\pi^2}{L^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Ae}^2} \right) \right\} Q_e \\ = - \frac{P_1 - i\omega P_0}{V_{Ae}^2} - \frac{\omega^2 K_1(\pi r/L)}{V_{Ae}^2 K_1(\pi R/L)} \mathcal{L}[A_e]. \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

Функция  $Q_e(r; \omega)$  удовлетворяет граничным условиям

$$Q_e(R; \omega) = 0, \quad Q_e(r; \omega) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.8.17)$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения (3.8.16) равны  $I_1(r\Lambda_e)$  и  $K_1(r\Lambda_e)$ , где  $I_1$  — модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка и  $\Lambda_e = V_{Ae}^{-1}(\omega_{Ae}^2 - \omega^2)^{1/2}$ . Функция  $\Lambda_e(\omega)$  имеет две точки ветвления,  $\omega = \pm\omega_{Ae}$ , и эти точки также являются точками ветвления для  $I_1(r\Lambda_e)$  и  $K_1(r\Lambda_e)$ . Для того чтобы получить однозначные ветви этих функций сделаем разрезы комплексной плоскости  $\omega$  которые начинаются от точек  $-\omega_{Ae}$  и  $\omega_{Ae}$  и идут вдоль действительной оси, соответственно, до  $-\infty$  и  $\infty$  (см. Рис. 3.8.1). Функция  $\Lambda_e(\omega)$  имеет две однозначные ветви.

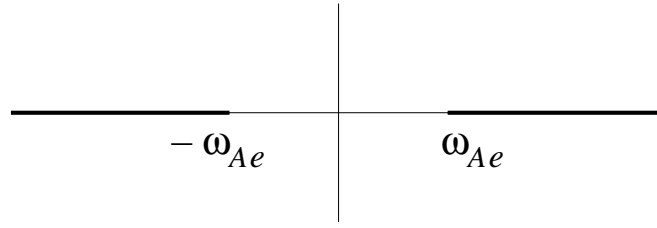


Рис. 3.8.1. Комплексная плоскость  $\omega$  с двумя разрезами.

Одна из этих ветвей отображает комплексную плоскость с двумя разрезами на правую часть комплексной плоскости, а другая - на левую. Выберем первую из двух ветвей, так что  $\Re(\Lambda_e(\omega)) > 0$ , где  $\Re$  обозначает действительную часть величины. Точка  $z = 0$  является логарифмической точкой ветвления функции  $K_1(z)$ . Выберем ветвь функции  $K_1(z)$  которая принимает действительные значения при  $z > 0$ . После этого из асимптотических формул (Abramowitz and Stegun 1964)

$$I_1(z) \sim \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}}, \quad K_1(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \quad (3.8.18)$$

справедливых при  $|\arg z| < \pi/2$  и  $|z| \rightarrow \infty$ , следует что  $I_1(r\Lambda_e) \rightarrow \infty$  и  $K_1(r\Lambda_e) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  для любого значения  $\omega$  которое не принадлежит одному из разрезов.

Функция Грина уравнения (3.8.16),  $G_e(r, s; \omega)$ , должна удовлетворять однородному уравнению (3.8.16) по  $r$  и по  $s$  при  $r \neq s$ , граничным условиям (3.8.17) и быть непрерывной при  $r = s$ , а её производная по  $r$  должна иметь скачок при  $r = s$  определяемый условием

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \frac{\partial G_e}{\partial r} \Big|_{r=s+\varepsilon} - \frac{\partial G_e}{\partial r} \Big|_{r=s-\varepsilon} \right\} = 1. \quad (3.8.19)$$

Используя тождество (Abramowitz and Stegun 1964)

$$I_1'(z)K_1(z) - I_1(z)K_1'(z) = \frac{1}{z}, \quad (3.8.20)$$

где штрих обозначает производную, нетрудно показать что  $G_e(r, s; \omega)$  задаётся выражением

$$\begin{aligned} G_e(r, s; \omega) &= \frac{s}{K_1(R\Lambda_e)} \{ H(s-r)K_1(s\Lambda_e) [K_1(r\Lambda_e)I_1(R\Lambda_e) \\ &- I_1(r\Lambda_e)K_1(R\Lambda_e)] + H(r-s)K_1(r\Lambda_e) \\ &\times [K_1(s\Lambda_e)I_1(R\Lambda_e) - I_1(s\Lambda_e)K_1(R\Lambda_e)] \}, \end{aligned} \quad (3.8.21)$$



где  $H(x)$  – функция Хевисайда,  $H(x) = 1$  при  $x > 0$  и  $H(x) = 0$  при  $x < 0$ . После этого решение уравнения (3.8.16) удовлетворяющее граничным условиям (3.8.17) даётся выражением

$$Q_e(r; \omega) = \int_a^\infty G_e(r, s; \omega) \left\{ \frac{i\omega P_0(s) - P_1(s)}{V_{Ae}^2} - \frac{\omega^2 K_1(\pi s/L)}{V_{Ae}^2 K_1(\pi R/L)} \mathcal{L}[A_e] \right\} ds. \quad (3.8.22)$$

Из уравнений (3.8.15) и (3.8.20)-(3.8.22) следует что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}[P]}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \int_a^\infty \frac{s K_1(s \Lambda_e)}{R K_1(R \Lambda_e)} \left\{ \frac{P_1(s) - i\omega P_0(s)}{V_{Ae}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2 K_1(\pi s/L)}{V_{Ae}^2 K_1(\pi R/L)} \mathcal{L}[A_e] \right\} ds + \frac{\pi K_1'(\pi R/L)}{L K_1(\pi R/L)} \mathcal{L}[A_e]. \end{aligned} \quad (3.8.23)$$

Используя модифицированное уравнение Бесселя нетрудно получить соотношение

$$\begin{aligned} \int_R^\infty K_1(\pi s/L) K_1(s \Lambda_e) s ds &= \frac{R V_{Ae}^2}{\omega^2} \left\{ \Lambda_e K_1(\pi R/L) K_1'(R \Lambda_e) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{L} K_1(R \Lambda_e) K_1'(\pi R/L) \right\}, \end{aligned} \quad (3.8.24)$$

с помощью которого перепишем уравнение (3.8.23) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}[P]}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{1}{V_{Ae}^2} \int_R^\infty \frac{s K_1(s \Lambda_e)}{R K_1(R \Lambda_e)} \{P_1(s) - i\omega P_0(s)\} ds \\ &\quad + \frac{\Lambda_e K_1'(R \Lambda_e)}{K_1(R \Lambda_e)} \mathcal{L}[A_e]. \end{aligned} \quad (3.8.25)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3.8.6) и пренебрегая вязкостью во внешней области получим

$$\mathcal{L}[\xi_{re}] = \frac{1}{\omega^2 - \omega_{Ae}^2} \left\{ \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \mathcal{L}[P]}{\partial r} \Big|_{r=R} - \xi_{r1}(R) + i\omega \xi_{r0}(R) \right\}, \quad (3.8.26)$$

где  $\xi_{re} = \xi_r(t, R)$ .

### 3.8.2b. Решение во внутренней области

Возмущение магнитного давления во внутренней области ( $r < R - \ell = b$ ) описывается уравнением (3.8.9) с нулевой правой частью. Для дальнейшего необходимо найти  $\partial \mathcal{L}[P]/\partial r$  при  $r = b$ . Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3.8.9) и делая замену переменной

$$Q_i = \mathcal{L}[P] - \mathcal{L}[A_i] \frac{I_1(\pi r/L)}{I_1(\pi b/L)}, \quad (3.8.27)$$

где  $A_i(t) = P(t, b)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial Q_i}{\partial r} - \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{\pi^2}{L^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{Ai}^2} \right) \right\} Q_i \\ = - \frac{P_1 - i\omega P_0}{V_{Ai}^2} - \frac{\omega^2 I_1(\pi r/L)}{V_{Ai}^2 I_1(\pi b/L)} \mathcal{L}[A_i]. \end{aligned} \quad (3.8.28)$$

Переменная  $Q_i(r; \omega)$  удовлетворяет условиям

$$Q_i(b; \omega) = 0, \quad (3.8.29)$$

и кроме того, она должна быть регулярной при  $r = 0$ . Принимая во внимание что  $I_1(z)$  регулярна при  $r = 0$ , а  $K_1(z)$  — сингулярна, находим что функция Грина уравнения (3.8.28) даётся выражением

$$\begin{aligned} G_i(r, s; \omega) = \frac{s}{I_1(b\Lambda_i)} \left\{ H(s-r) I_1(r\Lambda_i) [I_1(s\Lambda_i) K_1(b\Lambda_i) - K_1(s\Lambda_i) I_1(b\Lambda_i)] \right. \\ \left. + H(r-s) I_1(s\Lambda_i) [I_1(r\Lambda_i) K_1(b\Lambda_i) - K_1(r\Lambda_i) I_1(b\Lambda_i)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.8.30)$$

где  $\Lambda_i = V_{Ai}^{-1}(\omega_{Ai}^2 - \omega^2)^{1/2}$ . Аналогично функции  $\Lambda_e(\omega)$ , функция  $\Lambda_i(\omega)$  имеет две точки ветвления,  $\omega = \pm \omega_{Ai}$ , и то же самое верно для функций  $I_1(r\zeta_i)$  и  $K_1(r\zeta_i)$ . Для того чтобы получить однозначные ветви этих функций сделаем разрезы на комплексной плоскости  $\omega$  которые начинаются в точках  $-\omega_{Ai}$  и  $\omega_{Ai}$  и идут вдоль действительной оси, соответственно, до  $-\infty$  и  $\infty$  (см. Рис. 3.8.1). Одна из ветвей функции  $\Lambda_i(\omega)$  отображает комплексную плоскость с двумя разрезами на правую часть комплексной плоскости, а другая — на левую. Выберем первую ветвь, так что  $\Re(\zeta_i(\omega)) > 0$ . Опять выбираем ветвь  $K_1(z)$  которая принимает действительные значения при  $z > 0$ .

Решение уравнения (3.8.28) удовлетворяющее условию (3.8.29) и регулярное при  $r = 0$  даётся выражением

$$Q_i(r; \omega) = - \int_0^b G_i(r, s; \omega) \left\{ \frac{P_1(s) - i\omega P_0(s)}{V_{Ai}^2} + \frac{\omega^2 I_1(\pi s/L)}{V_{Ai}^2 I_1(\pi b/L)} \mathcal{L}[A_i] \right\} ds. \quad (3.8.31)$$

Из уравнений (3.8.18), (3.8.27), (3.8.30) и (3.8.31) следует что

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{L}[P]}{\partial r} \right|_{r=b} = - \int_0^b \frac{s I_1(s\Lambda_i)}{b I_1(b\Lambda_i)} \left\{ \frac{P_1(s) - i\omega P_0(s)}{V_{Ai}^2} \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 I_1(\pi s/L)}{V_{Ai}^2 I_1(\pi b/L)} \mathcal{L}[A_i] \right\} ds + \frac{\pi I_1'(\pi b/L)}{L I_1(\pi b/L)} \mathcal{L}[A_i]. \end{aligned} \quad (3.8.32)$$

Используя модифицированное уравнение Бесселя нетрудно вывести соотношение

$$\int_0^b I_1(\pi s/L) I_1(s\Lambda_i) s ds = \frac{bV_{Ai}^2}{\omega^2} \left\{ \frac{\pi}{L} I_1(b\Lambda_i) I_1'(\pi b/L) - \Lambda_i I_1(\pi b/L) I_1'(b\Lambda_i) \right\}. \quad (3.8.33)$$

С помощью этого соотношения перепишем уравнение (3.8.32) в виде

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}[P]}{\partial r} \right|_{r=b} = -\frac{1}{V_{Ai}^2} \int_0^b \frac{s I_1(s\Lambda_i)}{b I_1(b\Lambda_i)} \{P_1(s) - i\omega P_0(s)\} ds + \frac{\Lambda_i I_1'(b\Lambda_i)}{I_1(b\Lambda_i)} \mathcal{L}[A_i]. \quad (3.8.34)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3.8.6) и пренебрегая вязкостью получим

$$\mathcal{L}[\xi_{ri}] = \frac{1}{\omega^2 - \omega_{Ai}^2} \left\{ \frac{1}{\rho_i} \left. \frac{\partial \mathcal{L}[P]}{\partial r} \right|_{r=b} - \xi_{r1}(b) + i\omega \xi_{r0}(b) \right\}, \quad (3.8.35)$$

где  $\xi_{ri} = \xi_r(t, b)$ .

### 3.2.2с. Решение в кольцевой области

В дальнейшем предполагаем что характерный масштаб изменения возмущений в начальный момент равен  $R$ . Это означает что можно положить  $\xi_{r0}(b) \approx \xi_{r0}(R)$ ,  $\xi_{r1}(b) \approx \xi_{r1}(R)$ , и так далее. Из уравнения (3.8.6) следует что  $\xi_r \sim P(\rho\ell\omega_A^2)^{-1}$ . После этого нетрудно получить из уравнения (3.8.9) что  $\partial^2 P/\partial r^2 \sim P(R\ell)^{-1}$ , так что  $P(t, r) = A(t) + \mathcal{O}(\ell/R)$ . Таким образом, можно пренебречь изменением  $P$  в кольцевой области. В частности,  $A_e(t) \approx A_i(t) \approx A(t)$ . Это приближение существенно упрощает анализ. Оно было впервые использовано в работе Hollweg (1987), а затем в работе Hollweg and Yang (1988) при исследовании резонансного затухания поверхностных МГД волн распространяющихся по тонкому переходному слою. Оно было также использовано в работе Ruderman and Wright (2000) при изучении нестационарных вынужденных колебаний в магнитном резонаторе.

Поскольку  $P$  определяется значениями на границах кольцевой области, уравнение (3.8.10) можно рассматривать как уравнение с заданной правой частью. Оно определяет  $\partial(r\xi_r)/\partial r$  при  $b < r < R$ . Вводя обозначение  $w = \partial(r\xi_r)/\partial r$  перепишем уравнение (3.8.10) в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega_A^2 w - \nu_v \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial r^2} = \frac{2}{\pi} g(t, r), \quad (3.8.36)$$

где

$$g(t, r) = -\frac{\pi r}{2\rho V_A^2} \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \left( \omega_A^2 + \frac{V_A^2}{r^2} \right) P \right]. \quad (3.8.37)$$

Уравнение (3.8.36) совпадает с выражением (13) в работе Ruderman (1999) если положить  $n = 1$  и  $\eta = 0$  в последнем. Поэтому в дальнейшем следуем этой работе. На решение наложим начальные условия

$$w = w_0(r) \equiv \frac{d(r\xi_{r0})}{dr}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1(r) \equiv \frac{d(r\xi_{r1})}{dr}, \quad \text{при } t = 0. \quad (3.8.38)$$

Поскольку предполагается что  $\xi_{r0}(r)$  и  $\xi_{r1}(r)$  – гладкие функции с характерным масштабом изменения равным  $R$ , то то же самое верно и для  $w_0(r)$  и  $w_1(r)$ . Считаем также что вязкость мала, так что  $Re = RV_A(0)/\nu_v \ll 1$ , где  $Re$  – число Рейнольдса. Для не слишком больших значений  $t$  (смысл слов “не слишком больших” будет уточнён позже) отношение третьего члена в левой части уравнения (3.8.36) ко второму члену порядка  $1/Re \ll 1$ , так что третьим членом можно пренебречь. После этого уравнение (3.8.36) становится обыкновенным дифференциальным уравнением решение которого удовлетворяющее начальным условиям (3.8.38) нетрудно получить:

$$w = A_c(t) \cos(\omega_A t) + A_s(t) \sin(\omega_A t), \quad (3.8.39)$$

где

$$A_c(t) = w_0 - \frac{2}{\pi\omega_A} \int_0^t g(\tau) \sin(\omega_A \tau) d\tau, \quad (3.8.40)$$

$$A_s(t) = \frac{w_1}{\omega_A} + \frac{2}{\pi\omega_A} \int_0^t g(\tau) \cos(\omega_A \tau) d\tau. \quad (3.8.41)$$

Теперь непосредственное вычисление с использованием уравнения (3.8.39) показывает что третий член в левой части уравнения (3.8.36) возрастает как  $t^2$ . Поэтому с течением времени он будет порядка или даже больше остальных членов в уравнении (3.8.36). Подобное поведение третьего члена в левой части уравнения (3.8.36) связано с зависимостью  $\omega_A$  от  $r$ . Из-за этой зависимости соседние магнитные линии колеблются со слегка отличающимися частотами. В результате сдвиг по фазе в колебаниях соседних магнитных линий растёт со временем, что приводит к росту пространственных градиентов в направлении перпендикулярном магнитному полю. Таким образом, решение уравнения (3.8.36) справедливо только для достаточно малых периодов времени.

Получим приближённое решение уравнения (3.8.36) справедливое на больших временах. Вначале получим общее решение однородного уравнения (3.8.36) ( $g = 0$ ). Для этого введём “растянутое время”  $T = \epsilon t$ , где  $\epsilon \ll 1$ . Точное определение  $\epsilon$  будет дано позже. После этого используем ВКБ метод и находим решение однородного уравнения (3.8.36) в виде  $w = \Re\{Q(r, T) \exp[i\epsilon^{-1}\Theta(r, T)]\}$ , где  $\Re$  обозначает действительную часть величины (см. напр. Bender and Orszag 1987). Подставляя это выражение в однородное уравнение (3.8.36) получим

$$Q \left( \frac{\partial \Theta}{\partial T} \right)^2 - \omega_A^2 Q - 2i\epsilon \frac{\partial Q}{\partial T} \frac{\partial \Theta}{\partial T} - i\epsilon^{-2} \nu_v Q \frac{\partial \Theta}{\partial T} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)^2 = O(\epsilon^2) + O(\epsilon^{-1} \nu_v), \quad (3.8.42)$$

где  $O(\epsilon^2)$  и  $O(\epsilon^{-1} \nu_v)$  обозначают члены пропорциональные, соответственно,  $\epsilon^2$  и  $\epsilon^{-1} \nu_v$ . Предположим теперь что третий и четвёртый члены в левой части уравнения (3.8.42) имеют один порядок. Из этого предположения следует что  $\epsilon = Re^{-1/3}$ . В первом приближении, обычно называемом приближением геометрической оптики, получим

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} = \pm \omega_A. \quad (3.8.43)$$

Для простоты полагаем  $\Theta = 0$  при  $T = 0$ . После этого решение уравнения (3.8.42) запишется в виде

$$\Theta = \pm \omega_A T. \quad (3.8.44)$$

Во втором приближении, обычно называемом приближением физической оптики, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial T} = -3\Upsilon T^2, \quad (3.8.45)$$

где  $\Upsilon = \frac{1}{6} a V_{A0} (d\omega_A/dr)^2$  и  $V_{A0} = V_A(0)$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$Q = Q_0(r) \exp(-\Upsilon T^3), \quad (3.8.46)$$

где  $Q_0(r)$  – произвольная функция. Из уравнений (3.8.44) и (3.8.46) следует что решение уравнения (3.8.42) в приближении физической оптики даётся выражением

$$w = \exp(-\Upsilon t^3/Re) [\tilde{A}_c(r) \cos(\omega_A t) + \tilde{A}_s(r) \sin(\omega_A t)], \quad (3.8.47)$$

где  $\tilde{A}_c(r)$  и  $\tilde{A}_s(r)$  – произвольные функции. Это решение справедливо на больших временах.

Найдём теперь функцию Грина. Функция Грина  $G(t, \tau)$  должна быть решением однородного уравнения (3.8.36) по каждой из переменных, удовлетворять условию  $G(t, \tau) = 0$  при  $\tau > t$  и быть непрерывной, а её производная по  $t$  должна удовлетворять условию  $\partial G(t, \tau)/\partial t = 1$  при  $t \rightarrow \tau + 0$ . Нетрудно проверить что функция  $G(t - \tau)$  задаваемая выражением

$$G(t) = H(t) \exp(-\Upsilon t^3/Re) \frac{\sin(\omega_A t)}{\omega_A} \quad (3.8.48)$$

удовлетворяет всем этим условиям. Напомним что  $H(t)$  – функция Хевисайда определяемая условиями  $H(t) = 1$  при  $t > 0$ ,  $H(t) = 0$  при  $t < 0$ . Конволюция функций  $G(t)$  и  $2g(t)/\pi$  определяет частное решение уравнения (3.8.36). Общее решение этого уравнения равно сумме решения определяемого уравнением (3.8.48) и общего решения однородного уравнения. Теперь нетрудно получить что решение уравнения (3.8.36) удовлетворяющее начальным условиям (3.8.38) имеет вид

$$w = \exp(-\Upsilon t^3/Re) \left[ w_0 \cos(\omega_A t) + \frac{w_1}{\omega_A} \sin(\omega_A t) \right] + \frac{2}{\pi} \int_0^t G(t - \tau) g(\tau) d\tau. \quad (3.8.49)$$

Вспоминая определение  $w$ ,  $w_0$ ,  $w_1$  и  $g(\tau)$ , и используя приближения  $P \approx A$  и  $r \approx R$ , перепишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} &= \exp(-\Upsilon t^3/Re) \left[ \frac{d(r\xi_{r0})}{dr} \cos(\omega_A t) + \frac{d(r\xi_{r1})}{dr} \frac{\sin(\omega_A t)}{\omega_A} \right] \\ &- \frac{R}{\rho V_A^2} \int_0^t G(t - \tau) \left[ \frac{d^2 A}{d\tau^2} + \left( \omega_A^2 + \frac{V_A^2}{r^2} \right) A \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.8.50)$$

Заметим что, поскольку предполагается что все невозмущённые величины являются гладкими функциями,  $\Upsilon(a) = \Upsilon(b) = 0$ .

Найдём преобразование Лапласа функции  $\partial(ru)/\partial r$ . Для этого введём неполную  $F$ -функцию

$$\tilde{F}(x, t) = \int_0^t \exp(ixs - s^3/3) ds, \quad (3.8.51)$$

и полную  $F$ -функцию  $F(x) = \tilde{F}(x, \infty)$ . Последняя функция была впервые введена в работе Boris (1968). Позже она была использована для описания

движения в диссипативном слое (Mok and Einaudi 1985, Goossens et al. 1995, Goossens and Ruderman 1995). Нетрудно получить соотношение

$$\mathcal{L}[\exp(\pm i\omega_A t - Lt^3/Re)](\omega) = \delta_\omega^{-1} F((\omega \pm \omega_A)/\delta_\omega), \quad (3.8.52)$$

где  $\delta_\omega = (3\Upsilon/Re)^{1/3}$ . Из уравнения (3.8.4) следует что

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{\rho V_A^2}{r} \left[ \frac{\partial(r\xi_{r1})}{\partial r} + i\xi_{\varphi 1} \right] \equiv P_1(r). \quad (3.8.53)$$

Используя уравнения (3.8.52) и (3.8.53) и теорему о конволюции получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\mathcal{L}[u])}{\partial r} &= \frac{1}{2\delta_\omega} \left\{ \left( \frac{d(ru_0)}{dr} - \frac{i}{\omega_A} \frac{d(ru_1)}{dr} \right) F((\omega + \omega_A)/\delta_\omega) \right. \\ &+ \left. \left( \frac{d(ru_0)}{dr} + \frac{i}{\omega_A} \frac{d(ru_1)}{dr} \right) F((\omega - \omega_A)/\delta_\omega) \right\} \\ &+ ia \frac{F((\omega + \omega_A)/\delta_\omega) - F((\omega - \omega_A)/\delta_\omega)}{2\rho V_A^2 \omega_A \delta_\omega} \\ &\times \left\{ \left( \omega^2 - \omega_A^2 - \frac{V_A^2}{a^2} \right) (i\omega\mathcal{L}[A] + A_0) - A_2 + i\omega A_1 \right\}, \quad (3.8.54) \end{aligned}$$

где  $A_0$ ,  $A_1$  и  $A_2$  — значения, соответственно, величин  $A$ ,  $dA/dt$  и  $d^2A/dt^2$  при  $t = 0$ . В свою очередь, эти величины приближённо равны, соответственно,  $P_0$ ,  $P_1$  и  $P_2$  при  $r = a$ .

### 3.2.2d. Сращивание решений.

Интегрируя уравнение (3.8.54) по  $r$  от  $b$  до  $R$ , получим преобразование Лапласа величины  $Ru_e - bu_i$ . С другой стороны, вычислим эту величину используя уравнения (3.8.26) и (3.8.34). Сравнивая два выражения, учитывая уравнения (3.8.25) и (3.8.33), и подставляя  $A$  вместо  $A_e$  и  $A_i$ , получаем выражение для  $\mathcal{L}[A]$ :

$$\mathcal{L}[A] = \frac{W(\omega; Re)}{D(\omega; Re)}, \quad (3.8.55)$$

где

$$D(\omega; Re) = D_0(\omega) + D_1(\omega; Re), \quad W(\omega; Re) = W_0(\omega) + W_1(\omega; Re), \quad (3.8.56)$$

$$D_0(\omega) = \frac{b\Lambda_i I_1'(b\Lambda_i)}{\rho_i(\omega^2 - \omega_{Ai}^2) I_1(b\Lambda_i)} - \frac{R\Lambda_e K_1'(R\Lambda_e)}{\rho_e(\omega^2 - \omega_{Ae}^2) K_1(R\Lambda_e)}, \quad (3.8.57)$$

$$D_1(\omega; Re) = \frac{iR}{2\rho V_A^2} \int_b^R \left( \omega_A^2 - \omega^2 + \frac{V_A^2}{R^2} \right) \times \frac{F((\omega + \omega_A)/\delta_\omega) - F((\omega - \omega_A)/\delta_\omega)}{\omega_A \delta_\omega} dr \quad (3.8.58)$$

$$W_0(\omega) = \int_0^b \frac{sI_1(s\Lambda_i)}{I_1(b\Lambda_i)} \frac{P_1(s) - i\omega P_0(s)}{\rho V_A^2(\omega^2 - \omega_{Ai}^2)} ds + \int_R^\infty \frac{sK_1(s\Lambda_e)}{K_1(R\Lambda_e)} \frac{P_1(s) - i\omega P_0(s)}{\rho V_A^2(\omega^2 - \omega_{Ae}^2)} ds + \frac{ib}{\omega(\omega^2 - \omega_{Ai}^2)} \left\{ \frac{1}{\rho_i} \frac{dP_0}{dr} \Big|_{r=b} + u_1(b) - i\omega u_0(b) \right\} - \frac{iR}{\omega(\omega^2 - \omega_{Ae}^2)} \left\{ \frac{1}{\rho_e} \frac{dP_0}{dr} \Big|_{r=R} + u_1(R) - i\omega u_0(R) \right\}. \quad (3.8.59)$$

Нетрудно показать, что  $W_1(\omega; Re)/W_0(\omega) \sim \ell/R \ll 1$ . Поэтому можно пренебречь  $W_1(\omega; Re)$  по сравнению с  $W_0(\omega)$ , так что выражение для  $W_1(\omega; Re)$  не приводится.

Выражения для  $D_0(\omega)$  и  $W_0(\omega)$  содержат многозначные функции  $\Lambda_i(\omega)$  и  $\Lambda_e(\omega)$ . Каждая из них имеет две точки ветвления. Точки ветвления первой функции это  $\omega = \pm\omega_{Ai}$ , а второй  $\omega = \pm\omega_{Ae}$ . Выражение для функции  $K_1(z)$  содержит  $\ln z$ , поэтому  $\omega = \pm\omega_{Ae}$  являются также точками ветвления функций  $D_0(\omega)$  и  $W_0(\omega)$ . С другой стороны, разложение функции  $I_1(z)$  в степенной ряд содержит только нечётные степени  $z$ . После этого нетрудно видеть, что разложение функции  $zI_1'(z)/I_1(z)$  по степеням  $z$  содержит только чётные степени  $z$ . Поскольку  $\Lambda_i^2(\omega)$  является однозначной функцией, то  $\omega = \pm\omega_{Ai}$  не являются точками ветвления функций  $D_0(\omega)$  и  $W_0(\omega)$ . Таким образом, заключаем что функции  $D_0(\omega)$  и  $W_0(\omega)$  имеют только две точки ветвления:  $\omega = \pm\omega_{Ae}$ .

Для того чтобы получить однозначные ветви функций  $D_0(\omega)$  и  $W_0(\omega)$  сделаем разрезы в комплексной  $\omega$ -плоскости от  $-\omega_{Ae}$  до  $-\infty$  и от  $\omega_{Ae}$  до  $\infty$  как показано на Рис. 3.8.1. После этого рассматриваем ветви функций  $\Lambda_e(\omega)$  и  $K_1(z)$  определённые в разделе 3.8.2.

### 3.8.3. Слабо затухающие собственные моды

Частоты собственных колебаний магнитной петли определяются уравнением

$$D(\omega; Re) = 0. \quad (3.8.60)$$



Если  $\omega$  – решение уравнения (3.8.60), то зависимость соответствующей собственной функции от  $r$  в области  $r > R$  определяется уравнениями (3.8.15), (3.8.21) и (3.8.22) с  $P_0 = P_1 = 0$  и произвольным  $\mathcal{L}[A_e]$ . Величина  $\omega$  является настоящей собственной частотой поскольку соответствующая собственная функция стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$  и интеграл от её квадрата от 0 до  $\infty$  сходится.

Нетрудно получить оценку  $D_1(\omega; Re)/D_0(\omega) = O(\ell/R)$ . Эта оценка позволяет использовать регулярный метод возмущений и отыскивать решение уравнения (3.8.60) в виде  $\omega = \omega_0 + \omega_1$ , где  $|\omega_1| \ll |\omega_0|$ . В первом приближении получим

$$D_0(\omega_0) = 0. \quad (3.8.61)$$

Радиус поперечного сечения типичной корональной петли много меньше её длины,  $R \ll L$ . Из этой оценки следует, что  $|R\Lambda_e| \ll 1$  и  $|b\Lambda_i| \ll 1$ , так что можно использовать приближённые формулы (см. напр. Abramowitz and Stegun 1964)

$$I_1(z) \approx \frac{z}{2}, \quad I_1'(z) \approx \frac{1}{2}, \quad K_1(z) \approx \frac{1}{z}, \quad K_1'(z) \approx -\frac{1}{z^2} \quad (3.8.62)$$

для того чтобы преобразовать уравнение (3.8.57) к виду

$$D_0(\omega) = \frac{1}{\rho_i(\omega^2 - \omega_{Ai}^2)} + \frac{1}{\rho_e(\omega^2 - \omega_{Ae}^2)}. \quad (3.8.63)$$

После этого приближенное решение уравнения (3.8.61) даётся выражением

$$\omega = \omega_0 = \pm\omega_k \equiv \pm \left( \frac{2\rho\omega_A^2}{\rho_e + \rho_i} \right)^{1/2}. \quad (3.8.64)$$

Здесь величина  $\omega_k$  это частота изгибных колебаний тонкой магнитной трубки (см. напр. Edwin and Roberts 1983).

Во втором приближении получаем

$$\omega_1 = -D_1(\omega_0; Re) \left( \frac{\partial D_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right)^{-1}. \quad (3.8.65)$$

С помощью интегрирования по частям получим приближённую формулу

$$F([\omega_0 \pm \omega_A]/\delta_\omega) \approx \frac{i\delta_\omega}{\omega_0 \pm \omega_A}, \quad (3.8.66)$$

справедливую при  $|\omega_0 \pm \omega_A| \gg \delta_\omega$ . Однако, поскольку  $\omega_{Ae}^2 < \omega_0^2 < \omega_{Ai}^2$ , существует такое значение радиуса  $r = r_A$ , называемого альвеновским резонансным радиусом, где  $\omega_A^2(r_A) = \omega_0^2$ . Если  $\omega_A^2(r)$  является монотонной

функцией, то существует единственный альвеновский резонансный радиус. Введём толщину альвеновского диссипативного слоя  $\delta_A$  определяемую выражением (см. напр. Goossens et al. 1995, Goossens and Ruderman 1995)

$$\delta_A = \frac{2|\omega_0|\delta_\omega(r_A)}{|\Delta|} = \left| \frac{\nu_v \omega_0}{\Delta} \right|^{1/3}, \quad \Delta = - \left. \frac{d\omega_A^2}{dr} \right|_{r=r_A}. \quad (3.8.67)$$

Выберем  $s_A$  так что  $\delta_A \ll s_A \ll \ell$  и запишем интеграл в уравнении (3.8.58) как сумму интегралов по интервалам  $[b, r_A - s_A]$ ,  $[r_A - s_A, r_A + s_A]$  и  $[r_A + s_A, R]$ . После этого используем приближённое выражение (3.8.66) для того чтобы вычислить первый интеграл. Чтобы вычислить второй интеграл используем приближённую формулу

$$|\omega_0| - \omega_A \approx \frac{\Delta(r - r_A)}{2|\omega_0|}, \quad (3.8.68)$$

и пренебрежём нерезонансным членом пропорциональным  $F(\pm(\omega_k + \omega_A)/\delta_\omega)$ . Поскольку  $\omega_A^2 \sim \omega_0^2 \ll V_A^2 R^{-2}$ , можно положить  $\omega_A^2 - \omega_0^2 + V_A^2 R^{-2} \approx V_A^2 R^{-2}$  в подынтегральном выражении в уравнении (3.8.58). Затем, сделав подстановку  $s = \delta_A^{-1}(r - r_A)\text{sgn}(\Delta\omega_0)$  во втором интеграле, получаем выражение

$$D_1(\omega_0; Re) \approx \frac{1}{R} \left( \int_b^{r_A - s_A} + \int_{r_A + s_A}^R \right) \frac{dr}{\rho(\omega_0^2 - \omega_A^2)} - \frac{i\omega_0}{\rho_A R |\omega_0 \Delta|} \int_{-s_A/\delta_A}^{s_A/\delta_A} F(s) ds, \quad (3.8.69)$$

где  $\rho_A = \rho(r = r_A)$ . Поскольку  $s_A \ll R - b = \ell$  и  $s_A \gg \delta_A$ , полагаем  $s_A \rightarrow +0$  и  $s_A/\delta_A \rightarrow \infty$ . Затем, используя формулу  $\int_{-\infty}^{\infty} F(s) ds = \pi$ , получим

$$D_1(\omega_0; Re) \approx \frac{1}{R} \mathcal{P} \int_b^R \frac{dr}{\rho(\omega_0^2 - \omega_A^2)} - \frac{i\pi\omega_0}{\rho_A R |\omega_0 \Delta|}, \quad (3.8.70)$$

где  $\mathcal{P}$  обозначает главную часть Каши интеграла. С помощью уравнений (3.8.63), (3.8.65) and (3.8.70) находим

$$\omega_1 = \omega_{1r} - i\gamma, \quad (3.8.71)$$

где

$$\omega_{1r} = \frac{\rho_A^2 \omega_0^3 (\rho_i - \rho_e)^2}{2R(\rho_i + \rho_e)^3} \mathcal{P} \int_b^R \frac{dr}{\rho(\omega_0^2 - \omega_A^2)}, \quad (3.8.72)$$

$$\gamma = \frac{\pi \rho_A |\omega_0|^3 (\rho_i - \rho_e)^2}{2R |\Delta| (\rho_i + \rho_e)^3}. \quad (3.8.73)$$

Заметим что декремент  $\gamma$  всегда положителен как и должно быть. Нетрудно показать, что  $\omega_{1r}/\omega_0 = O(\ell/R) \ll 1$ , поэтому можно пренебречь  $\omega_{1r}$  по сравнению с  $\omega_0$  в выражении для  $\omega_0 + \omega_1$ . Аналогичная оценка верна для  $\gamma/\omega_0$ , однако величиной  $-i\gamma$  в выражении для  $\omega_0 + \omega_1$  пренебречь нельзя, потому что она описывает затухание колебаний вследствие резонансного поглощения в диссипативном слое окружающем резонансную поверхность  $r = r_A$ .

Следует отметить, что формула (3.8.73) является частным случаем более общего выражения полученного для плазмы с конечным давлением в работе Goossens et al. (1992) (см. уравнение (77) в этой работе). Она также аналогична выражению для декремента поверхностных волн распространяющихся по тонкому переходному слою между двумя полупространствами с постоянными параметрами плазмы и магнитного поля (см. напр. Ionson 1978; Mok and Einaudi 1985; Lee and Roberts 1986; Hollweg 1987; Hollweg and Yang 1988). Тот факт что декремент  $\gamma$  не зависит от  $Re$  при  $Re \gg 1$  не удивителен, аналогичный результат был получен ранее в аналитических исследованиях резонансного затухания. Независимость декремента от  $Re$  была затем подтверждена численным моделированием (напр. Poedts and Kerner 1991; Tirry and Goossens 1996). Время затухания  $\gamma^{-1}$  обычно много меньше чем время диссипации мелкомасштабных возмущений в диссипативном слое. Отметим что характерное время диссипации возмущений за счёт фазового смещения, а также диссипации волновой энергии вынужденных колебаний за счёт резонансного поглощения пропорционально  $Re^{1/3}$  (напр. Heyewards and Priest 1983; Kappraff and Tataronis 1977). Для типичных корональных условий это время очень велико. Наблюдаемое затухание поперечных колебаний корональных петель происходит на меньшем из этих двух временных масштабов, а именно  $\gamma^{-1}$ .

### 3.2.3а. Асимптотическое состояние колебаний полного давления

Поскольку  $\mathcal{L}[A](\omega)$  является аналитической функцией в полуплоскости  $\Im(\omega) > 0$  ( $\Im$  обозначает мнимую часть величины), из уравнения (3.8.55) следует что

$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\zeta}^{\infty+i\zeta} \frac{W_0(\omega)}{D(\omega; Re)} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.8.74)$$

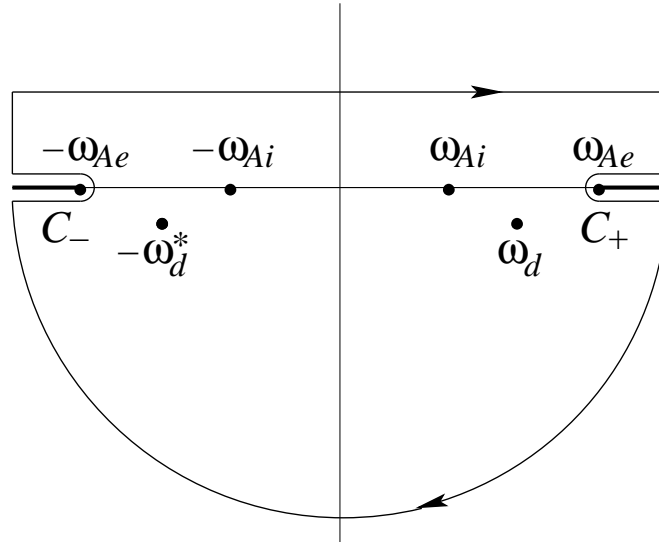


Рис. 3.8.2. Контур интегрирования используемый для вычисления асимптотики  $A(t)$  при большом  $t$ .

где  $\varsigma$  — произвольная положительная постоянная. При выводе этого уравнения принято во внимание что  $|W_1| \ll |W_0|$ . Для вычисления интеграла в уравнении (3.8.74) замкнём контур интегрирования как показано на Рис. 3.8.2. При достаточно большом радиусе полукруга интеграл по замкнутому контуру равен сумме вычетов подынтегрального выражения умноженной на  $-2\pi i$ .

Обе функции,  $W_0(\omega)$  и  $D(\omega; Re)$ , имеют точки ветвления при  $\omega = \pm\omega_{Ae}$ . На первый взгляд, представляется что имеются также точки ветвления в точках  $\omega = \pm\omega_{Ai}$  связанное с присутствием в выражениях для  $W_0(\omega)$  и  $D(\omega; Re)$  величины  $\Lambda_i$ . Однако более тщательное исследование показывает что, фактически, в этих выражениях присутствует только  $\Lambda_i^2$ , а эта величина является аналитической функцией  $\omega$ . Поэтому  $W_0(\omega)$  и  $D(\omega; Re)$  имеют только простые полюса при  $\omega = \pm\omega_{Ai}$ , а их отношение является регулярной функцией в этих точках.

Для того чтобы получить однозначные ветви функций  $W_0(\omega)$  и  $D(\omega; Re)$  сделаем разрезы вдоль действительной оси в комплексной плоскости от  $-\infty$  до  $-\omega_{Ae}$  и от  $\omega_{Ae}$  до  $\infty$  (см. Рис. 3.8.2).  $D(\omega; Re)$  имеет полюса при  $\omega = \omega_d$  и  $\omega = -\omega_d^*$ . Таким образом, интеграл по замкнутому контуру охватывающему эти точки равен сумме вычетов в точках  $\omega = \omega_d$  и  $\omega = -\omega_d^*$  умноженной на  $-2\pi i$ . Нетрудно показать что интеграл по полукругу стремится к нулю когда радиус полукруга стремится к бесконечности. В ре-

зультате получим выражение для  $A(t)$  справедливое при  $t \gg \omega_k^{-1}$ :

$$A(t) = -i \left\{ \operatorname{res}_{\omega=\omega_d} \left( \frac{W_0(\omega)}{D(\omega; Re)} e^{-i\omega t} \right) + \operatorname{res}_{\omega=-\omega_d^*} \left( \frac{W_0(\omega)}{D(\omega; Re)} e^{-i\omega t} \right) \right\} - \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathcal{C}_-} + \int_{\mathcal{C}_+} \right) \frac{W_0(\omega)}{D(\omega; Re)} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.8.75)$$

Здесь  $\mathcal{C}_-$  — контур идущий от  $-\infty$  вдоль нижней границы левого разреза, поворачивающийся вокруг точки  $\omega = -\omega_{Ae}$ , а затем идущий обратно к  $-\infty$  вдоль верхнего края левого разреза (см. Рис. 3.8.2).  $\mathcal{C}_+$  — контур идущий от  $\infty$  вдоль верхнего края правого разреза, поворачивает вокруг  $\omega = \omega_{Ae}$ , а затем идёт назад на  $\infty$  вдоль нижнего края правого разреза.

Интеграл по контуру  $\mathcal{C}_-$  может быть записан в виде

$$\int_{\mathcal{C}_-} \frac{W_0(\omega)}{D(\omega; Re)} e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{-\omega_{Ai}} \left( \frac{W_0^-(\omega)}{D^-(\omega; Re)} - \frac{W_0^+(\omega)}{D^+(\omega; R)} \right) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.8.76)$$

где индессы ‘-’ and ‘+’ обозначает значения функции на нижнем и верхнем краях левого разреза. С помощью интегрирования по частям легко показать, что отношение интеграла в правой части уравнения (3.8.76) к выражению в фигурных скобках в правой части уравнения (3.8.76) порядка  $(t\omega_k)^{-1}$  при  $t \gg \omega_k^{-1}$ . Аналогичную оценку можно получить для интеграла по контуру  $\mathcal{C}_+$ . Эти оценки позволяют пренебречь вторым членом в правой части уравнения (3.8.75).

Принимая во внимание что  $\omega_d \approx \omega_k$  и  $D(\omega; Re) \approx D_0(\omega)$  получим

$$\operatorname{res}_{\omega=\omega_d} \left( \frac{W_0(\omega)}{D(\omega; Re)} e^{-i\omega t} \right) = -S e^{-i\omega_d t}, \quad (3.8.77)$$

$$S = \frac{\rho^2 \omega_A^4 (\rho_i - \rho_e)^2 W_0(\omega_k)}{2\omega_k (\rho_i + \rho_e)^3}. \quad (3.8.78)$$

Выражение для  $W_0(\omega_k)$  не приводится потому что оно не используется в дальнейшем. Для вычета в точке  $\omega = -\omega_d^*$  получим  $S^* e^{i\omega_d^* t}$ , где звёздочка, как обычно, обозначает комплексно сопряжённую величину. В результате выражение (3.8.75) к виду

$$A(t) = i e^{-\gamma t} (S e^{-i\omega_d t} - S^* e^{i\omega_d^* t}) = 2|S| e^{-\gamma t} \sin(\omega_k t + \phi), \quad (3.8.79)$$

где  $S$  записано в виде  $S = |S| e^{-i\phi}$ . Как видим, при  $t \gg \omega_k^{-1}$  возмущение полного давления в кольцевой области осциллирует гармонически с частотой  $\omega_k$  и затухает с декрементом  $\gamma$  с характерным временем затухания  $\gamma^{-1}$ .

### 3.8.3b. Асимптотическое состояние колебаний границы

Исследуем асимптотическое состояние колебаний границ кольцевой области. Смещения внешней и внутренней границ определяются, соответственно, уравнениями (3.8.26) и (3.8.35). Используя уравнения (3.8.25), (3.8.34) и (3.8.55)–(3.8.59) нетрудно показать, что  $\mathcal{L}[\xi_{re}]$  является регулярной функцией при  $\omega = \pm\omega_{Ae}$ , а  $\mathcal{L}[\xi_{ri}]$  – регулярная функция при  $\omega = \pm\omega_{Ai}$ . Это означает что асимптотическое поведение  $\xi_{re}$  и  $\xi_{ri}$  определяется вкладом полюсов функции  $\mathcal{L}[A]$  при  $\omega = \omega_d$  и  $\omega = -\omega_d^*$ . Используя ту же самую технику что и при выводе уравнения (3.8.79), получим что, в длинноволновом приближении ( $a \ll L$ ), это асимптотическое поведение определяется уравнениями

$$R\xi_{re}(t) = b\xi_{ri}(t) = \Phi \frac{ie^{-\gamma t}}{\omega} \cos(\omega_k t + \phi), \quad (3.8.80)$$

$$\Phi = \frac{\rho\omega_A^2(\rho_i - \rho_e)|W_0(\omega_k)|}{(\rho_i + \rho_e)^2}. \quad (3.8.81)$$

Поскольку  $b = R - \ell$ , можно видеть что  $\xi_{ri} = \xi_{re} + O(\ell/R)$ , а обе границы кольцевой области колеблются приблизительно синхронно.

Величины  $\xi_{re}$  и  $\xi_{ri}$  являются комплексными амплитудами радиального смещения, соответственно, при  $r = R$  и  $r = b$ . Действительная величина радиального смещения равна  $\Re(\xi_r(r)e^{i\varphi}) = \xi_r(r) \cos \varphi$ . Введём декартовы координаты  $x$  и  $y$  так что  $\varphi$  отсчитывается в положительном направлении от оси  $x$ . В этом случае радиальные смещения  $\xi_{re} \cos \varphi$  и  $\xi_{ri} \cos \varphi$  соответствуют колебанию внешней и внутренней границ в направлении оси  $x$  со смещениями равными, соответственно,  $\xi_{re}$  и  $\xi_{ri}$ . Из уравнения (3.8.80) следует что внешняя и внутренняя границы осциллируют с частотой глобальной моды  $\omega_k$  и с амплитудами равными, соответственно,  $\Phi/R\omega$  и  $\Phi/b\omega$ . Относительная разница амплитуд приблизительно равна  $\ell/R$ . Колебания границы затухают с декрементом  $\gamma$ . Используя уравнение (3.8.59) получим оценку  $\xi_{re} \sim \xi_{ri} \sim \xi_{r0}$ .

### 3.8.4. Движение в диссипативном слое

В этом разделе исследуется движение в диссипативном слое окружающем идеальную резонансную поверхность  $r = r_A$ . Поскольку движение в диссипативном слое в основном происходит в азимутальном направлении

(см. напр. Goossens and Ruderman 1995; Goossens et al. 1995), в дальнейшем изучаем только поведение величины  $\xi_\varphi$ .

Выведем выражение для  $\xi_\varphi$  в кольцевой области. Используем тот же метод что и при выводе уравнения (3.8.50). Если положить  $P = 2ir\rho g/\pi$  в (3.8.7), то полученное уравнение совпадает с (3.8.36) с той разницей что неизвестной функцией является  $\xi_\varphi$  а не  $w$ . Поэтому можно сразу выписать решение уравнения (3.8.7):

$$\begin{aligned} \xi_\varphi = & \exp(-\Lambda t^3/Re) \left\{ \xi_{\varphi 0} \cos(\omega_A t) + \xi_{\varphi 1} \frac{\sin(\omega_A t)}{\omega_A} \right\} \\ & + \frac{1}{\rho R} \int_0^t G(t-\tau) A(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.8.82)$$

где  $G(t)$  определяется уравнением (3.8.48). При выводе (3.8.82) использовались приближённые соотношения  $r \approx R$  и  $P(t, r) \approx A(t)$  справедливые в кольцевой области.

Подставляя уравнения (3.8.48) и (3.8.74) в (3.8.82), вводя новую переменную интегрирования  $s = (t - \tau)\delta_\omega$  и изменяя порядок интегрирования получим

$$\begin{aligned} \xi_\varphi = & \exp(-\Lambda t^3/Re) \left\{ v_0 \cos(\omega_A t) + v_1 \frac{\sin(\omega_A t)}{\omega_A} \right\} \\ & + \frac{i}{4\pi R\rho\omega_A\delta_\omega} \int_{-\infty+i\zeta}^{\infty+i\zeta} \frac{W_0(\omega)}{D(\omega; Re)} \left\{ \tilde{F}((\omega + \omega_A)/\delta_\omega, t\delta_\omega) \right. \\ & \left. - \tilde{F}((\omega - \omega_A)/\delta_\omega, t\delta_\omega) \right\} e^{-i\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (3.8.83)$$

где функция  $\tilde{F}$  определяется уравнением (3.8.51). Используя ту же процедуру что и при выводе уравнения (3.8.79), получим что при  $t \gg \omega_k^{-1}$  асимптотическое поведение  $\xi_\varphi$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \xi_\varphi = & \exp(-\Lambda t^3/Re) \left\{ \xi_{r0} \cos(\omega_A t) + \xi_{r1} \frac{\sin(\omega_A t)}{\omega_A} \right\} \\ & + \frac{e^{-\gamma t}}{R\rho\omega_A\delta_\omega} \Re \left\{ S e^{-\omega_k t} \left[ \tilde{F}((\omega_d - \omega_A)/\delta_\omega, t\delta_\omega) - \tilde{F}((\omega_d + \omega_A)/\delta_\omega, t\delta_\omega) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.8.84)$$

Нетрудно получить оценку  $\delta_\omega \sim \omega_k (RL/\ell^2 Re)^{1/3}$ . Для типичной корональной магнитной петли  $L \simeq 100R$ . В дальнейшем полагаем  $\ell \simeq 0.1R$ . Тогда  $\delta_\omega \simeq 20\omega_k Re^{-1/3} \simeq 20\gamma(a/\ell)Re^{-1/3}$ . Для типичных условий в короне  $Re \gtrsim 10^{12}$ , так что  $20(R/\ell)Re^{-1/3} \ll 1$ . Таким образом,  $\omega_k/\delta_\omega \gg 1$  and

$\gamma/\delta_\omega \gg 1$ . С помощью интегрирования по частям получим оценку

$$\tilde{F}((\omega_d + \omega_A)/\delta_\omega, t\delta_\omega) \simeq \delta_\omega/\omega_k. \quad (3.8.85)$$

Другая важная оценка используемая в дальнейшем это  $(\gamma/\omega_k)Re^{1/3} \simeq \ell Re^{1/3}/R \gtrsim 10^3$ . Ruderman et al. (1995) показали что, при  $\gamma/\omega_k \gg Re^{-1/3}$ , характерная толщина диссипативного слоя равна не  $\delta_A$ , а  $\ell\gamma/\omega_k \simeq \ell^2/R$  (см. также Tirry and Goossens 1996). В соответствии с этим в дальнейшем полагаем  $|r - r_A| \lesssim \ell^2/R$ . После этого для вычисления первого члена в квадратных скобках в уравнении (3.8.85) можно использовать приближённую формулу аналогичную уравнению (3.8.67),

$$\omega_d - \omega_A \approx \frac{\Delta(r - r_A)}{2\omega_k} - i\gamma. \quad (3.8.86)$$

С помощью этой формулы сразу получаем что этот член порядка или больше чем  $t\delta_\omega$ . Эта оценка и уравнение (3.8.85) позволяют пренебречь вторым членом в квадратных скобках и членами пропорциональными  $\xi_{r0}$  и  $\xi_{r1}$  в правой части уравнения (3.8.85) по сравнению с первым членом в квадратных скобках при  $t \gg \omega_k^{-1}$ . В результате уравнение (3.8.85) может быть переписано в приближённой форме

$$\xi_\varphi = \frac{e^{-\gamma t}}{R\rho\delta_\omega\omega_k} \Re \left\{ S e^{-i\omega_k t} \int_0^{t\delta_\omega} \exp(i\delta_A^{-1}(r - r_A)s \operatorname{sgn}\Delta + s\gamma/\delta_\omega - s^3/3) ds \right\}. \quad (3.8.87)$$

Оценим отношение третьего члена ко второму в показателе экспоненты в уравнении (3.8.87). Это отношение равно

$$\frac{s^3/3}{s\gamma/\delta_\omega} \leq \frac{t^2\delta_\omega^3}{3\gamma} \simeq t^2 \frac{8 \times 10^3 \omega_k^3 Re^{-1}}{3(\ell/R)\omega_k} \sim 3 \times 10^4 t^2 \omega_k^2 Re^{-1}. \quad (3.8.88)$$

Рассмотрим теперь время  $t$  удовлетворяющее неравенству  $\omega_k^{-1} \ll t \ll 10^{-2}\omega_k^{-1}Re^{1/2}$ . Заметим что  $10^{-2}Re^{1/2} \simeq Re^{1/3}$  при  $Re \simeq 10^{12}$ . Тогда, в соответствии с уравнением (3.8.88), можно пренебречь членом  $s^3/3$  в показателе экспоненты в уравнении (3.8.87) по сравнению с членом  $s\gamma/\delta_\omega$ , после чего интеграл в уравнении (3.8.87) легко вычисляется. В результате получаем

$$\xi_\varphi \approx \frac{1}{R\rho\omega_k} \Re \left\{ \frac{S e^{-i\omega_k t}}{\gamma + i\Delta(r - r_A)/(2\omega_k)} [\exp(i(r - r_A)\Delta t/(2\omega_k)) - e^{-\gamma t}] \right\}. \quad (3.8.89)$$



С помощью уравнения (3.8.78) получим оценку  $\xi_\varphi \simeq \xi_{r_0} R/\ell$  справедливую при  $t \gtrsim \gamma^{-1}$  (заметим что  $\gamma^{-1} \ll 10^{-2} \omega_k^{-1} Re^{1/2}$  при  $Re \gg 10^6$ ). Таким образом, за характерное время затухания глобальной волновой моды равное  $\gamma^{-1}$ , амплитуда волнового движения в диссипативном слое возрастает от величины порядка  $\xi_{r_0}$  до величины порядка  $\xi_{r_0} R/\ell$ . Это возрастание происходит за счёт перекачки энергии из глобального волнового движения в локальное движение в диссипативном слое. После этого амплитуда колебаний в диссипативном слое остаётся того же порядка по крайней мере до времени удовлетворяющего неравенству  $t \ll 10^{-2} \omega_k^{-1} Re^{1/2}$ .

Заметим что, в соответствии с уравнением (3.8.89), характерный пространственный масштаб изменения  $\xi_\varphi$  в диссипативном слое убывает как  $1/t$ . Это убывание происходит в результате фазового перемешивания альвеновских колебаний связанного с зависимостью  $\omega_A$  от  $r$ . В результате этой зависимости соседние магнитные линии осциллируют с различными частотами (см. напр. Neuvaearts and Priest 1983; Wright 1992a, b; Mann et al. 1995).

Поведение  $\xi_\varphi$  описываемое уравнением (3.8.87) было исследовано в работе Ruderman and Wright (2000). Было показано что в случае когда  $\gamma \gg \omega_k Re^{-1/3}$ ,  $|\xi_\varphi|$  принимает максимальное значение в точке  $r = r_A$  при  $t = t_m \approx 3\gamma^{-1} \ln(\gamma/\delta_\omega)$ . Поскольку  $\delta_\omega \simeq 20\gamma(R/\ell)Re^{-1/3}$ , получим  $t_m \approx 15\gamma^{-1}$  при  $R/\ell \simeq 0.1$  и  $Re = 10^{12} - 10^{14}$ . Величина этого максимального значения порядка  $Rz\xi_{r_0}/\ell$ . После достижения этого максимального значения  $|\xi_\varphi|$  экспоненциально убывает с характерным временем  $\omega_k^{-1} Re^{1/3}$ . Фазовое перемешивание продолжается до времени порядка  $(\gamma/\delta_\omega^3)^{1/2} \simeq 10^{-2} \omega_k^{-1} Re^{1/2}$ . К этому времени характерный пространственный масштаб изменения  $\xi_\varphi$  уменьшается до величины порядка  $10^2 \ell Re^{-1/2}$ , а амплитуда колебаний экспоненциально мала.

### 3.8.5. Затухание изгибных колебаний корональных петель

Предположим что изменение плотности в кольцевой области задаётся формулой

$$\rho(r) = \frac{\rho_i}{2\zeta} \left\{ (\zeta + 1) - (\zeta - 1) \sin \frac{\pi(2r + \ell - 2R)}{2\ell} \right\}, \quad R - \ell < r < R, \quad (3.8.90)$$

где  $\zeta = \rho_i/\rho_e$ . Используя уравнение (3.8.64) получим  $r_A = R - \ell/2$  и  $\rho_A = \rho_i(\zeta + 1)/2\zeta$ . После этого из уравнений (3.8.67) и (3.8.73) следует что

$$\gamma = \frac{\omega_k \ell (\zeta - 1)}{4R(\zeta + 1)}. \quad (3.8.91)$$

С помощью этой формулы получим для времени затухания

$$t_{\text{decay}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{R}{\ell} \right) \left( \frac{\rho_i + \rho_e}{\rho_i - \rho_e} \right) \Pi, \quad (3.8.92)$$

где  $\Pi$  — период колебаний. Используем этот результат для интерпретации наблюдения изгибного колебания корональной петли представленного в работах Aschwanden et al. (1999) и Nakariakov et al. (1999). Период и время затухания этого колебания были, соответственно,  $\Pi = 256$  с и  $t_{\text{decay}} = 870$  с. Полагая  $\rho_i = 10\rho_e$  получим из уравнения (3.8.92) что  $\ell/R \approx 0.23$ .

Из уравнения (3.8.91) (и в более общем виде из уравнения (3.8.73)) следует что условие  $\gamma \ll \omega_k$  эквивалентно условию  $\ell \ll R$ . Можно показать что, в общем случае когда плотность изменяется не в тонкой кольцевой области а во всём сечении магнитной трубки, условие  $\gamma \ll \omega_k$  эквивалентно условию  $|\Delta| \gg \omega_k^2/R$ . Это неравенство означает что характерный масштаб изменения плотности вблизи резонансной поверхности много меньше чем радиус трубки. Когда это условие не удовлетворяется у всех решений дисперсионного уравнения соответствующих изгибным колебаниям мнимая и действительная части одного порядка. В результате изгибные возмущения трубки затухают апериодически или почти апериодически, так что внешние возмущения не вызывают чётко выраженных изгибных колебаний.

### 3.8.6. Выводы

В этой главе рассмотрены изгибные линейно поляризованные колебания магнитной трубки. Предполагалось что магнитные силовые линии заморожены в плотную плазму и поэтому неподвижны. Также предполагалось что плотность не меняется вдоль трубки, но может изменяться в радиальном направлении в тонкой кольцевой области окружающей центральную область с постоянной плотностью. В кольцевой области плотность монотонно убывает от значения  $\rho_i$  во внутренней области до значения  $\rho_e$  ( $< \rho_i$ ) вне трубки. Использовалось приближение холодной плазмы. Анализ был ограничен модой фундаментальной в аксиальном направлении.

Задача с начальными условиями решена с помощью преобразования Лапласа. Решение для эволюции магнитного давления в кольцевой области выражено через обратное преобразование Лапласа. Для больших значений времени значительно превышающих  $\omega_k^{-1}$ , где  $\omega_k$  — собственная частота фундаментальной изгибной моды, решение стремится к собственной глобальной изгибной моде диссипативной МГД. Эта мода является слабо затухающей. При больших значениях числа Рейнольдса  $Re$  декремент не зависит от  $Re$  и пропорционален отношению толщины кольцевой области  $\ell$  к радиусу трубки  $R$ .

Исследовано также волновое движение в диссипативном слое окружающем идеальную резонансную поверхность. Резонансная поверхность определяется условием что на ней локальная альвеновская частота совпадает с частотой глобальной волновой моды.

Основные результаты полученные в данной главе следующие:

(i) Асимптотическим состоянием колебания магнитной трубки вызванного начальным возмущением является слабо затухающее гармоническое колебание с частотой глобальной моды изгибных колебаний магнитной трубки.

(ii) Изгибные колебания магнитной трубки затухают вследствие передачи энергии от глобальной волновой моды к локальным альвеновским колебаниям в диссипативном слое охватывающем идеальную резонансную поверхность.

(iii) Декремент колебаний  $\gamma$  не зависит от числа Рейнольдса  $Re$  когда  $Re \gg 1$ , а отношение  $\gamma/\omega_k$  порядка  $\ell/R$ ; таким образом, условие  $\gamma \ll \omega_k$  эквивалентно  $\ell \ll R$ .

(iv) За характерное время затухания глобальной моды колебаний равное  $\gamma^{-1}$  энергия глобального колебания преобразуется в энергию альвеновских колебаний в диссипативном слое; за это время амплитуда колебаний в диссипативном слое достигает величины порядка начальной амплитуды колебания глобальной изгибной моды умноженной на  $R/\ell$ .

(v) В предположении что  $\gamma/\omega_k \gg Re^{-1/3}$  справедливом для условий в солнечной короне амплитуда колебаний в диссипативном слое продолжает расти до момента времени порядка  $t_m$ ; после этого она начинает затухать с характерным временем  $\omega_k^{-1} Re^{1/3}$ . Для типичных корональных условий  $t_m \approx 15\gamma^{-1}$ . Максимальная амплитуда колебаний в диссипативном слое остаётся порядка начальной амплитуды глобальной моды умноженной на

$R/\ell$ .

(vi) Число Рейнольдса  $Re$  влияет только на волновое движение в окрестности идеальной резонансной поверхности, так что невозможно сделать никакого заключения о величине вязкости в короне на основе наблюдений затухания изгибных колебаний корональных петель. В случае когда  $\gamma/\omega_k \gg Re^{-1/3}$  движение в этой окрестности характеризуется сильными пространственными осцилляциями в радиальном направлении. Однако если вследствие каких-то физических процессов (например, турбулентности) возникает аномальная вязкость значительно превосходящая обычную вязкость, так что  $\gamma/\omega_k \lesssim Re^{-1/3}$ , то движение в окрестности идеальной резонансной поверхности характеризуется монотонной зависимостью от радиальной переменной. Если в дальнейшем наблюдения обеспечат пространственное разрешение с масштабом порядка нескольких процентов от радиуса петли, то можно будет получить оценку  $Re$  на основе наблюдений движения в окрестности идеальной резонансной поверхности.

Вывод что условие  $\gamma \ll \omega_k$  эквивалентно условию  $\ell \ll R$  является особенно важным. Он, в частности, означает что в случае когда плотность меняется во всём поперечном сечении магнитной петли с характерным масштабом  $R$ ,  $\gamma \simeq \omega_k$  и внешнее возмущение не вызывает достаточно выраженных поперечных колебаний петли. Этот вывод объясняет почему изгибные колебания корональных петель наблюдаются довольно редко.

### 3.9. Влияние изменения плотности вдоль магнитной трубки на резонансное затухание её изгибных колебаний

В этой главе будет исследовано влияние изменения плотности вдоль магнитной трубки на резонансное затухание изгибных колебаний. Поскольку в предыдущей главе было показано что, после короткого переходного периода, произвольное возмущение возбуждает собственную моду изгибных колебаний, для упрощения анализа вместо решения начальной задачи будем рассматривать затухание собственных мод. Данное исследование было представлено в работе *Dumova and Ruderman (2006a)*. В дальнейшем следуем этой работе.

### 3.9.1. Постановка задачи и основные уравнения

В этой главе рассматривается то же самое невозмущённое состояние что и в предыдущей главе. Единственная разница заключается в том что плотность является также функцией  $z$ . Таким образом, невозмущённая плотность задаётся уравнением (3.7.1). Однако невозмущённая плотность не зависит от времени и изменение плотности в радиальном направлении происходит не в интервале  $R - \ell/2 < r < R + \ell/2$ , а в интервале  $R - \ell < r < R + \ell$  (см. Рис. 3.7.1). В дальнейшем предполагаем что отношение невозмущённых плотностей втрути и вне трубки постоянно,  $\rho_i(z)/\rho_e(z) = \zeta > 1$ , где  $\zeta$  — постоянная. Кроме того, предполагаем, что невозмущённая плотность факторизуется и записывается в виде  $\rho_t(z, r) = f(r)\rho_i(z)$ , где функция  $f(r)$  непрерывна и удовлетворяет условиям  $f(r) = 1$  при  $r \leq R - \ell$  и  $f(r) = 1/\zeta$  при  $r \geq R$ . Как и прежде, магнитное поле везде постоянно и параллельно оси трубки.

Как и в предыдущей главе, возмущения описываются уравнениями (3.8.1)-(3.8.4). Исключая возмущения магнитного поля и полагая что возмущения всех переменных пропорциональны  $\exp(-i\omega t + i\varphi)$  сводим уравнения (3.8.1)-(3.8.3) к системе

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{V_A^2} \xi_r - \frac{i\nu_v \omega}{V_A^2} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2} = \frac{1}{\rho V_A^2} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (3.9.1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{V_A^2} \xi_\varphi - \frac{i\nu_v \omega}{V_A^2} \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial r^2} = \frac{i}{r\rho V_A^2} P, \quad (3.9.2)$$

где, как и прежде,  $V_A(r, z) = B[\mu_0 \rho(r, z)]^{-1/2}$  — альвеновская скорость.

Система уравнений (3.9.1) и (3.9.2) незамкнута: в двух уравнениях содержатся три переменные,  $\xi_r$ ,  $\xi_\varphi$  и  $P$ . Таким образом, её необходимо дополнить ещё одним уравнением. Как уже указывалось в предыдущей главе, удобно вывести два различных уравнения, одно из которых будет использоваться в областях где невозмущённая плотность не меняется в радиальном направлении, а другое — в переходной области определяемой неравенством  $R - \ell < r < R$ . Начнём с вывода уравнения которое будет использоваться вне переходной области. При этом необходимо иметь в виду что  $\rho = \rho(z)$  и можно положить  $\nu_v = 0$  поскольку вязкость важна только в диссипативном слое. Умножим уравнение (3.8.1) на  $r\rho$  и продифференцируем по  $r$ . Затем умножим уравнение (3.8.2) на  $\rho$  и продифференцируем по  $\varphi$ . Складывая

полученные уравнения, используя уравнения (3.8.4) и  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$  и учитывая что возмущения всех переменных пропорциональны  $\exp(-i\omega t + i\varphi)$ , получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \left( \frac{\omega^2}{V_A^2} - \frac{1}{r^2} \right) P = 0. \quad (3.9.3)$$

Причина по которой желательно иметь другое уравнение для описания движения плазмы внутри переходного слоя следующая. Для вывода уравнения описывающего изгибные колебания магнитной трубки необходимо вычислить изменения величин  $\xi_r$  и  $P$  поперёк переходного слоя. Изменение  $P$  определяется уравнением (3.9.1). Для вычисления изменения  $\xi_r$  необходимо получить уравнение содержащее производные  $\xi_r$  по  $r$  в левой части и не содержащее производных по  $r$  в правой части. Для вывода такого уравнения прежде всего используем уравнение (3.8.4) для того чтобы выразить  $\xi_\varphi$  через  $\xi_r$  и  $P$ . Подставляя результат в уравнение (3.9.2) получим

$$\frac{\partial^3(ru)}{\partial r \partial z^2} + \frac{\omega^2}{V_A^2} \frac{\partial(ru)}{\partial r} - \frac{i\nu_v \omega}{V_A^2} \frac{\partial^3(ru)}{\partial r^3} = \frac{ir\omega}{\rho V_A^2} \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \left( \frac{\omega^2}{V_A^2} - \frac{1}{r^2} \right) P \right]. \quad (3.9.4)$$

При выводе этого уравнения были опущены члены пропорциональные  $\nu_v \partial^2 P / \partial r^2$ . Это можно сделать по следующей причине. Вязкость необходимо учитывать только там где имеются большие градиенты возмущений, т.е. в диссипативном слое. Однако даже в диссипативном слое большие градиенты  $P$  отсутствуют.

Для завершения формулировки проблемы необходимо задать граничные условия. Как и прежде, предполагается что концы трубки заморожены в плотную неподвижную фотосферную плазму:

$$\xi_r = \xi_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, L. \quad (3.9.5)$$

Из уравнений (3.8.4) и (3.9.5) следует что

$$P = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, L. \quad (3.9.6)$$

Наконец, в дальнейшем рассматриваются захваченные волны и предполагается что все возмущения затухают при  $r \rightarrow \infty$ .

### 3.9.2. Разложения в обобщённые ряды Фурье

В том случае когда плотность не меняется вдоль магнитной трубки и все невозмущённые величины зависят только от  $r$ , можно разложить переменные  $\xi_r$ ,  $\xi_\varphi$  и  $P$  в ряды Фурье по  $z$ . Затем можно изучать поведение

каждой фурье-компонеты по отдельности полагая что эти переменные пропорциональны  $\sin(\pi n z)$ , где  $n$  — положительное целое число, так как это было сделано в предыдущей главе. После этого уравнения (3.9.1)-(3.9.4) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако, в том случае когда плотность изменяется вдоль магнитной трубки, коэффициенты уравнений (3.9.1)-(3.9.4) зависят от  $z$  и данный подход невозможен. Для того чтобы преодолеть эту трудность в дальнейшем используем разложения в обобщённые ряды Фурье по собственным функциям следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$V_A^2 \frac{d^2 W}{dz^2} = -\lambda W, \quad W(0) = W(L) = 0. \quad (3.9.7)$$

Собственные значения этой задачи действительны и образуют монотонно возрастающую последовательность  $\{\lambda_n\}$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. напр. Coddington and Levinson 1955). Легко показать что все собственные значения положительны. Любая функция  $g(z)$  квадрат которой интегрируем на интервале  $[0, L]$  может быть разложена в обобщённый ряд Фурье

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n W_n(z), \quad (3.9.8)$$

где  $W_n(z)$  — собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (3.9.7) соответствующая собственному значению  $\lambda_n$ . Очевидно все собственные функции могут быть выбраны действительными. Они удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^L V_A^{-2}(z) W_n(z) W_m(z) dz = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (3.9.9)$$

В том случае когда  $g(z)$  имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет граничным условиям  $g(0) = g(L) = 0$ , сумма в равенстве (3.9.8) сходится равномерно и её можно дважды дифференцировать (см. напр. Titchmarsh 1946; Naimark 1967). Заметим что, поскольку  $V_A$  и  $g$  зависят от  $r$ ,  $\lambda_n$ ,  $W_n$  и  $g_n$  также зависят от  $r$  как от параметра. В силу предположения что  $\rho(r, z) = f(r)\rho_i(z)$  уравнение (3.9.7) можно переписать в виде

$$V_{Ai}^2 \frac{d^2 W}{dz^2} = -\lambda f(r) W, \quad W(0) = W(L) = 0. \quad (3.9.10)$$

Теперь очевидно, что функцию  $W_n$  можно выбрать независимой от  $r$ , а зависимость  $\lambda_n$  от  $r$  определяется формулой

$$\lambda_n(r) = \frac{\lambda_n(R - \ell)}{f(r)}. \quad (3.9.11)$$

Для удобства будем также предполагать, что каждая собственная функция  $W_n(z)$  нормализована условием

$$\int_0^L V_{Ai}^{-2}(z) W_n(z)^2 dz = 1, \quad (3.9.12)$$

так что фурье-коэффициенты даются выражением

$$g_n = \int_0^L V_{Ai}^{-2}(z) g(z) W_n(z) dz. \quad (3.9.13)$$

### 3.9.3. Решения в однородных областях

В этом разделе будут получены выражения для  $P$  и  $\xi_r$  справедливые в однородных областях где  $\rho$  зависит только от  $z$ . Это внутренняя область определяемая неравенством  $r < R - \ell$  и внешняя область определяемая неравенством  $r > R$ . Для описания движения плазмы в этих областях используем уравнение (3.9.1), с третьим членом в левой части равным нулю, и уравнение (3.9.3). Начнём с рассмотрения внутренней области. В этой области характерный масштаб в радиальном направлении равен  $R$ , в то время как характерный масштаб в направлении оси  $z$  равен  $L$ . Из этих оценок немедленно следует что отношение первого члена в левой части уравнения (3.9.3) ко второму члену порядка  $(R/L)^2$ , и тоже самое верно для отношения члена пропорционального  $\omega^2$  ко второму члену. Поскольку рассматривается тонкая трубка с  $R/L \ll 1$ , это означает что первым членом и членом пропорциональным  $\omega^2$  в левой части уравнения (3.9.3) можно пренебречь и записать это уравнение в приближённом виде как

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) - P = 0. \quad (3.9.14)$$

Решение этого уравнения регулярное при  $r = 0$  имеет вид

$$P(r, z) = r A_i(z), \quad (3.9.15)$$

где  $A_i(z)$  — произвольная функция удовлетворяющая условию  $A_i(0) = A_i(L) = 0$ .

Разложим теперь  $\xi_r$  и  $P$  в обобщённый ряд Фурье в форме определяемой уравнением (3.9.8). Подставляя эти разложения в уравнение (3.9.1) с третьим членом в левой части равным нулю получим

$$\xi_{rn} = \frac{\Phi_n}{\omega^2 - \lambda_n}, \quad (3.9.16)$$



где  $\Phi_n$  —  $n$ -ый коэффициент Фурье функции  $\Phi(z) = A_i(z)/\rho_i(z)$ . Заметим что  $\xi_{rn}$  не зависит от  $r$ , так что  $\xi_r$  во внутренней области зависит только от  $z$ .

Во внешней области характерные размеры в направлениях  $r$  и  $z$  одинаковы и равны  $L$ , так что нельзя пренебречь ни одним членом в уравнении (3.9.3). Для того чтобы решить задачу аналитически в дальнейшем предположим что переходная область тонкая, т.е.  $\ell \ll R$ . После этого используем регулярный метод возмущений, в котором  $\ell/R$  является малым параметром. В дальнейшем увидим что отношение мнимой части  $\omega$  к действительной части порядка  $\ell/R$ , так что можно использовать выражение  $\omega = \omega_r + i(\ell/R)\omega_i$ , где  $\omega_r$  и  $\omega_i$  — действительные величины и  $\omega_i \sim \omega_r$ .

Будем теперь искать решение уравнения (3.9.3) в форме разложения  $P = P^{(0)} + (\ell/R)P^{(1)} + \dots$ . Тогда в нулевом приближении получим

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^{(0)}}{\partial r} \right) + \left( \frac{\omega_r^2}{V_{Ae}^2} - \frac{1}{r^2} \right) P^{(0)} = 0. \quad (3.9.17)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде  $P^{(0)}(r, z) = F^{(0)}(r)G(z)$ . Разделяя переменные получим что  $F^{(0)}(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 F^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF^{(0)}}{dr} - \left( \chi^2 + \frac{1}{r^2} \right) F^{(0)} = 0, \quad (3.9.18)$$

а  $G(z)$  — решение задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \frac{\omega_r^2}{V_{Ae}^2} G = -\chi^2 G, \quad G = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, L, \quad (3.9.19)$$

где  $\chi^2$  — постоянная разделения переменных. Как известно, собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (3.9.19) составляют монотонно возрастающую последовательность  $\{\chi_n^2\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причём  $\chi_n^2 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Собственные функции  $G_n$  соответствующие собственным значениям  $\chi_n^2$  являются полной системой функций в пространстве функций с интегрируемым квадратом, так что любая функция может быть разложена в обобщённый ряд Фурье по функциям  $G_n$ , причём ряд сходится в квадратичном среднем. Если функция имеет непрерывную вторую производную и равна нулю при  $z = 0, L$ , то обобщённый ряд Фурье сходится равномерно по отношению к  $z$  и его можно дважды дифференцировать.

Как было объяснено в разделе 3.4.2,  $\chi_1^2 < 0$  означает наличие радиационных мод. В дальнейшем предполагаем, что радиационные моды отсутствуют, т.е.  $\chi_1^2 > 0$ . Это предположение будет проверено после того как будет найдено  $\omega$ . Поскольку последовательность  $\{\chi_n^2\}$  является монотонно возрастающей, предположение  $\chi_1^2 > 0$  означает что  $\chi_n^2 > 0$  при любом  $n$ . Отсюда следует, что уравнение (3.9.18) является модифицированным уравнением Бесселя, так что, с точностью до мультипликативной константы, его решение убывающее на бесконечности даётся выражением  $F(r) = K_1(\chi_n r)$ , где  $K_1$  – модифицированная функция Бесселя (функция МакДональда). После этого из теоремы о разложении решений в ряды (Titchmarsh 1946; Naimark 1967) следует, что общее решение уравнения (3.9.17) даётся выражением

$$P^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(0)} G_n(z) K_1(\chi_n r), \quad (3.9.20)$$

где  $H_n^{(0)}$  – произвольная постоянная.

В первом приближении из уравнения (3.9.3) получим

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P^{(1)}}{\partial r} \right) + \left( \frac{\omega_r^2}{V_{Ae}^2} - \frac{1}{r^2} \right) P^{(1)} = -\frac{2i\omega_r \omega_i}{V_{Ae}^2} P^{(0)}. \quad (3.9.21)$$

Отыскиваем решение этого уравнения в виде

$$P^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(1)} G_n(z). \quad (3.9.22)$$

Подставляя уравнение (3.9.22) в уравнение (3.9.21), используя уравнения (3.9.19) и (3.9.20) и принимая во внимание что функции  $G_n(z)$  линейно независимы, получим

$$\frac{d^2 F_n^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_n^{(1)}}{dr} - \left( \chi_n^2 + \frac{1}{r^2} \right) F_n^{(1)} = -\frac{2i\omega_r \omega_i}{V_{Ae}^2} H_n^{(0)} K_1(\chi_n r). \quad (3.9.23)$$

Решение однородного уравнения (3.9.23), т.е. уравнения (3.9.23) с нулевой правой частью, имеет вид  $C_1 I_1(\chi_n r) + C_2 K_1(\chi_n r)$ , где  $I_1(\chi_n r)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода, а  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Используя метод вариации постоянных и принимая во внимание асимптотические соотношения (Abramowitz and Stegun 1964)

$$I_1(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad (3.9.24)$$

справедливые при  $x \rightarrow \infty$ , находим что общее решение уравнения (3.9.23) затухающее на бесконечности имеет вид

$$F_n^{(1)}(r) = H_n^{(1)} K_1(\chi_n r) + \frac{2i\omega_r \omega_i H_n^{(0)}}{V_{Ae}^2} \quad (3.9.25)$$

$$\times \left( K_1(\chi_n r) \int_R^r s I_1(\chi_n s) K_1(\chi_n s) ds + I_1(\chi_n r) \int_r^\infty s [K_1(\chi_n s)]^2 ds \right).$$

Здесь  $H_n^{(1)}$  – произвольная постоянная.

Получим приближённые выражения для  $P^{(0)}$  и  $P^{(1)}$  справедливые при  $r$  порядка  $R$ . При этом используем формулы (Abramowitz and Stegun 1964)

$$I_1(x) = x/2 + O(x^3), \quad K_1(x) = x^{-1} + O(x), \quad (3.9.26)$$

справедливые при  $0 < x \ll 1$ . Ряды (3.9.20) и (3.9.22) сходятся очень быстро, так что  $P^{(0)}$  и  $P^{(1)}$  можно аппроксимировать первыми несколькими членами рядов (3.9.20) и (3.9.22). В дальнейшем увидим что  $\omega/V_{Ae} \sim L^{-1}$ . Тогда из уравнения (3.9.19) следует что, при небольших значениях  $n$ ,  $\chi_n \sim L^{-1}$ . Это означает что, при  $r$  порядка  $R$ ,  $\chi_n r \sim R/L \ll 1$ . Теперь, используя второе уравнение (3.9.26), получим из уравнения (3.9.20)

$$P^{(0)} = r^{-1} A_e^{(0)}(z) [1 + O((R/L)^2)], \quad A_e^{(0)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (H_n^{(0)}/\chi_n) G_n(z). \quad (3.9.27)$$

Используя уравнение (3.9.26) получим что при  $r$  порядка  $R$

$$\int_R^r s I_1(\chi_n s) K_1(\chi_n s) ds \approx \frac{r^2 - R^2}{4}. \quad (3.9.28)$$

Поскольку функция  $s [K_1(\chi_n s)]^2$  имеет неинтегрируемую особенность при  $s = 0$  и экспоненциально затухает при  $s \rightarrow \infty$ , основной вклад в интеграл  $\int_r^\infty s [K_1(\chi_n s)]^2 ds$  приходит из окрестности  $r$  в которой  $r \sim R$ . Тогда, полагая  $R \ll r_0 \ll L$  и используя уравнение (3.9.26), получим

$$\int_r^\infty s [K_1(\chi_n s)]^2 ds \approx \int_r^{r_0} \frac{ds}{\chi_n^2 s} = \chi_n^{-2} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (3.9.29)$$

Теперь из уравнений (3.9.26), (3.9.28) и (3.9.29) следует, что второй член в правой части уравнения (3.9.26) приближённо равен

$$\frac{i\omega_r \omega_i H_n^{(0)}}{\chi_n V_{Ae}^2} \left( \frac{r^2 - R^2}{2r} + r \ln \frac{r_0}{r} \right) \sim \frac{r H_n^{(0)}}{\chi_n L^2} \sim \frac{(R/L) H_n^{(0)}}{L \chi_n} \quad (3.9.30)$$

при  $r \sim R$ . При выводе этой оценки были применены оценки  $\omega_r/V_{Ae} \sim \omega_i/V_{Ae} \sim L^{-1}$  и  $\ln(r_0/r) \sim 1$ . Теперь, используя уравнения (3.9.22), (3.9.26), (3.9.27), (3.9.30) и (3.9.26) получим

$$P^{(1)} = r^{-1} A_e^{(1)}(z) [1 + O((R/L)^2)] + \tilde{P}^{(1)}, \quad (3.9.31)$$

где

$$A_e^{(1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (H_n^{(1)}/\chi_n) G_n(z), \quad \tilde{P}^{(1)} \sim (R/L)^2 P^{(0)}. \quad (3.9.32)$$

Применяя уравнения (3.9.27) и (3.9.31) и пренебрегая членами порядка  $(R/L)^2$  и  $(\ell/R)^2$ , окончательно получаем приближённые выражения

$$P = P^{(0)} + (\ell/R)P^{(1)} = r^{-1} A_e(z), \quad A_e(z) = A_e^{(0)}(z) + (\ell/R)A_e^{(1)}(z). \quad (3.9.33)$$

Необходимо подчеркнуть, что полученное решение справедливо только при  $\ell \ll R$ . С другой стороны, метод разделения переменных может быть использован при любом  $\ell$ . В этом случае получаем ту же самую граничную задачу (3.9.19) для функции  $G(z)$ , однако с  $\omega$  подставленным вместо  $\omega_r$ . Поскольку  $\omega$  комплексно, уравнение (3.9.19) будет иметь комплексные коэффициенты, так что получаемая граничная задача не будет классической задачей Штурма-Лиувилля. В результате, для того чтобы получить полную систему функций необходимо будет использовать не только собственные функции, но и присоединённые функции (Naimark 1967), что делает исследование существенно более сложным.

### 3.9.4. Формулы связи

В главе 2.4 рассмотрено резонансное затухание распространяющихся изгибных волн. При этом были исследованы формулы связи которые, как было отмечено в разделе 2.4.2, были впервые введены в работе Sakirai et al. (1991). Концепция формул связи была в дальнейшем развита в работах Goossens et al. (1995) и Goossens and Ruderman (1995). В разделе 2.4.2 формулы связи выведены в случае когда плотность меняется в переходном слое в радиальном направлении, но не меняется вдоль трубки. В данном разделе будет получено обобщение формул связи на случай когда плотность может меняться вдоль магнитной трубки.

В переходной области определяемой неравенством  $R - \ell < r < R$  движение плазмы описывается уравнениями (3.9.1), (3.9.2) и (3.9.4). Вве-

дём функции  $U = \partial(r\xi_r)/\partial r$  и  $\Psi = P/\rho$  и разложим  $\xi_r$ ,  $U$ ,  $P$  и  $\Psi$  в обобщённые ряды Фурье аналогичные формуле (3.9.8). В переходной области характерный масштаб изменения невозмущённых величин в радиальном направлении равен  $\ell$ , а характерный масштаб изменения возмущённых в радиальном направлении в диссипативном слое охватывающем идеальную резонансную поверхность много меньше чем  $\ell$ . Теперь, учитывая, что  $W_n$  не зависит от  $r$ , получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n \frac{d^2 \xi_{rn}}{dr^2}, & \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n \frac{d^2 U_n}{dr^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} &\approx \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \frac{d\Psi_n}{dr}. \end{aligned} \quad (3.9.34)$$

Подставляя разложения для  $\xi_r$ ,  $U$ ,  $P$  и  $\Psi$  в уравнения (3.9.1) и (3.9.4) и используя уравнения (3.9.7) и (3.9.34), находим

$$(\omega^2 - \lambda_n)\xi_{rn} - i\nu_v\omega \frac{d^2 \xi_{rn}}{dr^2} = \frac{d\Psi_n}{dr}, \quad (3.9.35)$$

$$(\omega^2 - \lambda_n)U_n - i\nu_v\omega \frac{d^2 U_n}{dr^2} = \frac{r}{\rho V_A^2}(\lambda_n - \omega^2)P_n + \frac{r}{\Psi_n}, \quad (3.9.36)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . В разложении  $\xi_r$  (а также  $U$ ) в обобщённый ряд Фурье  $n$ -ый член является резонансным лишь при условии когда  $r_n$  удовлетворяет равенству  $\lambda_n(r_n) = \omega_r^2$ . В этом случае уравнение  $r = r_n$  определяет идеальную резонансную поверхность, а диссипативный слой с толщиной много меньше чем  $\ell$  охватывает её. Поскольку толщина диссипативного слоя много меньше  $\ell$ , можно использовать приближение

$$\omega_r^2 - \lambda_n(r) = \Delta_n(r - r_n), \quad \Delta_n = - \left. \frac{d\lambda_n}{dr} \right|_{r=r_n}. \quad (3.9.37)$$

Характерный масштаб изменения возмущений в радиальном направлении в диссипативном слое определяется балансом двух членов в левой части уравнения (3.9.35) или уравнения (3.9.36). Если  $\omega$  действительно, то мы немедленно получаем что этот характерный масштаб равен  $l_d = (\nu_v \ell / \omega_r)^{1/3}$ , а толщина диссипативного слоя порядка  $l_d$ . Очевидно, что эти оценки остаются справедливыми в том случае, когда  $\omega$  комплексно,  $\omega = \omega_r - i\gamma$ , если декремент  $\gamma$  удовлетворяет оценке  $\gamma \lesssim l_d |\Delta_n| / \omega_r \sim (l_d / \ell) \omega_r$ . Эта оценка верна только для  $\ell / R \lesssim l_d / \ell$ . Однако, для типичных условий в солнечной

короне  $\ell/R \gg l_d/\ell$ . В этом случае, как уже было установлено в главе 3.8,  $\gamma \sim (\ell/R)\omega_r$  для трубки с плотностью не меняющейся в аксиальном направлении. Ниже увидим что эта оценка верна и в случае когда плотность меняется вдоль трубки. В главе 3.8 также было показано что характерный масштаб изменения возмущений в радиальном направлении не превышает  $l_d$  даже когда  $\ell/R \gg l_d/\ell$ . Однако, в этом случае толщина диссипативного слоя порядка  $\ell^2/R$ . Поскольку предполагается что  $\ell \ll R$ , толщина диссипативного слоя остаётся много меньше чем  $\ell$ .

Продолжая анализ заметим что при толщине диссипативного слоя порядка  $\ell^2/R$  отношение первого члена в правой части уравнения (3.9.36) ко второму члену порядка  $\omega_r^2 \ell R / V_A^2$ . Далее, принимая во внимание что  $\omega_r \sim V_A/L$ , получим что это отношение порядка  $\ell R / L^2 \ll 1$ . Таким образом, можно пренебречь первым членом в правой части уравнения (3.9.36) по сравнению со вторым. Поскольку характерный масштаб изменения возмущений в диссипативном слое порядка  $l_d$ , удобно ввести растягивающую переменную  $\sigma = (r - r_n)/l_d$  в диссипативном слое. После этого, используя уравнение (3.9.37), перепишем систему (3.9.35) и (3.9.36) в приближённой форме:

$$\frac{d\Psi_n}{d\sigma} = -i\Delta_n l_d^2 \left( \frac{\omega_r^2}{\ell\Delta_n} \frac{d^2 u_n}{d\sigma^2} + i\sigma u_n + \frac{2\omega_r\gamma}{\Delta_n l_d} u_n \right), \quad (3.9.38)$$

$$\frac{d^2 U_n}{d\sigma^2} + \left( \frac{i\ell\Delta_n\sigma}{\omega_r^2} + \frac{2\gamma\ell}{\omega_r l_d} \right) U_n = \frac{i\ell\Psi_n}{R\omega_r^2 l_d}. \quad (3.9.39)$$

При выводе этих уравнений использовалось приближение  $r \approx R$ , а также приближение  $\omega \approx \omega_r$  везде кроме коэффициентов при первых членах в левых частях где было использовано приближение  $\omega^2 \approx \omega_r^2 - 2i\omega_r\gamma$ .

Из уравнения (3.9.39) и оценки  $\gamma \sim (\ell/R)\omega_r$  следует, что  $U_n \sim (\ell\omega_r^2)^{-1}\Psi_n$ . Используя эту оценку и приближённое равенство  $U_n \approx R d\xi_{rn}/dr$  получим

$$\frac{d\xi_{rn}}{d\sigma} \sim \frac{l_d \Psi_n}{\omega_r^2 \ell R}. \quad (3.9.40)$$

Поскольку изменение  $\sigma$  в диссипативном слое порядка  $\ell^2/Rl_d$ , из уравнения (3.9.40) следует, что изменение  $\xi_{rn}$  в диссипативном слое порядка  $\ell(\omega_r^2 R^2)^{-1}\Psi_n$ . С другой стороны, из уравнений (3.9.15) и (3.9.16) следует что  $\xi_{rn} \sim (\omega_r^2 R)^{-1}\Psi_n$  при  $r = R - \ell$ . Поскольку  $(\omega_r R)^{-1} \gg \ell(\omega_r R^2)^{-1}$ , можно использовать оценку  $\xi_{rn} \sim (\omega_r^2 R)^{-1}\Psi_n$  в диссипативном слое. Теперь, принимая во внимание что последний член в скобках в правой части

уравнения (3.9.38) является самым большим, получим оценку

$$\frac{d\Psi_n}{d\sigma} \sim \frac{l_d \ell}{R^2} \Psi_n. \quad (3.9.41)$$

Из этой оценки следует что изменение  $\Psi_n$  поперёк диссипативного слоя порядка  $(\ell/R)^3 |\Psi_n| \ll |\Psi_n|$ . Таким образом, этим изменением можно пренебречь и считать что величина  $\Psi_n$  постоянна в диссипативном слое. Это означает что можно пренебречь изменениями  $\Psi$  и  $P$  поперёк диссипативного слоя. Напомним определение скачка функции  $f(\sigma)$  поперёк диссипативного слоя введённое в разделе 2.4.2:

$$[[f]] = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \{f(\sigma) - f(-\sigma)\},$$

в частности, получим

$$[[P]] = 0. \quad (3.9.42)$$

Это первая формула связи. Как видим, она совпадает с соответствующей формулой полученной в главах 2.4 и 3.8 в случае когда невозмущенная плотность меняется только в радиальном направлении. Эта формула имеет очень простой физический смысл. Поскольку диссипативный слой очень тонкий, его инерция весьма мала и поэтому давление с двух сторон от него должно быть практически одно и тоже.

С точностью до обозначений уравнение (3.9.39) совпадает с (2.4.19). После этого, принимая во внимание что решение уравнения (2.4.19) даётся уравнение (2.4.23), получим что решение уравнения (3.9.39) имеет вид

$$U_n = -\frac{i\Psi_n}{Rl_d} \left( \frac{\ell}{\omega_r^2 \Delta_n^2} \right)^{1/3} F_\Lambda(-\alpha\sigma), \quad (3.9.43)$$

где

$$\alpha = \left( \frac{\ell \Delta_n}{\omega_r^2} \right)^{1/3}, \quad \Lambda = 2\gamma \left( \frac{\omega_r^2}{\nu_v \Delta_n^2} \right)^{1/3}. \quad (3.9.44)$$

Теперь учитывая что  $U_n = d(r\xi_{rn})/dr$ , получим

$$\xi_{rn} = -\frac{\Psi_n(r_n)}{R^2 \Delta_n} G_\Lambda(-\alpha\sigma) + \text{const}, \quad (3.9.45)$$

где функция  $G_\Lambda(s)$  определяется уравнением (2.4.24). При выводе этого уравнения использовалось приближение  $r \approx R$ . В результате вычислений аналогичных тем что представлены в уравнением (2.4.23) получим

$$[[\xi_{rn}]] = -\frac{\pi i \Psi_n(r_n)}{R^2 |\Delta_n|}. \quad (3.9.46)$$

Здесь было учтено что  $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\Delta_n)$ . Уравнение (3.9.46) является второй формулой связи.

### 3.9.5. Изменения радиального смещения плазмы и магнитного давления поперёк переходного слоя

В этом разделе формулы связи используются для вычисления изменения радиального смещения плазмы и магнитного давления поперёк переходного слоя. Они равны, соответственно,  $\delta P = P(R, z) - P(R - \ell, z)$  и  $\delta \xi_r = \xi_r(R, z) - \xi_r(R - \ell, z)$ .

Начнём с вычисления  $\delta P$ . Характерный масштаб изменения возмущений в направлении оси  $z$  равен  $L$ . Характерные масштабы изменения возмущений в радиальном направлении во внутренней области ( $r < R - \ell$ ) и в переходной области ( $R - \ell < r < R$ ) равны, соответственно,  $R$  и  $\ell$ . Используя эти оценки и оценку  $V_A/\omega \sim L$  получим из уравнения (3.9.4) оценки для  $\delta \xi_r$  и для  $\xi_r$  во внутренней области,

$$\delta \xi_r \sim \frac{\ell L^2 P}{\rho R^2 V_A^2}, \quad \xi_r \sim \frac{L^2 P}{\rho R V_A^2}. \quad (3.9.47)$$

Из первой из этих оценок следует что  $\xi_r(r) = \bar{\xi}_r [1 + O(\ell/R)]$ , где  $\bar{\xi}_r = \xi(R - \ell)$ . После этого из уравнения (3.9.1) с третьим членом в левой части равным нулю и уравнения (3.9.47) находим

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho V_A^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{\xi}_r}{\partial z^2} + \frac{\omega^2 \bar{\xi}_r}{V_A^2} \right) [1 + O(\ell/R)]. \quad (3.9.48)$$

Используя уравнения (3.9.7), (3.9.20) и (3.9.21) приводим (3.9.48) к виду

$$\frac{\partial P}{\partial r} = A_i(z) [1 + O(\ell/R)]. \quad (3.9.49)$$

Затем, с помощью формулы связи (3.9.42), получим из этого уравнения

$$\delta P = \ell A_i(z) [1 + O(\ell/R)]. \quad (3.9.50)$$

Подставляя разложение  $\xi_r$  в обобщённый ряд Фурье в уравнение (3.9.4), пренебрегая первым членом и членом пропорциональным  $\omega^2$  в квадратных скобках в правой части этого уравнения по сравнению с членом обратно пропорциональным  $r^2$  и учитывая что третий член в левой части этого уравнения пропорциональный  $\nu_v$  нужно учитывать только в диссипативном слое, получим

$$(\omega^2 - \lambda_n) \frac{d(r \xi_{rn})}{dr} = \frac{\Psi_n}{r}. \quad (3.9.51)$$

Из уравнения (3.9.47) следует что  $\delta \xi_r \sim (\ell/R) \xi_r$ . Поскольку анализ в настоящей главе ограничивается только нулевым и первым приближением по



малому параметру  $\ell/R$ , при вычислении  $\delta\xi_r$  достаточно учитывать только главные члены по этому параметру. В частности, можно положить  $\omega \approx \omega_r$  и  $r \approx R$  в уравнении (3.9.51). Обозначим половину толщины диссипативного слоя через  $\varepsilon$ . После этого из уравнения (3.9.51) получим

$$\xi_{rn} = \begin{cases} \xi_{rn}(R - \ell) - \frac{1}{R^2} \int_{R-\ell}^r \frac{\Psi_n(r') dr'}{\lambda_n(r') - \omega_r^2}, & r < r_n - \varepsilon, \\ \xi_{rn}(R) + \frac{1}{R^2} \int_r^R \frac{\Psi_n(r') dr'}{\lambda_n(r') - \omega_r^2}, & r > r_n + \varepsilon. \end{cases}$$

Используя это уравнение для вычисления  $\xi_{rn}(r_n + \varepsilon) - \xi_{rn}(r_n - \varepsilon)$  и полагая  $\varepsilon \rightarrow +0$  находим

$$[\xi_{rn}] = \delta\xi_{rn} + \frac{1}{R^2} \mathcal{P} \int_{R-\ell}^R \frac{\Psi_n(r) dr}{\lambda_n(r) - \omega_r^2},$$

где  $\mathcal{P}$  обозначает главную часть Коши интеграла. Сравнивая это выражение с уравнением (3.9.46) окончательно получаем

$$\delta\xi_{rn} = -\frac{\pi i \Psi_n(r_n)}{R^2 |\Delta_n|} - \frac{1}{R^2} \mathcal{P} \int_{R-\ell}^R \frac{\Psi_n(r) dr}{\lambda_n(r) - \omega_r^2}. \quad (3.9.52)$$

Это выражение было получено в предположении, что  $n$ -ый член является резонансным. Если этот член не резонансный, то диссипативный слой отсутствует и  $[\xi_{rn}] = 0$ . К тому же нет особенности в подынтегральной функции в выражении для  $\delta\xi_{rn}$ . В результате функция  $\xi_{rn}$  упрощается и принимает вид

$$\delta\xi_{rn} = -\frac{1}{R^2} \int_{R-\ell}^R \frac{\Psi_n(r) dr}{\lambda_n(r) - \omega_r^2}. \quad (3.9.53)$$

Изменение  $\xi_r$  поперёк переходной области равно  $\delta\xi_r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta\xi_{rn} W_n(z)$ .

### 3.9.6. Сращивание решений

В настоящем разделе результаты полученные выше используются для того чтобы связать решения во внешней и внутренней областях полученные в 3.9.3.

В начале свяжем решения для давления с помощью соотношения  $P(R) - P(R - \ell) = \delta P$ . Используя уравнения (3.9.15), (3.9.33) и (3.9.50) и пренебрегая членами порядка  $(\ell/R)^2$ , получим что  $A_i(z)$  и  $A_e(z)$  могут быть выражены через одну неизвестную функцию  $A(z)$  в виде

$$A_i(z) = R^{-1}A(z), \quad A_e(z) = RA(z). \quad (3.9.54)$$

Теперь, с помощью уравнений (3.9.15) и (3.9.54) перепишем (3.9.1) во внутренней области в виде

$$\frac{d^2\xi_{ri}}{dz^2} + \frac{\omega^2\xi_{ri}}{V_{Ai}^2} = \frac{A}{\rho_i V_{Ai}^2 R}. \quad (3.9.55)$$

Заметим что все величины в этом уравнении зависят только от  $z$ . Подставляя  $P = (R/r)A(z)$  в (3.9.1) и полагая  $r \rightarrow R + 0$  получим уравнение справедливое при  $r = R$ ,

$$\frac{d^2\xi_{re}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2\xi_{re}}{V_{Ae}^2} = \frac{-A}{\rho_e V_{Ae}^2 R}, \quad (3.9.56)$$

где  $\xi_{re} = \xi_r(R)$ . Используя соотношение  $\xi_{re} = \xi_{ri} + \delta\xi_r$  перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2\xi_{ri}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{V_{Ae}^2}\xi_{ri} = \frac{-A}{\rho_e V_{Ae}^2 R} - \frac{d^2\delta\xi_r}{dz^2} - \frac{\omega^2}{V_{Ae}^2}\delta\xi_r. \quad (3.9.57)$$

Вычитая (3.9.55) из (3.9.57) получим

$$\xi_{ri} = \frac{1}{\omega^2(\rho_i - \rho_e)} \left( \rho V_A^2 \frac{d^2\delta\xi_r}{dz^2} + \rho_e \omega^2 \delta\xi_r - \frac{2A}{R} \right). \quad (3.9.58)$$

При выводе этого уравнения был использован тот факт, что  $\rho V_A^2 = \text{const.}$  Умножим теперь уравнение (3.9.55) на  $V_{Ai}^2$ , уравнение (3.9.57) на  $V_{Ae}^2$  и вычтем первое из полученных уравнений из второго. В результате получим

$$\frac{d^2\xi_{ri}}{dz^2} = \frac{-1}{\rho_i - \rho_e} \left( \frac{(\rho_i + \rho_e)}{\rho V_A^2 R} A + \rho_i \frac{d^2\delta\xi_r}{dz^2} + \frac{\rho_e \omega^2}{V_{Ai}^2} \delta\xi_r \right). \quad (3.9.59)$$

Дважды дифференцируя уравнение (3.9.58) по  $z$  и сравнивая результат с уравнением (3.9.59) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{dz^2} + \frac{\omega^2}{C_k^2}Q &= -\frac{\omega^2 R}{2} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\rho V_A^2}{\omega^2(\rho_i - \rho_e)} \frac{d^2\delta\xi_r}{dz^2} + \frac{\rho_e \delta\xi_r}{\rho_i - \rho_e} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_i - \rho_e} \left( \rho_i \frac{d^2\delta\xi_r}{dz^2} + \frac{\rho_e \omega^2}{V_{Ai}^2} \delta\xi_r \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.9.60)$$

где

$$Q = \frac{A}{\rho_i - \rho_e}, \quad C_k^2 = \frac{2B^2}{\mu_0(\rho_i + \rho_e)} = \frac{2\zeta V_{Ai}^2}{\zeta + 1}. \quad (3.9.61)$$

Из предположения что  $\rho(r, z) = f(r)\rho_i(z)$  следует равенство  $C_k = V_A(r_c)$ , где  $r_c$  определяется выражением

$$f(r_c) = \frac{\zeta + 1}{2\zeta}. \quad (3.9.62)$$

Уравнение (3.9.60) является основным в настоящей главе. Оно содержит всю информацию о частотах и декрементах колебаний, а также всю информацию о собственных функциях. Это уравнение будет решено методом регулярных возмущений с использованием разложений по малому параметру  $\ell/R$ ,

$$Q = Q_0 + (\ell/R)Q_1 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + (\ell/R)\omega_1 + \dots \quad (3.9.63)$$

### 3.9.6а. Нулевое приближение

С помощью уравнения (3.9.47) легко показать что отношение правой части уравнения (3.9.60) к его левой части порядка  $\ell/R$ . После этого, подставляя разложения (3.9.63) в (3.9.60), сохраняя только члены нулевого порядка и учитывая граничные условия (3.9.6), получим что  $Q_0$  и  $\omega_0$  определяются задачей Штурма-Лиувилля

$$C_k^2 \frac{d^2 Q_0}{dz^2} = -\omega_0^2 Q_0, \quad Q_0(0) = Q_0(L) = 0. \quad (3.9.64)$$

Эта задача совпадает, с точностью до обозначений, с задачей на собственные значения для изгибных колебаний трубки с резкой границей определяемой уравнением (2.2.67) с граничными условиями (3.2.1) которая рассматривалась в главе 3.2. Это вполне ожидаемый результат поскольку в нулевом приближении отбрасываем члены порядка  $\ell/R$ , что эквивалентно пренебрежению эффектами связанными с переходным слоем  $R - \ell < r < R$ .

Интересно также отметить что, с точностью до обозначений, задача Штурма-Лиувилля (3.9.64) совпадает с задачей Штурма-Лиувилля (3.9.7), так что всё сказанное о задаче (3.9.7) верно также и для задачи (3.9.64). В частности, все собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (3.9.64) положительны. Поскольку  $C_k = V_A(r_c)$ , из уравнений (3.9.11) и (3.9.61) следует что  $n$ -ое собственное значение задачи (3.9.64),  $\omega_{0n}^2$ , даётся выражением

$$\omega_{0n}^2 = \frac{\lambda_n(R - \ell)}{f(r_c)}, \quad (3.9.65)$$

так что можно положить  $Q_{0n} = qW_n$ , где  $Q_{0n}$  — собственная функция соответствующая собственному значению  $\omega_{0n}^2$ , а  $q$  — произвольная ненулевая постоянная с размерностью  $m^{7/2} c^3$  введённая для того чтобы получить правильную размерность  $m^2 c^{-2}$  для  $Q$ .

Теперь можно доказать высказанное в разделе 3.9.3 *a priori* предположение что  $\chi_1^2 > 0$ . Докажем что фундаментальная мода колебаний магнитной трубки является захваченной. В том случае когда невозмущённое состояние симметрично по отношению к вершине петли, т.е.  $\rho(L/2-z) = \rho(z)$ , представленное ниже доказательство справедливо также и для первого обертона. Итак, рассмотрим фундаментальную моду колебаний и положим  $\omega_r = \omega_{01}$  в уравнении (3.9.19). Поскольку  $\omega_{01}^2$  является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (3.9.7) с соответствующей собственной функцией  $qW_1$  при  $r = r_c$ , можно использовать уравнение (3.9.7) для того чтобы выразить  $\omega_{01}^2$  через  $W_1$ ,

$$\omega_{01}^2 = -\frac{C_k^2}{W_1} \frac{d^2 W_1}{dz^2}. \quad (3.9.66)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.9.19) и используя равенство  $C_k^2/V_{Ae}^2 = 1/\zeta f_c$ , где  $f_c = f(r_c)$ , преобразуем уравнение (3.9.19) к виду

$$W_1 \frac{d^2 G_1}{dz^2} - \frac{G_1}{\zeta f_c} \frac{d^2 W_1}{dz^2} = -\chi_1^2 G_1 W_1, \quad (3.9.67)$$

где  $G_1$  — собственная функция соответствующая собственному значению  $\chi_1^2$ . Поделив это уравнение на  $W_1$  и умножив на  $G_1$  преобразуем его к виду

$$\left(1 - \frac{1}{\zeta f_c}\right) G_1 \frac{d^2 G_1}{dz^2} + \frac{G_1}{\zeta f_c W_1} \frac{d}{dz} \left[ W_1^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{G_1}{W_1} \right) \right] = -\chi_1^2 G_1^2. \quad (3.9.68)$$

В соответствии с общей теорией задачи Штурма-Лиувилля функции  $W_1(z)$  и  $G_1(z)$  имеют простые нули при  $z = 0$  и  $x = L$ , и не имеют нулей в интервале  $(0, L)$ . Это означает что функция  $G_1/W_1$  регулярна на отрезке  $[0, L]$ . Интегрируя уравнение (3.9.68) от 0 до  $L$  и используя интегрирование по частям и граничные условия  $G_1(0) = G_1(L) = W_1(0) = W_1(L) = 0$  получим

$$\chi_1^2 \int_0^L G_1^2 dz = \left(1 - \frac{1}{\zeta f_c}\right) \int_0^L \left( \frac{dG_1}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{\zeta f_c} \int_0^L W_1 \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{G_1}{W_1} \right) \right]^2 dz. \quad (3.9.69)$$

Поскольку  $1 < \zeta f_c$ , из этого уравнения следует что  $\chi_1^2 > 0$ , т.е. фундаментальная мода является захваченной. В том случае когда невозмущённое состояние симметрично относительно вершины петли,  $\rho(L/2 - z) = \rho(z)$ , функция  $W_n$  является чётной функцией переменной  $z' = z - L/2$  когда  $n$  —

нечётное число, и тоже самое верно для функции  $G_n$ . Это означает что разложение (3.9.20) для первого обертона содержит только члены с нечётными номерами. Следовательно, первый обертон является захваченным если  $\chi_2^2 > 0$ . После этого, повторяя вычисления проделанные в случае фундаментальной моды, получим уравнение аналогичное уравнению (3.9.68), но с  $W_2$ ,  $G_2$  и  $\chi_2$  подставленными, соответственно, вместо  $W_1$ ,  $G_1$  и  $\chi_1$ . Функция  $W_2(z)$  имеет простой ноль при  $z = L/2$ . Поскольку  $G_2$  — нечётная функция переменной  $z' = z - L/2$ ,  $G_2(L/2) = 0$  и  $G_2/W_2$  — регулярная функция на отрезке  $[0, L]$ . Таким образом, полученное уравнение можно проинтегрировать от 0 до  $L$ . В результате получим уравнение аналогичное уравнению (3.9.68) но с  $W_2$ ,  $G_2$  и  $\chi_2$  подставленными, соответственно, вместо  $W_1$ ,  $G_1$  и  $\chi_1$ . Это уравнение показывает что  $\chi_2^2 > 0$ , так что первый обертон является захваченной модой.

Что касается обертонов более высокого порядка, а также первого обертона в случае несимметричного невозмущённого состояния, то, по-видимому, они могут быть радиационными модами даже когда  $\rho_i(z) > \rho_e(z)$  при  $z \in [0, L]$ . Эта проблема требует дальнейшего исследования.

### 3.9.6b. Первое приближение

В первом приближении собираем члены порядка  $\ell/R$  в уравнении (3.9.60). В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1}{dz^2} + \frac{\omega_0^2}{C_k^2} Q_1 = & -\frac{\omega_0^2 R^2}{2\ell} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{\rho V_A^2}{\omega_0^2 (\rho_i - \rho_e)} \frac{d^2 \delta \xi_r}{dz^2} + \frac{\rho_e \delta \xi_r}{\rho_i - \rho_e} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho_i - \rho_e} \left( \rho_i \frac{d^2 \delta \xi_r}{dz^2} + \frac{\rho_e \omega_0^2}{V_{Ai}^2} \delta \xi_r \right) \right\} - \frac{2\omega_0 \omega_1}{C_k^2} Q_0. \end{aligned} \quad (3.9.70)$$

Умножая это уравнение на  $Q_0$ , интегрируя от 0 до  $L$  и используя интегрирование по частям, уравнение (3.9.64), граничные условия  $Q_0(0) = Q_0(L) = Q_1(0) = Q_1(L) = \delta \xi_r(0) = \delta \xi_r(L) = 0$  и граничные условия  $d^2 \delta \xi_r / dz^2 = 0$  при  $z = 0, L$  которые следуют из уравнений (3.9.1), (3.9.5) и (3.9.6), получим

$$\begin{aligned} \omega_1 \int_0^L \frac{Q_0^2}{C_k^2} dz = & -\frac{\omega_0 R^2}{4\ell} \int_0^L \frac{Q_0}{\rho_i - \rho_e} \left\{ \left( \rho_i - \frac{\rho V_A^2}{C_k^2} \right) \frac{d^2 \delta \xi_r}{dz^2} \right. \\ & \left. + \omega_0^2 \left( \frac{\rho_e}{V_{Ai}^2} - \frac{\rho_e}{C_k^2} \right) \delta \xi_r \right\} dz. \end{aligned} \quad (3.9.71)$$

Интегрируя интеграл в правой части по частям с учётом (3.9.61) и (3.9.64) и равенства  $\rho_i/\rho_e = \zeta$  находим

$$\omega_1 \int_0^L \frac{Q_0^2}{V_{Ai}^2} dz = \frac{\omega_0^3 R^2 (\zeta - 1)}{8\ell(\zeta + 1)} \int_0^L \frac{Q_0}{V_{Ai}^2} \delta\xi_r dz. \quad (3.9.72)$$

Рассмотрим  $n$ -ую моду колебаний трубки и положим  $\omega_0 = \omega_{0n}$ . Тогда  $Q_0 = qW_n$ . Поскольку  $V_A^2 = V_{Ai}^2/f(r)$ , можно подставить  $V_{Ai}^2$  вместо  $V_A^2$  в уравнение (3.9.9). После этого, подставляя разложение  $\delta\xi_r$  (3.9.8) в уравнение (3.9.72) и используя (3.9.9) и (3.9.12), преобразуем уравнение (3.9.72) к виду

$$\omega_{1n} = \frac{\omega_0^2 R^2 (\zeta - 1)}{8q\ell(\zeta + 1)} \delta\xi_{rn}. \quad (3.9.73)$$

В соответствии с равенствами (3.9.11) и (3.9.65) находим  $\lambda_n(r_c) = \omega_0^2$ , так что  $r_n = r_c$ ,  $\delta\xi_{rn}$  является резонансным членом в разложении  $\delta\xi_r$  в обобщённый ряд Фурье и, следовательно, необходимо использовать выражение (3.9.52) для  $\delta\xi_{rn}$ .

Действительная часть  $\omega_1$  даёт только небольшую поправку к  $\omega_0$  которой можно пренебречь и положить  $\omega_r = \omega_0$ . С другой стороны, мнимая часть  $\omega_1$  очень важна поскольку она определяет скорость затухания колебаний вследствие резонансного поглощения,  $\gamma = -(\ell/R)\Im(\omega_1)$ , где, как и прежде,  $\Im$  обозначает мнимую часть величины. Таким образом, в дальнейшем сконцентрируемся на вычислении мнимой части  $\omega_1$ .

Начнём вывод выражения для декремента  $n$ -ой моды,  $\gamma_n$ , с вычисления  $\Psi_n(r_c)$ . В соответствии с уравнением (3.9.13)

$$\Psi_n(r_c) = \int_0^L \frac{P(r_c, z)W_n(z)}{\rho(r_c, z)V_{Ai}^2(z)} dz. \quad (3.9.74)$$

Используя уравнения (3.9.15) и (3.9.54) и пренебрегая членами порядка  $\ell/R$  получим  $P(r_c, z) = A(z)$ . После этого, с помощью уравнения (3.9.61) находим

$$P(r_c, z) = Q_0(\rho_i - \rho_e) = q(1 - 1/\zeta)\rho_i(z)W_n(z).$$

Используя равенство (3.9.62) получим

$$\rho(r_c, z) = f(r_c)\rho_i(z) = \frac{1}{2}(1 + 1/\zeta)\rho_i(z).$$

Подставляя выражения для  $P(r_c, z)$  и  $\rho(r_c, z)$  в уравнение (3.9.74) и используя условие нормализации (3.9.12) получаем

$$\Psi_n(r_c) = 2q \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}. \quad (3.9.75)$$

Используя уравнения (3.9.52), (3.9.73) и (3.9.75), окончательно находим выражение для декремента  $n$ -ой моды,

$$\gamma_n = \frac{\pi\omega_{0n}^3(\zeta - 1)^2}{4R|\Delta_n|(\zeta + 1)^2}. \quad (3.9.76)$$

Интересно отметить что, несмотря на то что может быть не один а несколько резонансных членов в разложении  $\xi_r$  в обобщённый ряд Фурье, вследствие условия ортогональности (3.9.9) только  $n$ -ый член даёт вклад в выражение для  $\gamma_n$ . Также интересно что выражение (3.9.76) в точности совпадает с выражением для декремента полученным в предыдущей главе для трубки однородной в аксиальном направлении (см. уравнение (3.8.73)) если заметить что в последнем  $\rho_A = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_e)$ .

Используя равенство  $r_n = r_c$  и уравнения (3.9.11) и (3.9.65) получим  $\Delta_n = \omega_{0n}^2 f'(r_c)/f(r_c)$ , где штрих обозначает производную по  $r$ . Подставляя это выражение в (3.9.76) преобразуем его к виду

$$\frac{\gamma_n}{\omega_{0n}} = \frac{\pi(\zeta - 1)^2 f(r_c)}{4R(\zeta + 1)^2 f'(r_c)}. \quad (3.9.77)$$

Поскольку  $f'(r_c)/f(r_c) \sim 1/\ell$ ,  $\gamma_n/\omega_{0n} \sim \ell/R$  как и должно быть.

### 3.9.7. Приложение к изгибным колебаниям корональных петель

В этом разделе рассматривается приложение теоретических результатов полученных в предыдущих разделах к изгибным колебаниям корональных петель. На основе численного моделирования Andries et al. (2005b) пришли к заключению, что частота изгибных колебаний корональных петель и скорость их затухания в основном определяются полной массой плазмы внутри петли и отношением плотностей в вершине и у основания петли,  $\rho_a/\rho_f$ , а зависимость этих величин от детального распределения плотности вдоль петли довольно слабая. Хотя Andries et al. (2005b) пришли к этому заключению на основе довольно ограниченной серии вычислений, оно выглядит достаточно реалистичным. Если принять что это заключение верно, то можно выбирать  $\rho_i(z)$  более или менее произвольно предполагая только что эта функция выпукла вниз, т.е. её вторая производная положительна, и  $\rho_i(0) = \rho_i(L)$ . В дальнейшем выберем такую функцию  $\rho_i(z)$  чтобы можно было получить аналитическое решение задачи Штурма-Лиувилля (3.9.64). Один возможный выбор это

$$\rho_i(z) = \frac{\rho_a}{\{1 - (1 - \kappa)(2z/L - 1)^2\}^2}, \quad (3.9.78)$$

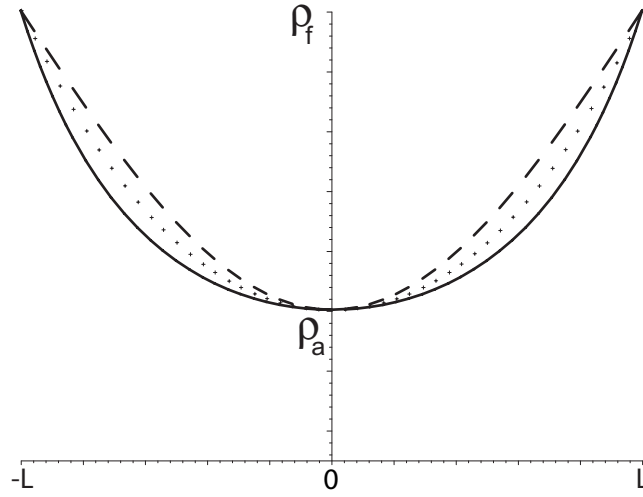


Рис. 3.9.1. Зависимость плотности в петле от координаты вдоль петли,  $\rho_i(z)$ . Сплошная кривая показывает зависимость плотности определяемой уравнением (3.9.78). Штриховая и точечная линии показывают, соответственно, синусоидальный профиль использованный в работе Andries et al. (2005b) и профиль плотности в полукруглой петле погружённой в изотермическую атмосферу.

где  $\rho_a = \rho_i(0)$ ,  $\rho_f = \rho_i(L) = \rho_i(0)$  и  $\kappa = (\rho_a/\rho_f)^{1/2}$ . Зависимость плотности от координаты вдоль оси петли определяемая уравнением (3.9.78) показана на Рис. 3.9.1 сплошной линией. Штриховая линия показывает зависимость плотности от координаты вдоль петли использованную в работе Andries et al. (2005b),  $\rho_i(z) = \rho_f[1 - (1 - \kappa^2) \cos(\pi z/2L)]$ . Точечная линия показывает зависимость плотности от координаты вдоль петли в полукруглой петле в изотермической атмосфере,  $\rho_i(z) = \rho_f \exp[2(\ln \kappa) \cos(\pi z/2L)]$ . Как видим, три профиля отличаются не слишком сильно. Таким образом, можно надеяться что собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (3.9.64) почти одинаковы для всех трёх профилей с одним и тем же значением  $\kappa$  и одной и той же массой плазмы внутри петли.

Для того чтобы задать зависимость плотности от радиальной координаты необходимо определить функцию  $f(r)$ . Выберем ту же зависимость плотности от радиальной координаты что в разделе 3.8.5 предыдущей главы и положим

$$f(r) = \frac{1}{2\zeta} \left\{ \zeta + 1 - (\zeta - 1) \sin \frac{\pi(2r + \ell - 2R)}{2\ell} \right\}. \quad (3.9.79)$$

Локальная фазовая скорость изгибных колебаний в магнитной трубке с плотностью внутри трубки определяемой уравнением (3.9.78) даётся выражением

$$C_k(z) = \frac{B_0 \sqrt{2\zeta} \{1 - (1 - \kappa)(2z/L - 1)^2\}}{[\mu_0 \rho_a (\zeta + 1)]^{1/2}}. \quad (3.9.80)$$



После замены  $z = z' + L/2$  получим выражение совпадающее, с точностью до обозначений, с выражением (3.2.3). В разделе 3.2.2 было показано что волновое уравнение с локальной фазовой скоростью определяемой уравнением (3.2.3) сводится к уравнению Клейна-Гордона с постоянными коэффициентами. В частности, были найдены решения волнового уравнения в виде стоячих волн которые, фактически, являются решениями задачи Штурма-Лиувилля которая, с точностью до обозначений, совпадает с уравнением (3.9.64). Таким образом, в принципе, решение задачи Штурма-Лиувилля (3.9.64) можно получить непосредственно используя результаты полученные в разделе 3.2.2. Однако представляется что проще получить решение Штурма-Лиувилля (3.9.64) напрямую.

Задача Штурма-Лиувилля (3.9.64) с плотностью внутри трубки определяемой уравнением (3.9.78) принимает вид

$$\frac{d^2 Q_0}{dz^2} + \frac{\mu_0 \rho_a \omega_0^2 (\zeta + 1)}{2\zeta B^2 \{1 - (1 - \kappa)(2z/L - 1)^2\}^2} Q_0 = 0, \quad Q_0(0) = Q_0(L) = 0. \quad (3.9.81)$$

Общее решение этой уравнения (3.9.81) записывается в виде (Зайцев и Полянин 2001)

$$Q_0 = \sqrt{1 - (1 - \kappa)(z/L)^2} (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi), \quad (3.9.82)$$

где

$$\xi = \alpha \ln \frac{L + (2z - L)\sqrt{1 - \kappa}}{L - (2z - L)\sqrt{1 - \kappa}}, \quad \alpha^2 = \left( \frac{\mu_0 \rho_a \omega_0^2 L^2 (\zeta + 1)}{32\zeta B_0^2 (1 - \kappa)} - \frac{1}{4} \right), \quad (3.9.83)$$

где  $C_1$  and  $C_2$  – произвольные постоянные. Граничные условия  $Q_0(0) = Q_0(L) = 0$  удовлетворяются когда или  $C_2 = 0$  и  $\cos \xi_0 = 0$ , или  $C_1 = 0$  и  $\sin \xi_0 = 0$ , где  $\xi_0 = \xi(L)$ . Первое условие соответствует чётным модам, т.е. модам удовлетворяющим условию  $Q_0(L/2 - z) = Q_0(L/2 + z)$ , а второе – нечётным модам, т.е. модам удовлетворяющим условию  $Q_0(L/2 - z) = -Q_0(L/2 + z)$ . После этого получаем что частоты чётных и нечётных мод даются, соответственно, уравнениями (3.2.10) и (3.2.11), в которых величины  $\chi$  и  $C_f$  выражаются через параметры введённые в настоящей главе формулами

$$\chi = \frac{1}{1 - \kappa}, \quad C_f^2 = \frac{2\zeta \kappa^2 B_0^2}{\mu_0 \rho_a (\zeta + 1)}. \quad (3.9.84)$$

Частоты фундаментальной моды и первого обертона определяются, соответственно, уравнениями (3.9.83) и (3.9.84) с  $n = 1$ . Легко показать что,

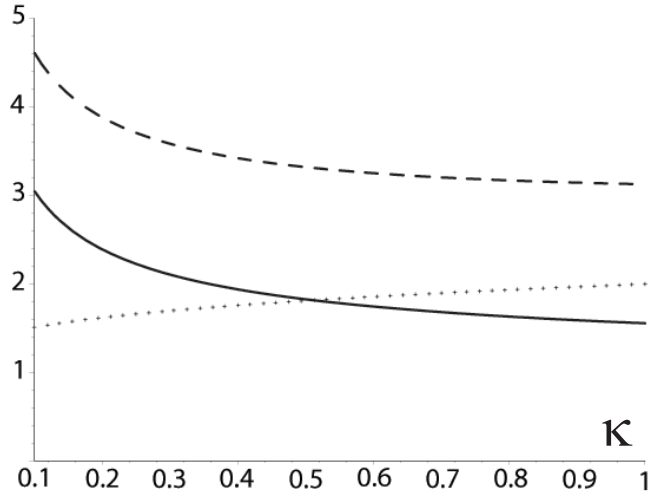


Рис. 3.9.2. Сплотшная и штриховая линии показывают зависимость от  $\kappa$ , соответственно, безразмерной фундаментальной моды,  $\Omega_n^e$ , и первого обертона,  $\Omega_n^o$ . Точечная линия показывает зависимость отношения частот первого обертона и фундаментальной моды,  $\omega_{01}^o/\omega_{01}^e$ , от  $\kappa$ .

если  $\kappa \rightarrow 1$  (предел в котором плотность не меняется вдоль петли), то уравнения (3.9.83) и (3.9.84) дают знакомые выражения для чётных мод,  $\omega_{0n}^e = \pi C_k(2n - 1)/2L$ , и нечётных мод,  $\omega_{0n}^i = \pi C_k n/L$ . На Рис. 3.9.2 показана зависимость безразмерных частот

$$\Omega_n^{e,o} = \frac{\omega_{0n}^{e,o} L \sqrt{\mu_0 \rho_a (1 + \chi)}}{2B_0} \sqrt{\frac{\chi}{1 + \chi} + \frac{\sqrt{\chi}}{2} \ln \frac{\sqrt{\chi} + 1}{\sqrt{\chi} - 1}}$$

для фундаментальной моды и первого обертона. Отношение частот первого обертона и фундаментальной моды определяется формулой

$$\frac{\omega_{01}^o}{\omega_{01}^e} = \sqrt{\frac{4\pi^2 + [\ln(\sqrt{\kappa} + 1) - \ln(\sqrt{\kappa} - 1)]^2}{\pi^2 + [\ln(\sqrt{\kappa} + 1) - \ln(\sqrt{\kappa} - 1)]^2}}. \quad (3.9.85)$$

Зависимость отношения частот первого обертона и фундаментальной моды от  $\kappa$  показана на Рис. 3.9.2.

С помощью уравнений (3.2.10) и (3.2.11) получим  $r_c = R + \ell/2$  и  $f'(r_c)/f(r_c) = \ell(\zeta + 1)/(\zeta - 1)$ . Подставляя это выражение в (3.9.77) перепишем его в виде

$$\frac{\gamma_n}{\omega_{0n}} = \frac{\pi \ell (\zeta - 1)}{4R(\zeta + 1)}. \quad (3.9.86)$$

С точностью до обозначений это выражение в точности совпадает с уравнением (3.8.91) полученным в предыдущей главе в случае магнитной трубки с постоянной плотностью.

Как видим, отношение декремента к частоте колебаний не зависит от изменения плотности от координаты вдоль магнитной трубки. Отме-

тим что аналогичный результат был получен численно в работе Andries et al. (2005b). Andries et al. (2005b) получили этот результат для частного случая когда плотность меняется линейно внутри переходного слоя. Аналитическое исследование представленное в данной главе показывает что он верен при любой зависимости плотности от радиальной координаты в переходном слое. Единственным существенным условием является условие однородной стратификации, т.е. зависимость плотности от координаты вдоль магнитной трубки одна и та же при любом фиксированном радиусе. Конечно это предположение является приближением. В реальных корональных петлях зависимость плотности от продольной координаты внутри петли должна отличаться от зависимости в окружающей плазме, в основном, потому что обычно плазма внутри петли горячее чем окружающая плазма. Однако можно надеяться что отклонение от однородной стратификации невелика, так что вывод что отношение декремента к частоте колебаний не зависит от стратификации приближённо верен. На основании этого вывода можно утверждать что наблюдение затухания изгибных колебаний корональных петель может дать важную информацию о радиальной зависимости плотности внутри петли, но на основании этих наблюдений нельзя сделать никаких заключений об изменении плотности вдоль петли.

Для сравнения результатов полученных в данной главе с результатами полученными в работе Andries et al. (2005b) была решена задача Штурма-Лиувилля (3.9.64) с синусоидальным профилем плотности использованным в работе Andries et al. В этом случае решение уравнения (3.9.64) может быть выражено через функции Матье. С помощью этого решения была численно найдена зависимость частоты фундаментальной моды от  $\kappa$ . Было найдено что отличие от результатов полученные в работе Andries et al. не превышает двух процентов. Это сравнение показывает что асимптотическая теория представленная в настоящей главе является весьма акуратной.

### 3.9.8. Выводы

В этой главе рассмотрено затухание изгибных колебаний корональных петель. Как и в предыдущей главе анализ был проведён в приближении холодной плазмы, а также в приближении тонкой трубки и тонкого переходного слоя. Плотность плазмы изменяется как вдоль трубки так и в ради-

альном направлении. Приближение тонкого переходного слоя означает что изменение плотности в радиальном направлении происходит только в тонком слое у границы трубки с толщиной  $\ell$  много меньшей радиуса сечения трубки  $R$ . Наконец, сделано предположение однородной стратификации. Оно означает что отношение плотности внутри и вне трубки постоянно, а отношение плотности внутри переходного слоя к плотности внутри трубки зависит только от радиуса.

Показано что, в нулевом приближении по малому параметру  $\ell/R$ , действительная часть частоты колебаний является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (3.9.64). Декремент колебаний вычисляется в следующем приближении по  $\ell/R$ . Отношение декремента к частоте колебаний порядка  $\ell/R$ . Оно оказывается в точности таким же как и в случае трубки с плотностью не меняющейся вдоль трубки. Этот результат является прямым следствием предположения об однородной стратификации. Поскольку декремент вычислен в главном приближении по малому параметру  $\ell/R$ , можно ожидать что точность полученного результата не слишком велика. Однако сравнение с численными результатами полученными в работе Van Doorselaere et al. (2004) для нестратифицированных трубок показывает что точность аналитического вычисления декремента очень хорошая при  $\ell/R \leq 0.4$  и достаточно хорошая при  $0.4 < \ell/R \leq 0.6$ . Таким образом, аналитический результат является приемлемым для практически всех возможных значений параметра  $\ell/R$ .

Для приложения теоретических результатов к колебаниям корональных петель было исследовано колебание петель с плотностью соответствующей квадратичной зависимости фазовой скорости изгибных колебаний от координаты вдоль петли. Для такой зависимости плотности частоты собственных мод колебаний были вычислены аналитически. Были определены частоты фундаментальной моды и первого обертона, а также их отношение. После этого, на основе одновременных наблюдений фундаментальной моды и первого обертона, были найдены оценки шкалы высот в короне. Сравнение с оценками полученными на основе модели полукруглой петли находящейся в изотермической атмосфере показывает что оценка шкалы высот существенно зависит от использованной модели корональной петли.

### 3.10. Резонансное затухание изгибных колебаний двух параллельных магнитных трубок

В этой главе продолжим исследование изгибных колебаний двух параллельных магнитных трубок начатое в главе 3.6 и изучим резонансное затухание этих колебаний. Это исследование было представлено в работе Robertson and Ruderman (2011). В дальнейшем следуем этой работе.

#### 3.10.1. Постановка задачи

В настоящей главе используется модель аналогичная той что была предложена в главе 3.6. Единственным отличием является то что две трубки не имеют резких границ. Вместо этого переход от высокой плотности внутри трубок к низкой в окружающей плазме происходит в узких переходных областях. Толщина переходного слоя у левой трубки равна  $\ell_L$ , а у правой  $\ell_R$ . Таким образом, невозмущённая плотность определяется уравнением

$$\rho_0 = \begin{cases} \rho_L, & \tau < -\tau_L - \ell_L, \\ \bar{\rho}_L(\tau), & -\tau_L - \ell_L \leq \tau \leq -\tau_L, \\ \rho_e, & -\tau_L < \tau < \tau_R, \\ \bar{\rho}_R(\tau), & \tau_R \leq \tau \leq \tau_R + \ell_R, \\ \rho_R, & \tau > \tau_R + \ell_R, \end{cases} \quad (3.10.1)$$

где  $\bar{\rho}_L(\tau)$  является монотонно убывающей, а  $\bar{\rho}_R(\tau)$  — монотонно возрастающей функцией,  $\bar{\rho}_L(-\tau_L - \ell_L) = \rho_L$ ,  $\bar{\rho}_L(-\tau_L) = \rho_e$ ,  $\bar{\rho}_R(\tau_R) = \rho_e$  и  $\bar{\rho}_R(\tau_R + \ell_R) = \rho_R$ . Внутренние границы левой и правой магнитных трубок определяются, соответственно, уравнениями  $\tau = -\tau_L - \ell_L$  и  $\tau = \tau_R + \ell_R$ . Невозмущённое состояние показано на Рис. 3.10.1. В дальнейшем используем те же бицилиндрические координаты  $\tau$ ,  $\sigma$ ,  $z$  что и в главе 3.6. Заметим что невозмущённая плотность не зависит от  $z$ . Также как и в главе 3.6 предполагается что магнитные линии заморожены в плотную фотосферную плазму и смещение плазмы удовлетворяет граничным условиям (3.6.1).

Поскольку в диссипативных слоях окружающих резонансные поверхности важна диссипация, вместо первого уравнения (3.3.1) используется уравнение движения учитывающее вязкость,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0 + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla(\tilde{\eta} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - \nabla \times (\tilde{\eta} \nabla \times \boldsymbol{\xi})], \quad (3.10.2)$$

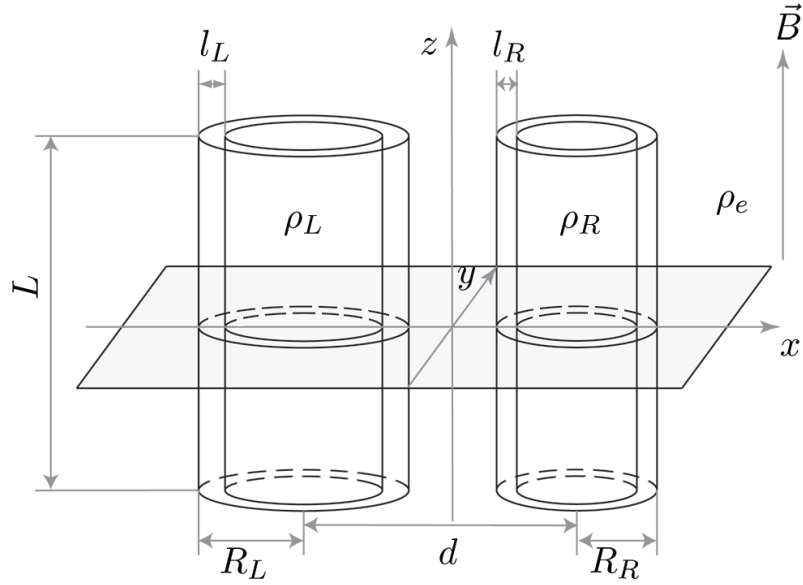


Рис. 3.10.1. Равновесие с двумя параллельными магнитными трубками с тонкими переходными областями.

где  $\tilde{\eta} = \rho_0 \nu_v$  — динамический коэффициент вязкости. Остальные обозначения те же что и в главе 3.6.

### 3.10.2. Вывод выражения для декремента

В этом разделе выводится выражение для декремента. Для этого решаются линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики отдельно во внешней и внутренних областях магнитных трубок и в кольцевых переходных областях, а затем эти решения сращиваются.

Преобразуем уравнение (3.10.2) и второе уравнение (3.3.1). Сначала перепишем их в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla P + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla(\tilde{\eta} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - \nabla \times (\tilde{\eta} \nabla \times \boldsymbol{\xi})], \quad (3.10.3)$$

$$\mathbf{b} = B_0 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial z} - \mathbf{B}_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (3.10.4)$$

где, как и прежде,  $P = \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}_0 / \mu_0$  — возмущение магнитного давления. Вязкостью можно пренебречь везде кроме диссипативного слоя где имеются большие градиенты в направлении координаты  $\tau$ . Это, в частности, означает что можно пренебречь производными величины  $\tilde{\eta}$  по сравнению с производными переменной  $\boldsymbol{\xi}$ . Таким образом, можно использовать приближённое соотношение

$$\nabla(\tilde{\eta} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - \nabla \times (\tilde{\eta} \nabla \times \boldsymbol{\xi}) \approx \tilde{\eta} \nabla^2 \boldsymbol{\xi}. \quad (3.10.5)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.10.3) получим  $\xi_z = 0$ , т.е.  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_\perp$ . Учитывая этот результат, подставляя (3.10.4) в (3.10.3) и используя (3.10.5) преобразуем уравнение (3.10.3) к виду

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu_v \nabla^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}, \quad (3.10.6)$$

где, как и прежде,  $V_A^2 = B_0^2 / \mu_0 \rho_0$  — квадрат альвеновской скорости. Умножив обе части уравнения (3.10.4) скалярно на вектор  $\mathbf{B}_0$  получим

$$P = -\rho_0 V_A^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (3.10.7)$$

Поскольку коэффициенты уравнений (3.10.6) и (3.10.7) не зависят от  $z$ , можно сделать их преобразование Фурье по переменной  $z$ . В дальнейшем рассматриваем только фундаментальную моду по отношению к  $z$ . Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (3.6.1) положим вектор  $\boldsymbol{\xi}$  пропорциональным  $\cos(\pi z/L)$ . После этого из уравнения (3.10.7) следует что  $P$  пропорционально  $\cos(\pi z/L)$ . В дальнейшем отыскиваем решения в виде собственных мод диссипативной МГД и полагаем что  $\boldsymbol{\xi}$  и  $P$  пропорциональны  $\exp(-i\omega t)$  с комплексным  $\omega$ . В результате уравнение (3.10.6) приводится к виду

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{\rho_0} \nabla P + i\omega \nu_v \nabla^2 \boldsymbol{\xi}, \quad (3.10.8)$$

где  $k = \pi/L$ . Уравнение (3.10.7) не изменяется.

Запишем уравнения (3.10.7) и (3.10.8) в бицилиндрических координатах  $\tau, \sigma, z$ . В этих координатах  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_\tau, \xi_\sigma, 0)$ . В дальнейшем используем формулы (3.6.6) и (3.6.7) для  $\nabla f$  и  $\nabla^2 f$ , а также

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g} = & \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{g_\tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{g_\sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \right) \right] + \frac{\partial g_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.10.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{g} = & \mathbf{e}_\tau \left( \frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{a} \frac{\partial g_z}{\partial \sigma} - \frac{\partial g_\sigma}{\partial z} \right) \\ & - \mathbf{e}_\sigma \left( \frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{a} \frac{\partial g_z}{\partial \tau} - \frac{\partial g_\tau}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{a} \\ & \times \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{g_\sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{g_\tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.10.10)$$

(см. напр. Korn and Korn 1961). Здесь  $f$  и  $\mathbf{g}$  — произвольные скалярная и векторная функции, а  $\mathbf{e}_\tau$  и  $\mathbf{e}_\sigma$  — единичные векторы, соответственно, в направлениях  $\tau$  и  $\sigma$ . Используя тождество  $\nabla^2 \boldsymbol{\xi} = \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\xi}$  и уравнения (3.6.6), (3.10.9) и (3.10.10) нетрудно получить выражение для  $\nabla^2 \boldsymbol{\xi}$ . Повторим что вязкость важна только в тонком диссипативном слое охватывающем резонансную магнитную поверхность. В этом слое большие градиенты присутствуют только в направлении  $\tau$ . Этот факт позволяет пренебречь в выражении для  $\nabla^2 \boldsymbol{\xi}$  всеми членами кроме членов пропорциональных второй производной вектора  $\boldsymbol{\xi}$  по  $\tau$ . В результате получим приближённое выражение

$$\nabla^2 \boldsymbol{\xi} \approx \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial \tau^2}. \quad (3.10.11)$$

В пределе очень малой вязкости декремент резонансного затухания не зависит от величины  $\tilde{\eta}$  (см. напр. раздел 3.8.3). В частности, можно принять любую зависимость  $\tilde{\eta}$  от  $\tau$  и  $\sigma$  при одном ограничении что характерный масштаб изменения  $\tilde{\eta}$  в направлении  $\tau$  много больше чем толщина диссипативного слоя. Для того чтобы максимально упростить вычисления положим

$$\tilde{\eta} = \frac{\rho(\tau)\varsigma}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}, \quad (3.10.12)$$

где  $\varsigma$  является постоянной. Теперь запишем систему уравнений (3.10.7) и (3.10.8) в компонентах,

$$P = -\frac{1}{a} \rho V_A^2 (\cosh \tau - \cos \sigma)^2 \times \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\boldsymbol{\xi}_\tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\boldsymbol{\xi}_\sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} \right) \right], \quad (3.10.13)$$

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) \boldsymbol{\xi}_\tau = \frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{a \rho} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{i \omega \varsigma}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_\tau}{\partial \tau^2}, \quad (3.10.14)$$

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) \boldsymbol{\xi}_\sigma = \frac{\cosh \tau - \cos \sigma}{a \rho} \frac{\partial P}{\partial \sigma} + \frac{i \omega \varsigma}{a^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_\sigma}{\partial \tau^2}. \quad (3.10.15)$$

Эти уравнения используются в следующем разделе для вывода выражения для декремента.

*3.10.2a. Решение во внешней области и в однородных областях внутри трубок*



Во внешней области и однородных областях внутри трубок пренебрегаем вязкостью. Плотность в этих областях постоянна. Исключая  $\xi_\tau$  и  $\xi_\sigma$  из уравнений (3.10.13)-(3.10.15) в которых опущены члены пропорциональные вязкости получим уравнение для  $P$ ,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} + \frac{a^2(\omega^2 - V_A^2 k^2)P}{V_A^2(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} = 0. \quad (3.10.16)$$

Как и прежде предполагаем, что длина трубки  $L$  много больше поперечного размера системы. Этот поперечный размер можно принять равным  $d$ . Таким образом,  $d/L = \epsilon \ll 1$ . Поскольку  $\omega \sim kV_A$ , отношение последнего члена в уравнении (3.10.16) к первому члену полрядка  $\epsilon^2$ . Пренебрегая этим малым членом получим приближённое уравнение для  $P$ ,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (3.10.17)$$

Из уравнения (3.6.2) следует что  $\tau^2 + \sigma^2 \rightarrow 0$  вдали от магнитных трубок, т.е. при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ . Общее решение (3.10.17) можно искать в виде разложения в ряд Фурье по  $\sigma$ . Однако в дальнейшем рассматриваем только изгибные колебания, так что решение уравнения (3.10.17) отыскиваем в виде

$$P = \Phi(\tau) \cos(\sigma - \sigma_0) - \Phi(0) \cos \sigma_0, \quad (3.10.18)$$

где  $\sigma_0$  — постоянная, а  $\Phi(\tau)$  — функция которую необходимо определить. Второй член в правой части уравнения (3.10.17) введён для того чтобы удовлетворить условие  $P \rightarrow 0$  при  $\tau^2 + \sigma^2 \rightarrow 0$ . При  $\tau \rightarrow \pm\infty$  получим  $x \rightarrow \pm a$  и  $y \rightarrow 0$ . Это означает что решение уравнения (3.10.17) должно быть ограничено при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . После этого сразу получаем

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} C_L e^\tau, & \tau \leq -\tau_L - \ell_L, \\ C_1 e^\tau + C_2 e^{-\tau}, & -\tau_L \leq \tau \leq \tau_R, \\ C_R e^{-\tau}, & \tau \geq \tau_R + \ell_R, \end{cases} \quad (3.10.19)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_L$  и  $C_R$  — произвольные постоянные. Теперь, используя уравнение (3.10.14) с опущенным последним членом, находим

$$\xi_\tau = \hat{\xi}_\tau(\tau)(\cosh \tau - \cos \sigma) \cos(\sigma - \sigma_0), \quad (3.10.20)$$

где

$$\hat{\xi}_\tau = \begin{cases} \frac{C_L e^\tau}{a\rho_L(\omega^2 - V_{AL}^2 k^2)}, & \tau \leq -\tau_L - \ell_L, \\ \frac{C_1 e^\tau - C_2 e^{-\tau}}{a\rho_e(\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2)}, & -\tau_L \leq \tau \leq \tau_R, \\ \frac{-C_R e^{-\tau}}{a\rho_R(\omega^2 - V_{AR}^2 k^2)}, & \tau \geq \tau_R + \ell_R, \end{cases} \quad (3.10.21)$$

Поскольку  $P$  и  $\xi$  должны быть непрерывны на границах переходных областей, уравнение (3.10.18) также справедливо и в этих областях. После этого из уравнения (3.10.14) с опущенным последним членом следует что равенство (3.10.20) так же справедливо в переходных областях. Наконец, из уравнения (3.10.14) следует

$$\xi_\sigma = -\hat{\xi}_\sigma(\tau)(\cosh \tau - \cos \sigma) \sin(\sigma - \sigma_0). \quad (3.10.22)$$

Подставляя функции (3.10.20) и (3.10.22) в уравнение (3.10.13) получим

$$\left( \frac{d\hat{\xi}_\tau}{d\tau} - \hat{\xi}_\sigma \right) \cos(\sigma - \sigma_0) = -\frac{aP}{\rho V_A^2 (\cosh \tau - \cos \sigma)^2}. \quad (3.10.23)$$

Очевидная несовместность уравнений (3.10.18) и (3.10.23) в выбранном приближении исчезает. Действительно, из уравнения (3.10.15) следует что  $P \sim ak^2 \rho_0 V_A^2 \xi_\sigma \sim \epsilon k \rho_0 V_A^2 \hat{\xi}_\sigma$ . Отсюда отношение правой части уравнения (3.10.23) к его левой части порядка  $\epsilon^2$ , так что правой частью можно пренебречь в приближении тонкой трубки. В результате, в этом приближении, уравнение (3.10.23) сводится к

$$\frac{d\hat{\xi}_\tau}{d\tau} - \hat{\xi}_\sigma = 0. \quad (3.10.24)$$

Очевидно это уравнение не противоречит (3.10.18). Подчеркнём что приведённый анализ ясно показывает что выражения для  $P$  и  $\xi$  определяемые уравнениями (3.10.18), (3.10.20) и (3.10.22) могут использоваться только в приближении тонкой трубки.

### 3.10.2b. Решение в диссипативном слое

Как показано в разделе 3.6.4, в том случае когда плотность не меняется в аксиальном направлении, в длинноволновом приближении имеется

две собственные частоты изгибных колебаний,  $\omega_-$  и  $\omega_+$ ,  $\omega_- < \omega_+$ . Также было показано что  $\omega_+ < \omega_e$ . Для дальнейшего необходимо исследовать соотношения между  $\omega_-$ ,  $\omega_+$ ,  $\omega_{AL} = kV_{AL}$  и  $\omega_{AR} = kV_{AR}$ .

Поскольку  $\omega_+ > C_{kL,R}$ ,  $V_{AL} < C_{kL}$  и  $V_{AR} < C_{kR}$ , имеем что

$$\omega_+ > \omega_{AL,R}. \quad (3.10.25)$$

Далее, вводя обозначение  $X = \omega^2/\omega_{Ae}^2$  перепишем дисперсионное уравнение (3.6.52) в виде

$$\begin{aligned} f(X) \equiv & [(\zeta_L + 1)(\zeta_R + 1) - E^2(\zeta_L - 1)(\zeta_R - 1)]X^2 \\ & - 2(\zeta_L + \zeta_R + 2)X + 4 = 0. \end{aligned} \quad (3.10.26)$$

Нетрудно получить выражения

$$\begin{aligned} \zeta_L^2 f(1/\zeta_L) &= (\zeta_L - 1)[2(\zeta_L - 1) - (\zeta_R - 1)(E^2 + 1)], \\ \zeta_R^2 f(1/\zeta_R) &= (\zeta_R - 1)[2(\zeta_R - 1) - (\zeta_L - 1)(E^2 + 1)]. \end{aligned} \quad (3.10.27)$$

Когда удовлетворяется условие

$$\tan \alpha < \frac{\zeta_R - 1}{\zeta_L - 1} < \cot \alpha, \quad \alpha = \arctan \frac{1 + E^2}{2} < \frac{\pi}{4}, \quad (3.10.28)$$

имеем  $f(1/\zeta_L) > 0$  и  $f(1/\zeta_R) > 0$ . Это означает что  $1/\zeta_L$  и  $1/\zeta_R$  находятся вне интервала  $[X_-, X_+]$ , где  $X_- = \omega_-^2/\omega_{Ae}^2$  и  $X_+ = \omega_+^2/\omega_{Ae}^2$  — корни уравнения (3.10.26). Неравенство (3.10.25) можно переписать в виде  $X_+ > 1/\zeta_{L,R}$ . Отсюда  $1/\zeta_{L,R} < X_-$ . Это неравенство можно переписать в виде

$$\omega_- > \omega_{AL,R}. \quad (3.10.29)$$

Системы двух параллельных трубок в которых удовлетворяется неравенство (3.10.28) называются *стандартными*. Как видим, в стандартных системах частота низкочастотной моды больше альвеновских частот в обеих трубках.

В том случае когда  $(\zeta_R - 1)/(\zeta_L - 1) < \tan \alpha$  имеем  $f(1/\zeta_L) > 0$  и  $f(1/\zeta_R) < 0$ , а когда  $(\zeta_R - 1)/(\zeta_L - 1) > \cot \alpha$ , то  $f(1/\zeta_L) < 0$  и  $f(1/\zeta_R) > 0$ . В первом случае  $1/\zeta_L < X_-$  и  $X_- < 1/\zeta_R < X_+$ , а во втором  $1/\zeta_R < X_-$  и  $X_- < 1/\zeta_L < X_+$ . Это означает что, при нарушении неравенства (3.10.28), имеем

$$\min(\omega_{AL}, \omega_{AR}) < \omega_- < \max(\omega_{AL}, \omega_{AR}). \quad (3.10.30)$$

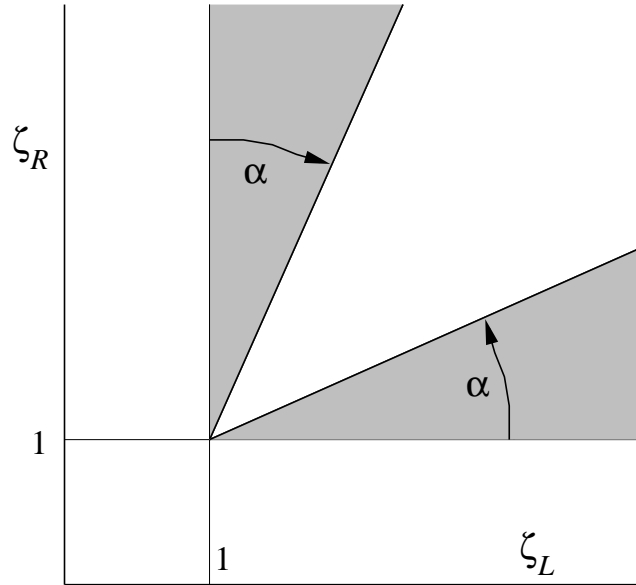


Рис. 3.10.2. Области соответствующие стандартным и аномальным системам в плоскости  $\zeta_L \zeta_R$  при фиксированном значении  $E$ . Два затенённых сектора соответствуют аномальным системам, а незатенённый сектор – стандартным системам.

Системы в которых не выполняются неравенство (3.10.28) называются *аномальными*. На Рис. 3.10.2 изображены области соответствующие стандартным и аномальным системам в плоскости  $\zeta_L \zeta_R$ .

В дальнейшем предполагаем, что переходные области тонкие,  $\ell_L \ll R_L$  и  $\ell_R \ll R_R$ . В этом случае основной эффект заключается в резонансном затухании изгибных колебаний, а действительная часть частоты колебаний только незначительно модифицируется за счёт присутствия переходных областей. Таким образом, действительная часть затухающей собственной моды равна или  $\omega_-$  или  $\omega_+$ . Условия резонанса для левой и правой трубок записываются в виде

$$kV_A(\tau_{AL}) = \omega, \quad kV_A(\tau_{AR}) = \omega, \quad (3.10.31)$$

где  $\tau = \tau_{AL}$  и  $\tau = \tau_{AR}$  – уравнения резонансных поверхностей, соответственно, в левой и правой переходной области, а  $\omega$  равно или  $\omega_-$  или  $\omega_+$ . После этого из уравнений (3.10.25) и (3.10.29) следует что, в стандартной системе, имеются резонансные поверхности как в левой так и в правой переходной области как для низкочастотной ( $\omega = \omega_-$ ), так и для высокочастотной ( $\omega = \omega_+$ ) моды. С другой стороны, из уравнений (3.10.25) и (3.10.30) следует что, в аномальной системе, имеются резонансные поверхности как в левой так и в правой переходной зоне только для высокочастотной моды. Для низкочастотной имеется только одна резонансная поверхность. Эта

поверхность расположена в трубке с большей плотностью, т.е. в трубке с меньшей альвеновской скоростью.

Исследуем волновое движение в диссипативном слое охватывающем резонансную поверхность. Анализ один и тот же в левом и правом диссипативном слое, поэтому в дальнейшем индексы 'L' и 'R' опускаем.

Подставляя уравнения (3.10.18), (3.10.20) и (3.10.22) в уравнения (3.10.14) и (3.10.15) получим

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) \hat{\xi}_\tau - \frac{i\omega\nu}{a^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_\tau}{d\tau^2} = \frac{1}{a\rho} \frac{d\Phi}{d\tau}, \quad (3.10.32)$$

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) \hat{\xi}_\sigma - \frac{i\omega\nu}{a^2} \frac{d^2 \hat{\xi}_\sigma}{d\tau^2} = \frac{\Phi}{a\rho}. \quad (3.10.33)$$

В дальнейшем увидим что отношение декремента  $\gamma$  к действительной части собственной частоты порядка  $\ell/R \ll 1$ . Это означает что можно использовать приближение

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 - 2i\omega_0\gamma, \quad (3.10.34)$$

где  $\omega_0 = \omega_-$  или  $\omega_0 = \omega_+$ . Также можно подставить  $\omega_0$  вместо  $\omega$  в коэффициенте при второй производной в уравнениях (3.10.14) и (3.10.15). Уравнение резонансной магнитной поверхности записывается в виде  $\tau = \tau_A$ , где  $\tau_A$  определяется уравнением  $kV_A(\tau_A) = \omega_0$ . Характерный масштаб изменения  $V_A$  в переходной области равен  $\ell$ , в то время как толщина диссипативного слоя много меньше чем  $\ell$ . Это означает что в диссипативном слое можно использовать приближение

$$V_A^2 k^2 \approx \omega_0^2 - \Delta(\tau - \tau_A), \quad \Delta = -k^2 \left. \frac{dV_A^2}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_A}. \quad (3.10.35)$$

Удобно ввести новую переменную

$$s = \frac{\tau - \tau_A}{\delta}, \quad \delta = \left( \frac{\omega_0 \nu_v}{a^2 |\Delta|} \right)^{1/3}. \quad (3.10.36)$$

Заметим что  $\delta \sim R_e^{-1/3} (\ell L^2 / a^2)^{1/3}$ , где  $R_e = \omega_0 L^2 / \nu_v$  — число Рейнольдса. Для типичных корональных условий  $R_e$  так велико что  $\delta \ll 1$ .

С помощью уравнений (3.10.34)-(3.10.36) перепишем уравнения (3.10.24), (3.10.32) и (3.10.33) в новых переменных в виде

$$\frac{d\hat{\xi}_\tau}{ds} - \delta \hat{\xi}_\sigma = 0, \quad (3.10.37)$$

$$\frac{d^2 \hat{\xi}_\tau}{ds^2} + (is \operatorname{sgn}(\Delta) + \Lambda) \hat{\xi}_\tau = \frac{i}{a\rho_A |\Delta| \delta^2} \frac{d\Phi}{ds}, \quad (3.10.38)$$

$$\frac{d^2 \hat{\xi}_\sigma}{ds^2} + (is \operatorname{sgn}(\Delta) + \Lambda) \hat{\xi}_\sigma = \frac{i\Phi}{a\rho_A |\Delta| \delta}, \quad (3.10.39)$$

где  $\Lambda = 2\omega_0\gamma/\delta|\Delta|$  и  $\rho_A$  – плотность вычисленная на резонансной поверхности, т.е.  $\rho_A = \bar{\rho}(\tau_A)$ . Теперь дифференцируя уравнение (3.10.38), вычитая из полученного результата уравнение (3.10.39) умноженное на  $\delta$  и используя уравнение (3.10.37) получим

$$\frac{d^2 \Phi}{ds^2} = \delta^2 (\Phi + a\rho_A \Delta \hat{\xi}_\tau). \quad (3.10.40)$$

Поскольку  $\delta \ll 1$  из этого уравнения следует что изменение  $\Phi$  в диссипативном слое мало, им можно пренебречь и положить  $\Phi \approx \text{const} = \Phi(\tau_A)$ . Заметим что аналогичный результат ранее был получен в плоской и цилиндрической геометрии (см. Hollweg 1987, Goossens et al. 1995). При  $\Phi = \text{const}$  уравнение (3.10.39) совпадает, с точностью до обозначений, с уравнением (2.4.19). Таким образом можно сразу получить решение уравнения (3.10.39) используя решение уравнения (2.4.19):

$$\hat{\xi}_\sigma = -\frac{i\Phi(\tau_A)}{a\rho_A |\Delta| \delta} F_\Lambda(-s \operatorname{sgn}(\Delta)), \quad (3.10.41)$$

где функция  $F_\Lambda(s)$  определяется (2.4.23).

Подставляя (3.10.41) в (3.10.37) и используя уравнение (2.4.23) получим

$$\hat{\xi}_\tau = -\frac{\Phi(\tau_A)}{a\rho_A \Delta} G_\Lambda(-s \operatorname{sgn}(\Delta)) + \text{const}, \quad (3.10.42)$$

где функция  $G_\Lambda(s)$  определяется уравнением (2.4.24).

Как и в главе 2.4, скачок функции  $f(s)$  поперёк диссипативного слоя определяется формулой

$$[[f]] = \lim_{s \rightarrow \infty} \{f(s) - f(-s)\}.$$

Поскольку  $\Phi = \text{const}$  в диссипативном слое, имеем

$$[[\Phi]] = 0. \quad (3.10.43)$$

С помощью вычислений аналогичных тем что использовались при выводе уравнения (2.4.25) получим

$$[[\hat{\xi}_\tau]] = -\frac{i\pi\Phi(\tau_A)}{a\rho_A |\Delta|}. \quad (3.10.44)$$

Уравнения (3.10.43) и (3.10.44) используются в следующем разделе чтобы связать решения с двух сторон от диссипативного слоя.

### 3.10.2с. Изменение давления и смещения плазмы поперёк неоднородных областей

Следующим шагом в выводе выражения для декремента является вычисление изменения  $P$  и  $\hat{\xi}_\tau$  поперёк неоднородных переходных областей. В дальнейшем дадим подробный вывод для левой переходной области. Вычисления для правой переходной области аналогичны, поэтому результаты для неё будут представлены без вывода. Поскольку предполагается что  $\ell \ll 1$ , удерживаем только линейные члены по отношению к  $\ell$  и пренебрегаем квадратичными членами и членами более высокого порядка.

Для вычисления изменения  $\hat{\xi}_\tau$  поперёк переходных слоёв используем уравнения (3.10.24) и (3.10.33). Уравнение (3.10.33) теперь используется вне диссипативного слоя, поэтому в нём можно пренебречь последним членом в правой части. Поскольку, в соответствии с уравнением (3.10.43), скачок  $\Phi$  поперёк диссипативного слоя равен нулю и при вычислении  $\hat{\xi}_\tau$  изменением  $\Phi$  в переходном слое можно пренебречь, полагаем  $\Phi = \Phi(\tau_{AL}) \equiv \Phi_{AL}$  в уравнении (3.10.33) (напомним что  $\tau = \tau_{AL}$  является уравнением резонансной магнитной поверхности в левой переходной области). Поскольку отношение мнимой части  $\omega$  к действительной части порядка  $\ell$ , можно также подставить  $\omega_0$  вместо  $\omega$ . После этого легко получить

$$\hat{\xi}_\tau = \hat{\xi}_\tau(-\tau_L - \ell_L) + \frac{\Phi_{AL}}{a} \int_{-\tau_L - \ell_L}^{\tau} \frac{d\tilde{\tau}}{\bar{\rho}_L(\tilde{\tau})[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tilde{\tau})]}, \quad (3.10.45)$$

при  $-\tau_L - \ell_L \leq \tau < \tau_{AL}$ , и

$$\hat{\xi}_\tau = \hat{\xi}_\tau(-\tau_L) - \frac{\Phi_{AL}}{a} \int_{\tau}^{-\tau_L} \frac{d\tilde{\tau}}{\bar{\rho}_L(\tilde{\tau})[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tilde{\tau})]}, \quad (3.10.46)$$

при  $\tau_{AL} < \tau < \ell_L - \tau_L$ . Из уравнений (3.10.45) и (3.10.46) следует что  $\hat{\xi}_\tau$  имеет логарифмическую сингулярность при  $\tau = \tau_{AL}$  в полном соответствии с общей теорией резонансных МГД волн.

Уравнения (3.10.45) и (3.10.46) определяют решение уравнений идеальной МГД в переходном слое с двух сторон от диссипативного слоя. Теперь эти решения нужно срастить с решением в диссипативном слое в двух областях перекрытия с двух сторон от диссипативного слоя где справедливы как идеальное так и диссипативное решение. Из условий сращивания

следует что предел при  $s \rightarrow \pm\infty$  любой величины определённый в диссипативном слое должен совпадать с пределом при  $\tau \rightarrow \pm 0$  этой же величины определённой вне диссипативного слоя. Из этого условия следует что можно дать другое выражение для скачка функции  $f$  поперёк диссипативного слоя,

$$[[f]] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \{f(\tau_{AL} + \varepsilon) - f(\tau_{AL} - \varepsilon)\}.$$

После этого из уравнений (3.10.45) и (3.10.46) получим

$$[[\hat{\xi}_\tau]] = \delta\hat{\xi}_{\tau L} - \frac{\Phi_{AL}}{a} \mathcal{P} \int_{-\tau_L - \ell_L}^{-\tau_L} \frac{d\tau}{\bar{\rho}_L(\tau)[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)]}, \quad (3.10.47)$$

где  $\mathcal{P}$  означает главную часть Коши интеграла и

$$\delta\hat{\xi}_{\tau L} = \hat{\xi}_\tau(-\tau_L) - \hat{\xi}_\tau(-\tau_L - \ell_L). \quad (3.10.48)$$

Сравнивая уравнения (3.10.44) и (3.10.47) получим

$$\delta\hat{\xi}_{\tau L} = \frac{\Phi_{AL}}{a} \left( \mathcal{P} \int_{-\tau_L - \ell_L}^{-\tau_L} \frac{d\tau}{\bar{\rho}_L(\tau)[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)]} - \frac{i\pi}{\rho_{AL}|\Delta_L|} \right). \quad (3.10.49)$$

Для вычисления изменения  $\Phi$  поперёк переходного слоя используем уравнение (3.10.32), в котором опущен последний член в левой части и  $\omega_0$  подставлено вместо  $\omega$ . Поскольку, в соответствии с уравнение (3.10.49), изменение  $\hat{\xi}_\tau$  поперёк переходного слоя является величиной порядка  $\ell_L$ , этим изменением можно пренебречь при вычислении  $\Phi$  и подставить  $\hat{\xi}_\tau(-\tau_L)$  вместо  $\hat{\xi}_\tau$  в уравнении (3.10.32). После этого получим

$$\delta\Phi_L = a\hat{\xi}_\tau(-\tau_L) \int_{-\tau_L - \ell_L}^{-\tau_L} \bar{\rho}_L(\tau)[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)] d\tau, \quad (3.10.50)$$

где

$$\delta\Phi_L = \Phi(-\tau_L) - \Phi(-\tau_L - \ell_L). \quad (3.10.51)$$

Аналогичные вычисления для правой переходной области дают

$$\delta\hat{\xi}_{\tau R} = \frac{\Phi_{AR}}{a} \left( \frac{i\pi}{\rho_{AR}|\Delta_R|} - \mathcal{P} \int_{\tau_R}^{\tau_R + \ell_R} \frac{d\tau}{\bar{\rho}_R(\tau)[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)]} \right), \quad (3.10.52)$$

$$\delta\Phi_R = -a\hat{\xi}_\tau(\tau_R) \int_{\tau_R}^{\tau_R + \ell_R} \bar{\rho}_R(\tau)[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)] d\tau, \quad (3.10.53)$$

где

$$\delta\hat{\xi}_{\tau R} = \hat{\xi}_\tau(\tau_R) - \hat{\xi}_\tau(\tau_R + \ell_R), \quad \delta\Phi_R = \Phi(\tau_R) - \Phi(\tau_R + \ell_R). \quad (3.10.54)$$



### 3.10.2d. Вычисление декремента

Теперь необходимо связать решения в однородных областях внутри трубок с решением вне трубок. Для этого вычислим изменения  $\hat{\xi}_\tau$  и  $\Phi$  в переходных областях используя уравнения (3.10.19) и (3.10.21) и сравним их с выражениями которые даны уравнениями (3.10.47)-(3.10.54). В результате получим

$$C_1 e^{-\tau_L} + C_2 e^{\tau_L} - C_L e^{-\tau_L - \ell_L} = \frac{C_1 e^{-\tau_L} - C_2 e^{\tau_L}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} \times \int_{-\tau_L - \ell_L}^{-\tau_L} \bar{\rho}_L(\tau) [\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)] d\tau, \quad (3.10.55)$$

$$C_1 e^{\tau_R} + C_2 e^{-\tau_R} - C_R e^{-\tau_R - \ell_R} = \frac{C_1 e^{\tau_R} - C_2 e^{-\tau_R}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} \times \int_{\tau_R}^{\tau_R + \ell_R} \bar{\rho}_L(\tau) [\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)] d\tau, \quad (3.10.56)$$

$$\frac{C_1 e^{-\tau_L} - C_2 e^{\tau_L}}{\rho_e(\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2)} - \frac{C_L e^{-\tau_L - \ell_L}}{\rho_L(\omega^2 - V_{AL}^2 k^2)} = (C_1 e^{-\tau_L} + C_2 e^{\tau_L}) \times \left( \mathcal{P} \int_{-\tau_L - \ell_L}^{-\tau_L} \frac{d\tau}{\bar{\rho}_L(\tau) [\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)]} - \frac{i\pi}{\rho_{AL} |\Delta_L|} \right), \quad (3.10.57)$$

$$\frac{C_1 e^{\tau_R} - C_2 e^{-\tau_R}}{\rho_e(\omega^2 - V_{Ae}^2 k^2)} + \frac{C_R e^{-\tau_R - \ell_R}}{\rho_R(\omega^2 - V_{AR}^2 k^2)} = (C_1 e^{\tau_R} + C_2 e^{-\tau_R}) \times \left( \frac{i\pi}{\rho_{AR} |\Delta_R|} - \mathcal{P} \int_{\tau_R}^{\tau_R + \ell_R} \frac{d\tau}{\bar{\rho}_R(\tau) [\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)]} \right). \quad (3.10.58)$$

При выводе уравнений (3.10.55)-(3.10.58) были использованы следующие формулы полученные с помощью уравнений (3.10.19) и (3.10.21):

$$\begin{aligned} \Phi_{AL} &\approx \Phi(-\tau_L) = C_1 e^{-\tau_L} + C_2 e^{\tau_L}, \\ \Phi_{AR} &\approx \Phi(\tau_R) = C_1 e^{\tau_R} + C_2 e^{-\tau_R}, \\ \hat{\xi}_\tau(-\tau_L) &\approx \frac{C_1 e^{-\tau_L} - C_2 e^{\tau_L}}{a\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)}, \quad \hat{\xi}_\tau(\tau_R) \approx \frac{C_1 e^{\tau_R} - C_2 e^{-\tau_R}}{a\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)}. \end{aligned} \quad (3.10.59)$$

Уравнения (3.10.55)-(3.10.58) образуют систему линейных однородных алгебраических уравнений. Эта система имеет нетривиальные решения только когда её определитель равен нулю. Это условие даёт дисперсионное соотношение, которое определяет зависимость  $\omega$  от  $k$ .

Отношение правых частей уравнений (3.10.55)-(3.10.58) к их левым частям порядка  $\ell_L \ll 1$  или  $\ell_R \ll 1$ . Это позволяет использовать метод регулярных возмущений для решения системы (3.10.55)-(3.10.58). В соответствии с этим методом отыскиваем решение в виде

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{10} + C_{11}, & C_2 &= C_{20} + C_{21}, \\ C_L &= C_{L0} + C_{L1}, & C_R &= C_{R0} + C_{R1}, \end{aligned} \quad (3.10.60)$$

где вторые члены в правых частях этих уравнений много меньше первых членов. Кроме того, полагаем

$$\omega = \omega_0 + \omega_1, \quad (3.10.61)$$

где  $|\omega_1| \ll |\omega_0|$ .

Нулевое приближение. Подставляя (3.10.60) и (3.10.61) в уравнения (3.10.55)-(3.10.58), удерживая только главные члены и пренебрегая правыми частями получим в нулевом приближении

$$C_{10}e^{-\tau L} + C_{20}e^{\tau L} - C_{L0}e^{-\tau L} = 0, \quad (3.10.62)$$

$$C_{10}e^{\tau R} + C_{20}e^{-\tau R} - C_{R0}e^{-\tau R} = 0, \quad (3.10.63)$$

$$\frac{C_{10}e^{-\tau L} - C_{20}e^{\tau L}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} - \frac{C_{L0}e^{-\tau L}}{\rho_L(\omega_0^2 - V_{AL}^2 k^2)} = 0, \quad (3.10.64)$$

$$\frac{C_{10}e^{\tau R} - C_{20}e^{-\tau R}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} + \frac{C_{R0}e^{-\tau R}}{\rho_R(\omega_0^2 - V_{AR}^2 k^2)} = 0. \quad (3.10.65)$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы получаем дисперсионное соотношение, которое аналогично равенству (3.6.52). Его решения определяются уравнением (3.6.53).

Первое приближение. В первом приближении собираем члены пропорциональные  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{L1}$ ,  $C_{R1}$ ,  $\omega_1$ ,  $\ell_L$  и  $\ell_R$  в уравнениях (3.10.55)-(3.10.58). В результате получим

$$\begin{aligned} C_{11}e^{-\tau L} + C_{21}e^{\tau L} - C_{L1}e^{-\tau L} &= \frac{C_{10}e^{-\tau L} - C_{20}e^{\tau L}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} \\ &\times \int_{-\tau L - \ell_L}^{-\tau L} \bar{\rho}_L(\tau)[\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)] d\tau - C_{L0}\ell_L e^{-\tau L}, \end{aligned} \quad (3.10.66)$$

$$C_{11}e^{\tau_R} + C_{21}e^{-\tau_R} - C_{R1}e^{-\tau_R} = \frac{C_{10}e^{\tau_R} - C_{20}e^{-\tau_R}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} \\ \times \int_{\tau_R}^{\tau_R + \ell_R} \bar{\rho}_R(\tau) [\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)] d\tau - C_{R0} \ell_R e^{-\tau_R}, \quad (3.10.67)$$

$$\frac{C_{11}e^{-\tau_L} - C_{21}e^{\tau_L}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} - \frac{C_{L1}e^{-\tau_L}}{\rho_L(\omega_0^2 - V_{AL}^2 k^2)} = \frac{-C_{L0} \ell_L e^{-\tau_L}}{\rho_L(\omega_0^2 - V_{AL}^2 k^2)} \\ + (C_{10}e^{-\tau_L} + C_{20}e^{\tau_L}) \left( \mathcal{P} \int_{-\tau_L - \ell_L}^{-\tau_L} \frac{d\tau}{\bar{\rho}_L(\tau) [\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)]} - \frac{i\pi}{\rho_{AL} |\Delta_L|} \right) \\ + 2\omega_0 \omega_1 \left( \frac{C_{10}e^{-\tau_L} - C_{20}e^{\tau_L}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)^2} - \frac{C_{L0}e^{-\tau_L}}{\rho_L(\omega_0^2 - V_{AL}^2 k^2)^2} \right), \quad (3.10.68)$$

$$\frac{C_{11}e^{\tau_R} - C_{21}e^{-\tau_R}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)} + \frac{C_{R1}e^{-\tau_R}}{\rho_R(\omega_0^2 - V_{AR}^2 k^2)} = \frac{C_{R0} \ell_R e^{-\tau_R}}{\rho_R(\omega_0^2 - V_{AR}^2 k^2)} \\ + (C_{10}e^{\tau_R} + C_{20}e^{-\tau_R}) \left( \frac{i\pi}{\rho_{AR} |\Delta_R|} - \mathcal{P} \int_{\tau_R}^{\tau_R + \ell_R} \frac{d\tau}{\bar{\rho}_R(\tau) [\omega_0^2 - k^2 V_A^2(\tau)]} \right) \\ + 2\omega_0 \omega_1 \left( \frac{C_{10}e^{\tau_R} - C_{20}e^{-\tau_R}}{\rho_e(\omega_0^2 - V_{Ae}^2 k^2)^2} + \frac{C_{R0}e^{-\tau_R}}{\rho_R(\omega_0^2 - V_{AR}^2 k^2)^2} \right). \quad (3.10.69)$$

Уравнения (3.10.66)-(3.10.69) образуют систему линейных неоднородных алгебраических уравнений. Соответствующая однородная система совпадает с системой (3.10.62)-(3.10.65), так что она имеет нетривиальное решение. Это означает что определитель этой системы равен нулю, так что система неоднородных уравнений (3.10.66)-(3.10.69) имеет решение только если правая часть удовлетворяет условию совместности.

Дальнейшие вычисления становятся крайне громоздкими. Для того чтобы их упростить предполагаем магнитные трубки одинаковыми. В соответствии с этим опускаем индексы ‘L’ и ‘R’ и вводим обозначения

$$\tau_0 = \tau_L = \tau_R, \quad \bar{\rho}_L(-\tau) = \bar{\rho}_R(\tau) = \bar{\rho}(\tau). \quad (3.10.70)$$

В этом частном случае

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{2k^2 V_{Ae}^2}{(\zeta + 1) \mp (\zeta - 1)E}, \quad \frac{C_{0R}}{C_{0L}} = \pm 1. \quad (3.10.71)$$

Используя уравнения (3.10.64), (3.10.65), (3.10.70) и (3.10.71) получим условие совместности системы (3.10.66)-(3.10.69):

$$2\omega_{\pm} \omega_1 + \rho_e V_{Ae}^4 k^4 \frac{(\zeta - 1)^2 (1 - e^{-4\tau_0}) (1 \pm e^{-2\tau_0})}{[(\zeta + 1) \mp e^{-2\tau_0} (\zeta - 1)]^3} \\ \times \left( \frac{i\pi}{\rho_A |\Delta|} - \mathcal{P} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \ell} \frac{d\tau}{\bar{\rho}(\omega_{\pm}^2 - k^2 V_{Ae}^4)} \right) = 0. \quad (3.10.72)$$

Из этого следует что

$$\omega_1 = \bar{\omega}_1 - i\gamma, \quad (3.10.73)$$

где

$$\bar{\omega}_{1\pm} = \frac{\rho_e V_{Ae}^4 k^4 (\zeta - 1)^2 (1 - e^{-4\tau_0}) (1 \pm e^{-2\tau_0})}{2\omega_{\pm} [(\zeta + 1) \mp e^{-2\tau_0} (\zeta - 1)]^3} \mathcal{P} \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \ell} \frac{d\tau}{\bar{\rho}(\omega_{\pm}^2 - k^2 V_{Ae}^4)}, \quad (3.10.74)$$

$$\gamma_{\pm} = \frac{\pi \rho_e V_{Ae}^4 k^4 (\zeta - 1)^2 (1 - e^{-4\tau_0}) (1 \pm e^{-2\tau_0})}{2\omega_{\pm} \rho_A |\Delta| [(\zeta + 1) \mp e^{-2\tau_0} (\zeta - 1)]^3}. \quad (3.10.75)$$

Величина  $\bar{\omega}_1$  не важна поскольку она даёт только малую поправку к частоте колебаний. Важной величиной является декремент  $\gamma$  который определяет затухание вследствие резонансного поглощения. В следующем разделе будет изучена зависимость  $\gamma$  от параметров невозмущённого состояния.

### 3.10.3. Исследование затухания колебаний

В этом разделе исследуется зависимость декремента  $\gamma$  от относительного расстояния между осями трубок  $d/R$  и от контраста плотности  $\zeta$ . В дальнейшем предполагаем что  $\bar{\rho}$  является линейной функцией  $\tau$ , так что

$$\bar{\rho} = \rho_e \left( 1 + (\zeta - 1) \frac{\tau - \tau_0}{\ell} \right). \quad (3.10.76)$$

Напомним что альвеновская резонансная поверхность определяется уравнением  $\tau = \tau_A$ , где  $\tau_A$ , в свою очередь, определяется соотношением  $kV_A(\tau_A) = \omega_{\pm}$ , из которого следует что

$$\rho_A = \frac{B^2 k^2}{\mu_0 \omega_{\pm}^2} = \frac{\rho_e V_{Ae}^2 k^2}{\omega_{\pm}^2}. \quad (3.10.77)$$

Используя этот результат получим

$$\begin{aligned} \Delta &= -k^2 \frac{dV_A^2}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_A} = \frac{B^2 k^2}{\mu_0 \bar{\rho}^2} \frac{d\bar{\rho}}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_A} = \frac{\rho_e B^2 k^2 (\zeta - 1)}{\mu_0 \rho_A^2 \ell} \\ &= \frac{\rho_e \mu_0 \omega_{\pm}^4 (\zeta - 1)}{\ell B^2 k^2} = \frac{\omega_{\pm}^4 (\zeta - 1)}{\ell k^2 V_{Ae}^2}. \end{aligned} \quad (3.10.78)$$

Применяя уравнения (3.10.53), (3.10.77) и (3.10.78) получим из (3.10.75)

$$\gamma_{\pm} = \frac{\pi \ell \omega_{\pm} (\zeta - 1) (1 - e^{-4\tau_0}) (1 \pm e^{-2\tau_0})}{8 [(\zeta + 1) \mp e^{-2\tau_0} (\zeta - 1)]}. \quad (3.10.79)$$

В разделах 2.4.3, 3.8.5 и 3.9.6 было показано что декремент резонансного затухания пропорционален отношению толщины переходного слоя к радиусу трубки. Для того чтобы сравнить скорость затухания колебаний уединённой трубки со скоростью затухания колебаний двух параллельных трубок следует записать выражение для  $\gamma_{\pm}$  в форме аналогичной той форме в которой записан декремент в случае уединённой трубки. Из уравнения (3.10.79) видно что  $\gamma_{\pm}$  пропорциональна  $\ell$ . Однако  $\ell$  равно отношению толщины переходного слоя к радиусу трубки только когда дистанция между осями трубок много больше радиуса трубок. Удобно выразить  $\ell$  через это отношение в общем случае. Трудность заключается в том что, толщина переходного слоя не является постоянной и зависит от  $\sigma$ . Для того чтобы преодолеть эту трудность введём среднюю толщину переходного слоя. Уравнения внешней и внутренней границ переходной области в декартовых координатах даются уравнением (3.6.2) где вместо  $\tau$  подставлено, соответственно,  $\tau_0$  и  $\tau_0 + \ell$ . После этого, принимая во внимание что  $\ell \ll \tau_0$ , получим что толщина переходного слоя при фиксированном  $\sigma$  определяется формулой

$$\delta(\sigma) = \ell \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{a\ell}{\cosh \tau_0 - \cos \sigma}. \quad (3.10.80)$$

Среднее значение толщины переходного слоя равно

$$\bar{\delta} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \delta(\sigma) ds(\sigma). \quad (3.10.81)$$

Квадрат элементарной длины вдоль границы переходного слоя равен

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)^2 \right] d\sigma^2 = \frac{a^2 d\sigma^2}{(\cosh \tau_0 - \cos \sigma)^2}. \quad (3.10.82)$$

Из этого результата, в частности, следует что длина границы переходной области даётся выражением

$$2\pi R = \int_0^{2\pi} ds(\sigma) = a \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\cosh \tau_0 - \cos \sigma}. \quad (3.10.83)$$

Используя уравнения (3.10.80) и (3.10.82) получим из уравнения (3.10.81) что

$$\bar{\delta} = \frac{a^2 \ell}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{(\cosh \tau_0 - \cos \sigma)^2}. \quad (3.10.84)$$

Подставляя в уравнение (3.10.83)  $R = a/\sinh \tau_0$  и дифференцируя полученное тождество по  $\tau_0$  находим

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{(\cosh \tau_0 - \cos \sigma)^2} = \frac{2\pi \cosh \tau_0}{\sinh^3 \tau_0}. \quad (3.10.85)$$

Подставляя этот результат в уравнение (3.10.84) имеем

$$\bar{\delta} = \frac{2\pi a^2 \ell \cosh \tau_0}{2\pi R \sinh^3 \tau_0} = \frac{a\ell \cosh \tau_0}{\sinh^2 \tau_0} = \ell R \coth \tau_0. \quad (3.10.86)$$

Используя этот результат перепишем уравнение (3.10.79) в виде

$$\gamma_{\pm} = \frac{\pi \bar{\delta} \omega_{\pm} (\zeta - 1) (1 \pm e^{-2\tau_0}) (1 - e^{-2\tau_0})^2}{8R[(\zeta + 1) \mp e^{-2\tau_0}(\zeta - 1)]}. \quad (3.10.87)$$

Эта формула весьма удобна для сравнения со скоростью затухания колебаний уединённой магнитной трубки. Прежде всего заметим что скорость затухания пропорциональна толщине переходного слоя. Как уже было отмечено выше, аналогичный результат был получен в случае уединённой магнитной трубки. Когда  $\tau_0 \rightarrow \infty$  получим  $d/R \rightarrow \infty$ . В этом случае магнитные трубки колеблются независимо, а толщина переходного слоя постоянная,  $\delta(\sigma) = \bar{\delta}$ . В этом пределе также  $\omega_{\pm}^2 = 2V_{Ae}^2 k^2 / (\zeta - 1) \equiv \omega_k^2$  и уравнение (3.10.87) преобразуется к виду

$$\gamma_{\pm} = \frac{\pi \bar{\delta} \omega_k (\zeta - 1)}{8R(\zeta + 1)}. \quad (3.10.88)$$

Этот результат находится в полном согласии с выражением полученным в случае уединённой трубки (см. уравнение (3.8.91) в разделе 3.8.5; некоторая разница между уравнениями (3.8.91) и (3.10.88) объясняется тем что первое уравнением было получено для синусоидального профиля плотности, а второе — для линейного). Зависимость  $\gamma_{\pm} R / \bar{\delta} \omega_{\pm}$  от  $d/R$  и  $\zeta$  показана, соответственно, на Рис. 3.10.3 и 3.10.4. Как видим, декремент является возрастающей функцией как расстояния между осями трубок так и контраста плотностей. Кроме того, как из уравнения (3.10.88) так и из Рис. 3.10.3 и 3.10.4 следует что высокочастотная мода затухает быстрее чем низкочастотная.

### 3.10.4. Выводы

В настоящей главе было изучено затухание изгибных колебаний системы двух параллельных магнитных трубок. Предполагалось что плотность постоянна в окружающей плазме и в центральных областях трубок

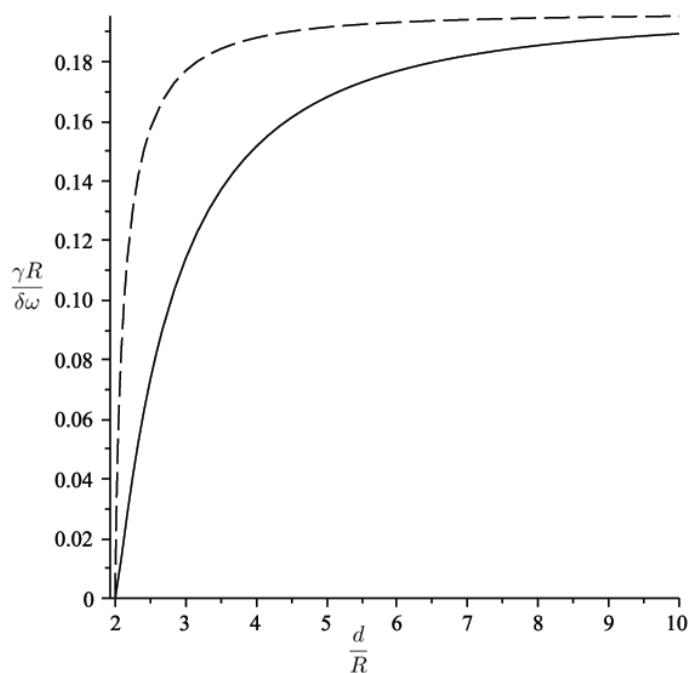


Рис. 3.10.3. Зависимость декремента  $\gamma$  от расстояния между осями трубок  $d$  при  $\zeta = 3$ . Сплошная и штриховая кривые относятся, соответственно, к низкочастотной ( $\omega = \omega_-$ ) и высокочастотной ( $\omega = \omega_+$ ) изгибным модам.

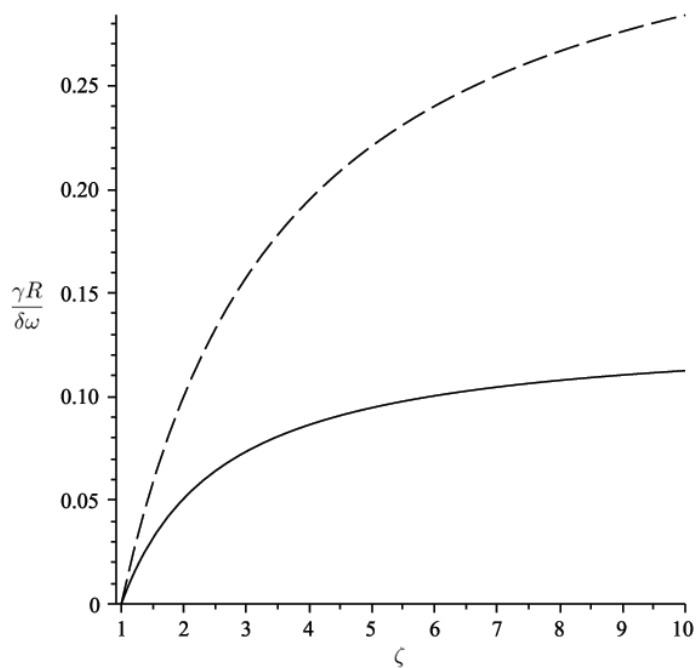


Рис. 3.10.4. Зависимость декремента  $\gamma$  от контраста плотности  $\zeta$  при  $d/R = 2.5$ . Сплошная и штриховая кривые относятся, соответственно, к низкочастотной ( $\omega = \omega_-$ ) и высокочастотной ( $\omega = \omega_+$ ) изгибным модам.

и меняется в радиальных направлениях в тонких переходных слоях между центральными областями трубок и окружающей плазмой. Внутри этих переходных слоёв имеются резонансные поверхности на которых частота изгибных колебаний совпадает с локальной Альфеновской частотой. В стандартных системах имеется резонансная поверхность в каждой из трубок как для высокочастотной так и для низкочастотной моды. В аномальных системах имеется резонансная поверхность в каждой переходной области для высокочастотной моды. Однако в случае низкочастотной моды имеется только одна резонансная поверхность расположенная в трубке с бóльшей плотностью в центральной области.

Предположение что переходные области тонкие позволяет использовать регулярный метод возмущений для исследования затухания колебаний вследствие резонансного поглощения. В нулевом приближении был воспроизведён результат полученный в разделе 3.6.4 при изучении колебания двух параллельных трубок с резкими границами. В первом приближении было получено выражение для декремента связанного с резонансным поглощением. В общем случае вычисление декремента приводит к весьма громоздким вычислениям. Поэтому вычисления были проделаны только в случае идентичных трубок.

Сформулируем основные результаты главы. На Рис. 3.10.3 показано что, для  $\zeta = 3$ , декременты как высокочастотной так и низкочастотной моды являются монотонно возрастающими функциями  $d/R$ . Принимая во внимание что  $d/R = \cosh \tau_0$ , т.е.  $d/R$  является монотонно возрастающей функцией  $\tau_0$ , легко показать что этот результат справедлив для любого  $\zeta > 1$ . Таким образом, взаимодействие между трубками уменьшает эффективность резонансного поглощения. Формально,  $\gamma_{\pm} \rightarrow 0$  при  $d/R \rightarrow 2$ . Однако предположение что переходные области тонкие означает что не только  $\bar{\delta} \ll R$ , но также  $\bar{\delta}$  много меньше чем расстояние между границами трубок. Последнее условие может быть записано в виде  $d - 2R \gg \bar{\delta}$ .

Другой важный результат связанный со скоростью затухания это получение неравенства  $\gamma_-/\omega_- < \gamma_+/\omega_+$  означающего что низкочастотные колебания затухают медленнее чем высокочастотные. Например, при  $\zeta = 3$  и  $d/R = 2.5$  время затухания низкочастотных колебаний более чем в два раза превышает время затухания высокочастотных колебаний. В настоящее время не существует физического объяснения этому результату. В заключении отметим что, аналогично случаю уединённой трубки, время



затухания является убывающей функцией контраста плотности  $\zeta$ .

### 3.11. Резонансное затухание изгибных колебаний остывающих корональных петель

Важным свойством осциллирующих корональных петель является то что, довольно часто, они находятся в динамическом состоянии. В частности, они могут остывать с характерным временем остывания порядка нескольких периодов колебаний (см. напр. Aschwanden and Terradas 2008). В связи с этим представляется важным теоретическое изучение МГД волн в динамической плазме. Впервые влияние охлаждения на изгибные колебания корональных петель было исследовано в работах Morton and Erdélyi (2009, 2010). Было показано что охлаждение петли вызывает уменьшение периода колебаний.

Хотя, как уже упоминалось ранее, обычно изгибные колебания корональных петель быстро затухают, иногда наблюдаются колебания амплитуда которых не меняется за всё время наблюдения. В частности, из 17 наблюдений изгибных колебаний корональных петель описанных в работе Aschwanden et al. (2002) в 7 случаях затухание колебаний не наблюдалось. Недавно Aschwanden and Schrijver (2011) сообщили о наблюдениях изгибных колебаний корональных петель полученных с помощью Atmospheric Imaging Assembly (AIA) на борту Solar Dynamic Observatory (SDO). В одном из наблюдений колебания были практически незатухающими. Aschwanden and Schrijver пришли к выводу что, в предположении что затухание петель происходит вследствие резонансного поглощения, то отношение толщины переходного слоя  $\ell$  к радиусу поперечного сечения трубки  $R$  должно быть очень маленьким. Важным свойством петли с незатухающими колебаниями было то что она охлаждалась. В связи с этим встаёт вопрос: не может ли охлаждение петли приводить к росту её амплитуды колебаний которое может компенсировать их резонансное затухание.

Влияние охлаждения петли на её изгибные колебания было исследовано в работах Ruderman (2011a, b). В первой работе были исследованы колебания охлаждающейся петли с резкой границей, а во второй — совместный эффект охлаждения и резонансного затухания. В дальнейшем следуем работе Ruderman (2011b) поскольку результаты работы Ruderman (2011a) можно получить из результатов работы Ruderman (2011b) полагая толщину

ну переходного слоя равной нулю.

### 3.11.1. Изгибные колебания корональных петель с медленно изменяющейся плотностью

Рассматриваются изгибные колебания корональных петель с плотностью медленно меняющейся вследствие охлаждения петли. Невозмущённое состояние описано в разделе 3.7.1. Колебания описываются уравнениями (3.7.23) и (3.7.24).

#### 3.11.1a. ВКБ приближение

Цель этого раздела — вывести уравнение определяющее эволюцию амплитуды изгибных колебаний корональных петель с медленно меняющейся плотностью в присутствии резонансного затухания. Введём малый параметр  $\nu = \ell/R \ll 1$ . Предполагается что характерное время изменения плотности,  $t_{\text{cool}}$ , много больше чем характерный период,  $\Pi_{\text{ch}}$ . Необходимо получить уравнение, которое будет одновременно описывать эффект изменения плотности и резонансное затухание. В соответствии с этим полагаем  $\Pi_{\text{ch}}/t_{\text{cool}} = O(\nu)$ . После этого используем ВКБ метод (см. напр. Bender and Orszag 1978), полагая

$$\eta = S(t, z) \exp[i\nu^{-1}\Theta(t)]. \quad (3.11.1)$$

После этого раскладываем  $S$  в ряд

$$S = S_0 + \nu S_1 + \dots \quad (3.11.2)$$

Из сделанных предположений следует что характерный период изгибных колебаний порядка  $\nu t_{\text{cool}}$ . С другой стороны он также порядка длины петли делённой на характерную фазовую скорость изгибных волн. Таким образом, этот характерный период может быть принят равным  $L/(B/\sqrt{\mu_0\rho_{\text{ch}}})$ , где  $\rho_{\text{ch}}$  — характерная плотность. В результате получим

$$B \sim \nu^{-1} \sqrt{\mu_0\rho_{\text{ch}}} \frac{L}{t_{\text{cool}}}.$$

В соответствии с этой оценкой вводим масштабированное магнитное поле  $\tilde{B} = \nu B$ . Из уравнений (3.7.18) и (3.7.19) следует  $Q_{i,e} \sim \nu^{-2}$ , что, в свою очередь, означает что  $P \sim \nu^{-2}$ . Поскольку  $\delta P/P \sim \nu$ , где  $\delta P$  — изменение возмущения магнитного давления, то  $\delta P \sim \nu^{-1}$ . В соответствии с

этой оценкой вводим масштабированную переменную  $\widetilde{\delta P} = \nu \delta P$ . Теперь, подставляя уравнения (3.11.1) и (3.11.2) в уравнение (3.7.23), получим

$$\begin{aligned}
& (\rho_i + \rho_e) \left\{ \Omega^2 S_0 + \nu \left( \Omega^2 S_1 - 2i\Omega \frac{\partial S_0}{\partial t} - iS_0 \frac{d\Omega}{dt} \right) \right\} \\
& - 2i\nu(\rho_i U_i + \rho_e U_e) \Omega \frac{\partial S_0}{\partial z} + \frac{2\widetilde{B}^2}{\mu_0} \left( \frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right) \\
& = \nu \left\{ \rho_i \left( \Omega^2 S_0 + \widetilde{V}_{Ai}^2 \frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} \right) - \rho_e \left( \Omega^2 \widetilde{\delta S} + \widetilde{V}_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \widetilde{\delta S}}{\partial z^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\widetilde{\delta P}}{R} \exp(-i\nu^{-1}\Theta) \right\} + O(\nu^2), \tag{3.11.3}
\end{aligned}$$

где

$$\Omega = \frac{d\Theta}{dt}, \quad \delta \xi_r = \delta S \exp(i\nu^{-1}\Theta), \quad \widetilde{\delta S} = \nu^{-1} \delta S, \quad \widetilde{V}_A = \nu V_A, \tag{3.11.4}$$

а  $\delta S$  — изменение  $S$  поперёк переходного слоя.

Собирая члены порядка единицы получим

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} + \frac{\Omega^2}{\widetilde{C}_k^2} S_0 = 0, \quad \widetilde{C}_k^2 = \frac{2\widetilde{B}^2}{\mu_0(\rho_i + \rho_e)}. \tag{3.11.5}$$

Это приближение обычно называется приближением геометрической оптики. Вводя

$$\omega = \nu^{-1} \Omega, \quad C_k^2 = \nu^{-2} \widetilde{C}_k^2 = \frac{2B^2}{\mu_0(\rho_i + \rho_e)}, \tag{3.11.6}$$

запишем уравнение (3.11.5) в виде

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{C_k^2} S_0 = 0. \tag{3.11.7}$$

Величина  $\omega$  может рассматриваться как мгновенная частота изгибных колебаний. Из уравнения (3.7.14) следует, что  $S_0$  удовлетворяет граничным условиям

$$S_0 = 0 \quad \text{при } z = \pm L/2. \tag{3.11.8}$$

Уравнения (3.11.5) и (3.11.8) образуют задачу на собственные значения которая определяет частоту  $\Omega$ . Она совпадает с задачей на собственные значения описывающей стоячие изгибные волны в трубке со стационарной плотностью изменяющейся вдоль трубки. В дальнейшем предполагаем что  $\Omega^2$  — собственное значение и  $S_0$  — собственная функция задачи на собственные значения образованной уравнениями (3.11.5) и (3.11.8). В соответствии

с общей теорией задачи Штурма-Лиувилля  $\Omega^2$  является действительной величиной (см. напр. Coddington and Levinson 1955). Нетрудно показать что  $\Omega^2 > 0$ .

В следующем приближении, называемом приближением физической оптики, собираем члены порядка  $\nu$  в уравнении (3.11.3). С помощью уравнения (3.11.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} + \frac{\Omega^2}{\tilde{C}_k^2} S_1 = \frac{1}{\tilde{C}_k^2(\rho_i + \rho_e)} \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 (\rho_i - \rho_e) S_0 \right. \\ \left. - \rho_e \left( \Omega^2 \tilde{\delta S} + \tilde{V}_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\delta S}}{\partial z^2} \right) - \frac{\tilde{\delta P}}{R} \exp(-i\nu^{-1}\Theta) \right\} \\ + \frac{2i\Omega}{\tilde{C}_k^2} \left( \frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{\rho_i U_i + \rho_e U_e}{\rho_i + \rho_e} \frac{\partial S_0}{\partial z} + \frac{S_0}{2\Omega} \frac{d\Omega}{dt} \right). \end{aligned} \quad (3.11.9)$$

Из уравнения (3.7.14) следует что  $S_1$  удовлетворяет граничным условиям

$$S_1 = 0 \quad \text{при } z = \pm L/2. \quad (3.11.10)$$

Однородный аналог граничной задачи образованной уравнениями (3.11.9) и (3.11.10) имеет нетривиальное решение  $S_1 = S_0$ . Это означает что граничная задача определяющая функцию  $S_1$  имеет решение только в том случае если правая часть уравнения (3.11.9) удовлетворяет условию согласования. Для того чтобы получить условие согласования умножим уравнение (3.11.9) на  $S_0$ , проинтегрируем полученное уравнение и используем интегрирование по частям и уравнение (3.11.10). После простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\tilde{C}_k^2} \frac{\partial(\Omega S_0^2)}{\partial t} dz = \frac{\mu_0 \Omega}{2B^2} \int_{-L/2}^{L/2} S_0^2 \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i U_i + \rho_e U_e) dz \\ + \frac{i}{(\rho_i + \rho_e) \tilde{C}_k^2} \int_{-L/2}^{L/2} S_0 \left\{ \frac{1}{2} \Omega^2 (\rho_i - \rho_e) S_0 \right. \\ \left. - \rho_e \left( \Omega^2 \tilde{\delta S} + \tilde{V}_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\delta S}}{\partial z^2} \right) - \frac{\tilde{\delta P}}{R} \exp(-i\nu^{-1}\Theta) \right\} dz. \end{aligned} \quad (3.11.11)$$

Используя уравнение сохранения массы (3.7.2) находим

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{2B^2} \int_{-L/2}^{L/2} S_0^2 \frac{\partial}{\partial z} (\rho_i U_i + \rho_e U_e) dz \\ = -\frac{\mu_0}{2B^2} \int_{-L/2}^{L/2} S_0^2 \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i + \rho_e) dz = -\int_{-L/2}^{L/2} S_0^2 \frac{\partial C_k^{-2}}{\partial t} dz. \end{aligned} \quad (3.11.12)$$

Подставляя это выражение в (3.11.11) преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \omega \int_{-L/2}^{L/2} \frac{S_0^2}{C_k^2} dz \right) &= \frac{i}{(\rho_i + \rho_e) C_k^2} \int_{-L/2}^{L/2} S_0 \left\{ \frac{\ell \omega^2}{2R} (\rho_i - \rho_e) S_0 \right. \\ &\quad \left. - \rho_e \left( \omega^2 \delta S + V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \delta S}{\partial z^2} \right) - \frac{\delta P}{R} \exp(-i\nu^{-1}\Theta) \right\} dz. \end{aligned} \quad (3.11.13)$$

Величина в скобках в левой части называется адиабатическим инвариантом. Когда  $\ell = 0$  правая часть уравнения (3.11.13) равна нулю и адиабатический инвариант сохраняется. Этот результат был впервые получен в работе Ruderman (2011a).

Следует заметить что, когда  $\ell = 0$ , энергия колебаний не сохраняется поскольку охлаждающаяся корональная петля является открытой системой. Действительно, во время охлаждения полная масса плазмы в петле уменьшается, так что имеется поток плазмы и, следовательно, также поток энергии через основания петли. Таким образом, сохранение адиабатического инварианта не связано с сохранением энергии. Это сохранение можно интерпретировать как сохранение волного действия.

Уравнение выражающее сохранение адиабатического инварианта становится особенно простым в случае когда петля однородна и отношение плотностей внутри и вне петли не меняется со временем. В этом случае  $\omega = \pi C_k / L$  и из сохранения адиабатического инварианта следует что амплитуда колебаний пропорциональна  $\rho_i^{-1/4}$ .

### 3.11.1b. Вычисление $\delta\xi_r$ и $\delta P$

Уравнение (3.11.13) определяет эволюцию  $S_0$  и, следовательно, амплитуду колебаний. Однако это уравнение не является замкнутым. Для того чтобы его замкнуть необходимо выразить  $\delta S$  и  $\delta P$  через  $S_0$ . Из уравнения (3.7.2) следует что  $U$  порядка  $\nu C_{kh}$ . Также имеется оценка  $\partial S_0 / \partial t \sim \nu \omega S_0$ . Это означает что учёт течения и производной по времени от  $S_0$  при описании движения плазмы в переходном слое даёт поправки порядка  $\nu$  к выражениям для  $\delta S$  и  $\delta P$ . Поскольку правые части уравнения (3.11.13) необходимо вычислить только в главном порядке по  $\nu$ , величины  $\delta S$  и  $\delta P$  также надо вычислить в том же порядке. Это означает что течением плазмы и производной по времени от  $S_0$  можно пренебречь при вычислении  $\delta S$  и  $\delta P$  и использовать квази-стационарное описание движения плазмы в переходном слое. Единственной разницей между стационар-

ным и квази-стационарным описанием является то, что в первом описании коэффициенты уравнений описывающих движение плазмы не зависят от времени, то во втором они зависят от времени как от параметра. Теперь можно использовать результаты полученные в главе 3.9 в стационарном случае. Однако исследование в главе 3.9 было проведено в предположении что  $\rho_e/\rho_i$  не зависит от  $z$ . Поскольку в настоящем разделе это предположение не делается, необходимо несколько модифицировать анализ. В дальнейшем дадим краткое описание анализа проделанного в главе 3.9 и изменений сделанных в нём.

Также как и в главе 3.9 будем использовать квази-Лагранжево описание и рассматривать колебания индивидуальных магнитных линий. Они описываются задачей на собственные значения

$$V_A^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\omega_A^2 w, \quad w = 0 \text{ at } z = \pm L/2. \quad (3.11.14)$$

В этом уравнении  $\omega_A^2$  — квадрат альфвеновской частоты. Заметим что  $V_A$  и  $w$  являются функциями  $t$ ,  $r$  и  $z$ , а  $\omega_A^2$  — функция  $t$  и  $r$ . Собственные значения этой задачи действительны и образуют монотонно возрастающую последовательность  $\omega_{A1}^2 < \omega_{A2}^2 < \dots$ , причём  $\omega_{An}^2 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. напр. Coddington and Levinson 1955). Легко показать что все собственные значения положительны. Любая функция  $g(z)$  квадратично интегрируемая на интервале  $[-L/2, L/2]$  может быть разложена в обобщённый ряд Фурье

$$g(t, r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t, r) w_n(t, r, z), \quad (3.11.15)$$

где  $w_n(t, r, z)$  — собственная функция граничной задачи (3.11.14) соответствующая собственному значению  $\omega_{An}^2(t, r)$ . Очевидно что все собственные функции  $w_n$  могут быть выбраны действительными. Собственные функции соответствующие разным собственным значениям ортогональны с весом  $V_A^{-2}(t, r, z)$ . К тому же их можно нормализовать так что они удовлетворяют соотношению

$$\int_{-L/2}^{L/2} V_A^{-2} w_m w_n dz = \delta_{mn}, \quad (3.11.16)$$

где  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера. Если  $g(z)$  имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет граничным условиям  $g(\pm L/2) = 0$ , то сумма в уравнении (3.11.15) сходится равномерно и его можно дважды почленно

дифференцировать (см. напр. Titchmarsh 1946, Naimark 1967). Коэффициенты Фурье даются выражениями

$$g_n = \int_{-L/2}^{L/2} V_A^{-2}(z)g(z)w_n(z) dz. \quad (3.11.17)$$

Глобальное изгибное колебание находится в резонансе с  $n$ -ой гармоникой локальных альвеновских колебаний на резонансной поверхности определяемой уравнением  $r = r_n$  если удовлетворяется условие  $\omega_{An}^2(r_n) = \omega^2$ . Поскольку  $\omega_{An}^2 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , существует только конечное число резонансных альвеновских гармоник. Наблюдения показывают что, в большинстве случаев, доминирует фундаментальная гармоника изгибных колебаний, так что амплитуда колебаний определяется фундаментальной гармоникой. De Mortel and Brady (2007) сообщили о наблюдениях изгибных колебаний корональных петель с узлом. Это может указывать на то что, в данном случае, наблюдались колебания в которых доминировал первый обертон. Однако De Mortel and Brady (2007) отметили что присутствие узла могло быть наблюдательных эффектом связанным с тем что петли были неплоскими. Такая возможность была рассмотрена в разделе 3.5.6. В соответствии с этим в дальнейшем рассматриваем только фундаментальную гармонику изгибных колебаний.

Когда  $\rho_i(z) > \rho_e(z)$  при  $z \in [-L/2, L/2]$  имеем  $V_{Ai}(z) < C_k(z) < V_{Ae}(z)$  при  $z \in [-L/2, L/2]$ . В этом случае с помощью осцилляционной теоремы (см. напр. Coddington and Levinson 1955), можно доказать что  $\omega_{A1}^2(R - \ell/2) < \omega^2 < \omega_{A1}^2(R + \ell/2)$ , откуда следует что имеется  $r_1 \in [R - \ell/2, R + \ell/2]$  такое что  $\omega_{A1}^2(r_1) = \omega^2$ , т.е. всегда есть по крайней мере одна резонансная позиция в переходном слое. Из осцилляционной теоремы также следует что, поскольку  $V_A(r)$  — монотонно возрастающая функция,  $\omega_{An}^2(r)$  также монотонно возрастающая функция при любом  $n$ . После этого немедленно заключаем что, если имеются  $r_m$  и  $r_n$  такие что  $\omega_{Am}^2(r_m) = \omega^2$ ,  $\omega_{An}^2(r_n) = \omega^2$  и  $m < n$ , то имеется  $r_k$  такое что  $\omega_{Ak}^2(r_k) = \omega^2$  при любом  $k$  удовлетворяющем условию  $m < k < n$ , и  $r_n < r_k < r_m$ .

Нетрудно проверить что выражение для  $\delta P$  полученное в главе 3.9 остаётся справедливым:

$$\delta P = (\ell/R)\epsilon^2 Q_i(t, z)[1 + O(\nu)]. \quad (3.11.18)$$

Для вычисления  $\delta\xi_r$  раскладываем  $\xi_r$  в обобщённый ряд Фурье

$$\xi_r = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n w_n. \quad (3.11.19)$$

Заметим что глобальное изгибное колебание находится в резонансе с  $n$ -ой гармоникой локальных альвеновских колебаний когда имеется  $r_n \in [R - \ell/2, R + \ell/2]$  такое что  $\omega_{An}^2(r_n) = \omega^2$ . В главе 3.9 найдено что в этом случае скачок  $\xi_n$  поперёк диссипативного слоя охватывающего резонансную поверхность  $r = r_n$  даётся выражением

$$[[\xi_n]] = -\frac{\pi i \Psi_n(r_n)}{R^2 |\Delta_n|}. \quad (3.11.20)$$

Здесь  $\Psi_n$  —  $n$ -ый коэффициент Фурье функции  $\Psi = P/\rho t$ ,

$$\Delta_n = -\left. \frac{\partial \omega_{An}^2}{\partial r} \right|_{r=r_n}. \quad (3.11.21)$$

Дальнейший анализ не совпадает с анализом в главе 3.9. Принимая во внимание что функция  $w_n(r)$  непрерывна получим из уравнений (3.11.19) и (3.11.20) что скачок  $\xi_r$  поперёк  $n$ -го диссипативного слоя равен

$$[[\xi_r]]_n = -\frac{\pi i \Psi_n(r_n) w_n(r_n)}{R^2 |\Delta_n|}. \quad (3.11.22)$$

Поскольку  $P = O(\epsilon^2)$ , из уравнения (3.11.12) следует что, в приближении тонкой трубки,  $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ . Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} = -i\xi_\varphi, \quad (3.11.23)$$

где  $\xi_\varphi$  —  $\varphi$ -компонента вектора  $\boldsymbol{\xi}$ . В главном приближении по малому параметру  $\nu$ ,  $\varphi$ -компонента уравнения (3.7.13) принимает форму

$$V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial z^2} + \omega^2 \xi_\varphi = \frac{iP}{\rho R}. \quad (3.11.24)$$

Разлагая обе части в ряды Фурье и используя уравнение (3.11.14) получим

$$\xi_{\varphi n} = \frac{i\Psi_n}{R(\omega^2 - \omega_{An}^2)}. \quad (3.11.25)$$

Это уравнение справедливо при  $r \neq r_n$ . Используя этот результат и принимая во внимание что  $r \approx R$  в переходном слое преобразуем уравнение (3.11.23) к виду

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} = \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n w_n}{\omega^2 - \omega_{An}^2}. \quad (3.11.26)$$



Если имеется в точности  $N$  резонансов то это уравнение справедливо при  $r \neq r_n, n = 1, \dots, N$ , где  $r_N < r_{N-1} < \dots < r_1$ . Из этого уравнения следует что при любом  $\varepsilon > 0$ ,

$$\xi_r(r) = \xi_r(R + \ell/2) - \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_r^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r') w_n(r') dr'}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r')},$$

$$r_1 + \varepsilon \leq r \leq R + \ell/2, \quad (3.11.27)$$

$$\xi_r(r) = C + \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^r \frac{\Psi_n(r') w_n(r') dr'}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r')}, \quad r_2 + \varepsilon \leq r \leq r_1 - \varepsilon, \quad (3.11.28)$$

где  $C$  и  $a$  – постоянные, а  $r_2 + \varepsilon < a < r_1 - \varepsilon$ . Используя эти результаты получим

$$\begin{aligned} [[\xi_r]]_1 = \xi_r(R + \ell/2) &- C - \frac{1}{R^2} \mathcal{P} \int_a^{R+\ell/2} \frac{\Psi_1(r) w_1(r) dr}{\omega^2 - \omega_{A1}^2(r)} \\ &- \frac{1}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \int_a^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r) w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)}, \end{aligned} \quad (3.11.29)$$

где  $\mathcal{P}$  обозначает главную часть Каши интеграла. Сравнивая это выражение с уравнением (3.11.22) находим

$$\begin{aligned} C = \xi_r(R + \ell/2) &- \frac{1}{R^2} \mathcal{P} \int_a^{R+\ell/2} \frac{\Psi_1(r) w_1(r) dr}{\omega^2 - \omega_{A1}^2(r)} \\ &- \frac{1}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \int_a^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r) w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} + \frac{\pi i \Psi_1(r_1) w_1(r_1)}{R^2 |\Delta_1|}. \end{aligned} \quad (3.11.30)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.11.28) получим выражение для  $\xi_r$  справедливое при  $r_2 < r \leq R + \ell/2$ ,

$$\begin{aligned} \xi_r(r) = \xi_r(R + \ell/2) &- \frac{1}{R^2} \left( \mathcal{P} \int_r^{R+\ell/2} \frac{\Psi_1(r) w_1(r') dr'}{\omega^2 - \omega_{A1}^2(r')} \right. \\ &\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \int_r^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r) w_n(r') dr'}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r')} - \frac{\pi i \Psi_1(r_1) w_1(r_1)}{|\Delta_1|} \right). \end{aligned} \quad (3.11.31)$$

Продолжая эту процедуру в конце концов получим выражение для  $\xi_r$  справедливое при  $R - \ell/2 \leq r \leq R + \ell/2$ ,

$$\begin{aligned} \xi_r(r) = \xi_r(R + \ell/2) &- \frac{1}{R^2} \left( \sum_{n=1}^N \mathcal{P} \int_r^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r) w_n(r') dr'}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r')} \right. \\ &\left. + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_r^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r) w_n(r') dr'}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r')} - \pi i \sum_{n=1}^N \frac{\Psi_n(r_n) w_n(r_n)}{|\Delta_n|} \right). \end{aligned} \quad (3.11.32)$$

Из этого уравнения следует что

$$\begin{aligned} \delta\xi_r = & -\frac{1}{R^2} \left( \sum_{n=1}^N \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r)w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} \right. \\ & \left. + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{\Psi_n(r)w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} - \pi i \sum_{n=1}^N \frac{\Psi_n(r_n)w_n(r_n)}{|\Delta_n|} \right). \end{aligned} \quad (3.11.33)$$

### 3.11.1с. Уравнение определяющее эволюцию амплитуды

Используем теперь уравнения (3.11.18) и (3.11.33) для того чтобы выразить  $\delta S$  и  $\delta P$  через  $S_0$ . Из уравнений (3.7.18), (3.11.1) и (3.11.5) следует что

$$\epsilon^2 Q_i = \frac{\omega^2}{2} R(\rho_i - \rho_e) S_0 \exp(i\nu^{-1}\Theta) [1 + O(\nu)]. \quad (3.11.34)$$

Подставляя этот результат в (3.11.18) получим

$$\delta P = \frac{\ell\omega^2}{2} (\rho_i - \rho_e) S_0 \exp(i\nu^{-1}\Theta) [1 + O(\nu)]. \quad (3.11.35)$$

Изменение  $P$  поперёк переходного слоя порядка  $\nu$ . Поскольку величина  $\delta S$  вычисляется в главном приближении по малому параметру  $\nu$ , можно положить  $P = \epsilon^2 Q_i$  при вычислении  $\delta S$ . Таким образом можно подставить

$$\Psi = \frac{\omega^2 R}{2\rho_t} (\rho_i - \rho_e) S_0 \exp(i\nu^{-1}\Theta) \quad (3.11.36)$$

в уравнение (3.11.33). После этого, вводя функцию

$$\Phi = \frac{\rho_i - \rho_e}{2\rho_t} S_0$$

и коэффициенты Фурье  $\Phi_n$ , получим что  $\delta S$  даётся выражением

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{\omega^2}{R} \left( \sum_{n=1}^N \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{\Phi_n(r)w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} \right. \\ & \left. + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{\Phi_n(r)w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} - \pi i \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n(r_n)w_n(r_n)}{|\Delta_n|} \right). \end{aligned} \quad (3.11.37)$$

Подставляя уравнения (3.11.35) и (3.11.37) в (3.11.13) получим с помощью

уравнения (3.11.14)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \omega \int_{-L/2}^{L/2} \frac{S_0^2}{C_k^2} dz \right) &= \frac{i\mu_0\omega^2}{2RB^2} \int_{-L/2}^{L/2} S_0 \\ &\times \left( \sum_{n=1}^N \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{[\rho_t(r)\omega_{An}^2(r) - \rho_e\omega^2]\Phi_n(r)w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} \right. \\ &+ \left. \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \frac{[\rho_t(r)(r) - \rho_e\omega^2]\Phi_n(r)w_n(r) dr}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} \right) dz \\ &- \frac{\pi\mu_0\omega^4}{2RB^2} \sum_{n=1}^N \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[\rho_t(r_n) - \rho_e]S_0\Phi_n(r_n)w_n(r_n)}{|\Delta_n|} dz. \end{aligned} \quad (3.11.38)$$

Обозначим через  $W_0(t, z)$  решение уравнения (3.11.7) удовлетворяющее граничным условиям (3.11.8) которое соответствует фундаментальной моде. Без ограничения общности можно считать что  $W_0$  — действительная функция. Поскольку собственная функция соответствующая фундаментальной моде не имеет нулей, можно считать что  $W_0 > 0$ . Наконец, поскольку собственную функцию можно умножать на произвольную функцию  $t$ , можно положить  $\max(W_0) = 1$ , где максимум вычисляется по отношению к  $z$  при фиксированном  $t$ . Общее решение соответствующее фундаментальной моде даётся выражением

$$S_0(t, z) = A(t)W_0(t, z) \exp[iF(t)], \quad (3.11.39)$$

где  $A(t) > 0$  и  $F(t)$  — действительная функция. Поскольку  $\max|S_0| = A$ , функция  $A(t)$  является мгновенной амплитудой колебаний при фиксированном  $t$ . Из уравнения (3.11.17) и определения альвеновской скорости следует что

$$\Phi_n = \int_{-L/2}^{L/2} V_A^{-2} \Phi w_n dz = \frac{\mu_0}{2B^2} A e^{iF} \int_{-L/2}^{L/2} (\rho_i - \rho_e) W_0 w_n dz. \quad (3.11.40)$$

Подставляя уравнения (3.11.39) и (3.11.40) в уравнение (3.11.38) получим

$$\frac{d(\omega I A^2)}{dt} = -\Gamma A^2, \quad (3.11.41)$$

$$\frac{dF}{dt} = \Upsilon, \quad (3.11.42)$$

где

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} (\rho_i + \rho_e) W_0^2 dz, \quad (3.11.43)$$

$$\Gamma = -\frac{\pi\mu_0\omega^4}{2RB^2} \sum_{n=1}^N \int_{-L/2}^{L/2} (\rho_i - \rho_e) W_0 w_n(r_n) dz \times \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[\rho_t(r_n) - \rho_e] W_0 w_n(r_n)}{|\Delta_n|} dz, \quad (3.11.44)$$

$$\Upsilon = \frac{\mu_0\omega}{4RB^2I} \left\{ \sum_{n=1}^N \mathcal{P} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \left( \int_{-L/2}^{L/2} (\rho_i - \rho_e) W_0 w_n(r_n) dz \times \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[\rho_t(r)\omega_{An}^2(r) - \rho_e\omega^2] W_0 w_n(r)}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} dz \right) dr + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \left( \int_{-L/2}^{L/2} (\rho_i - \rho_e) W_0 w_n(r_n) dz \times \int_{-L/2}^{L/2} \frac{[\rho_t(r)\omega_{An}^2(r) - \rho_e\omega^2] W_0 w_n(r)}{\omega^2 - \omega_{An}^2(r)} dz \right) dr \right\}. \quad (3.11.45)$$

Множитель  $\exp[iF(t)]$  описывает небольшое изменение фазы колебаний. Поскольку основной интерес представляет зависимость амплитуды от времени, в дальнейшем используем только уравнение (3.11.41).

### 3.11.2. Изгибные колебания корональных петель с барометрическим распределением плотности

#### 3.11.2а. Изгибные колебания статических корональных петель

Для того чтобы проверить справедливость уравнения (3.11.41) применим его к изучению затухания изгибных колебаний статических корональных петель и сравним с результатами полученными ранее. Для статических петель уравнение (3.11.41) сводится к

$$\frac{dA}{dt} = -\gamma A, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{2\omega I}, \quad (3.11.46)$$

так что колебания затухают экспоненциально с декрементом  $\gamma$ . Введём  $\zeta = \rho_i(L/2)/\rho_e(L/2)$ . Теперь сделаем то же предположение что и в главе 3.9, именно что  $\rho_i(z)/\rho_e(z) = \zeta$  и  $\rho_t(r, z) = f(r)\rho_i(z)$ , где  $f(r)$  — монотонно убывающая функция,  $f(R-\ell/2) = 1$ ,  $f(R+\ell/2) = 1/\zeta$ . В частности, такое невозмущённое состояние получим если предположим что плазма

изотермическая с равными температурами внутри и вне петли и используем барометрическую формулу для плотности. Как показано в главе 3.9, когда  $\rho_t(r, z) = f(r)\rho_i(z)$  можно выбрать  $w_n$  независимой от  $r$ , а зависимость собственного значения от  $r$  даётся выражением

$$\omega_{An}^2(r) = \frac{\omega_{An}^2(R - \ell/2)}{f(r)}. \quad (3.11.47)$$

В дальнейшем предполагаем что имеется только одна резонансная поверхность  $r = r_1$ , так что  $N = 1$  в уравнениях (3.11.44) и (3.11.45). Уравнение (3.11.7) принимает вид

$$\frac{2B^2}{\mu_0(\zeta + 1)\rho_e(z)} \frac{d^2 S_0}{dz^2} = -\omega^2 S_0. \quad (3.11.48)$$

Уравнение (3.11.14) для фундаментальной гармоники при  $r = r_1$  принимает вид

$$\frac{B^2}{\mu_0 \zeta \rho_e(z) f(r_1)} \frac{d^2 w_1(r_1)}{dz^2} = -\omega_{A1}^2(r_1) w_1(r_1). \quad (3.11.49)$$

Очевидно что условие резонанса  $\omega_{A1}^2(r_1) = \omega^2$  удовлетворяется только в том случае когда коэффициенты при вторых производных в уравнениях (3.11.48) и (3.11.49) совпадают. Это условие даёт

$$f(r_1) = \frac{\zeta + 1}{2\zeta}. \quad (3.11.50)$$

Подставляя уравнение (3.11.47) в уравнение (3.11.21) и используя уравнение (3.11.50) получим

$$\Delta_1 = \frac{2\zeta\omega^2 f'(r_1)}{\zeta + 1}. \quad (3.11.51)$$

Поскольку  $W_0$  и  $w_1(r_1)$  – собственные функции одной и той же задачи на собственные значения соответствующие одному и тому же собственному значению, имеем  $W_0(z) = w_1(r_1, z)$ . Используя этот результат и уравнение (3.11.51) преобразуем выражение для  $\gamma$  к виду

$$\gamma = \frac{\pi\mu_0\omega(\zeta - 1)^2}{16\zeta RB^2 |f'(r_1)|} \int_{-L/2}^{L/2} \rho_e(z) w_1^2(r_1, z) dz. \quad (3.11.52)$$

Используя уравнение (3.11.16) получим

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \rho_e(z) w_1^2(r_1, z) dz \\ &= \frac{2B^2}{\mu_0(\zeta + 1)} \int_{-L/2}^{L/2} V_A^{-2}(r_1, z) w_1^2(r_1, z) dz = \frac{2B^2}{\mu_0(\zeta + 1)}. \end{aligned} \quad (3.11.53)$$

Подставляя этот результат в уравнение (3.11.52) находим

$$\gamma = \frac{\pi\omega(\zeta - 1)^2}{8\zeta(\zeta + 1)R|f'(r_1)|}. \quad (3.11.54)$$

Это выражение совпадает с выражением для  $\gamma$  определяемым уравнением (3.9.76) если подставить в это уравнение  $\Delta_1$  определяемое уравнением (3.11.51). Когда  $f(r)$  – линейная функция задаваемая выражением

$$f(r) = \frac{\zeta + 1}{2\zeta} - \frac{\zeta - 1}{\zeta\ell}(R - r), \quad (3.11.55)$$

то выражение для  $\gamma$  сводится к

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\pi\ell(\zeta - 1)}{8R(\zeta + 1)}, \quad (3.11.56)$$

Для синусоидального профиля плотности определяемого уравнением

$$f(r) = \frac{\zeta + 1}{2\zeta} - \frac{\zeta - 1}{2\zeta} \sin \frac{\pi(R - r)}{\ell}, \quad (3.11.57)$$

получим из уравнения (3.11.50) что  $r_1 = R$ . Тогда уравнение (3.11.54) сводится к

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\ell(\zeta - 1)}{4R(\zeta + 1)} \quad (3.11.58)$$

ранее полученному в разделе 3.8.5 (см. уравнение (3.8.91)).

### 3.11.2b. Изгибные колебания охлаждающихся корональных петель

Теперь рассмотрим колебания охлаждающихся корональных петель. Снова предположим что имеется только одна резонансная поверхность определяемая уравнением  $r = r_1$ . Будем предполагать что плазма вне петли имеет постоянную температуру  $T_0$ , а внутри подвержена радиационному охлаждению. Следуя работам Aschwanden and Terradas (2008) и Morton and Erdélyi (2010) описываем изменение температуры внутри петли экспоненциальной функцией

$$T(t) = T_0 \exp(-t/t_{\text{cool}}). \quad (3.11.59)$$

Уменьшение температуры плазмы вызывает уменьшение плотности внутри петли. В соответствии с уравнением сохранения массы уменьшение плотности приводит к появлению течения, так что плазма внутри петли уже не находится в гидростатическом равновесии и зависимость плотности от

высоты не описывается барометрической формулой. Напомним что невозможная плотность внутри петли и скорость течения связаны уравнением (3.7.2). Скорость течения  $U$  определяется уравнением движения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial z} = -g \left( \cos \alpha + \frac{H(t)}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial z} \right), \quad (3.11.60)$$

где  $\rho_i$  — плотность внутри петли,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\alpha$  — угол между касательной к оси петли и вертикальным направлением и  $H(t)$  — шкала высот определяемая выражением

$$H(t) = \frac{k_B T(t)}{mg}. \quad (3.11.61)$$

Здесь  $k_B$  — постоянная Больцмана и  $m$  — средняя масса частицы плазмы. В солнечной атмосфере  $g \approx 274 \text{ m s}^{-2}$ . Из уравнения (3.7.2) следует оценка  $U \sim L/t_{\text{cool}}$ . Полагая  $L \sim 100 \text{ Mm}$  и  $t_{\text{cool}} \sim 10^3 \text{ s}$  получим  $U \sim 10^5 \text{ m s}^{-1}$ . Это значение можно рассматривать как верхний предел скорости течений наблюдаемых в корональных петлях (см. напр. Schrijver et al. 1999; Ofman and Wang 2008), где типичные значения варьируются от  $4 \times 10^4$  до  $1.2 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ . После этого получим что левая часть уравнения (3.11.60) порядка  $U^2/L \sim 100 \text{ m s}^{-2}$ . Используя эту оценку находим что отношение левой части уравнения (3.11.60) к его правой части не превышает  $1/3$ , т.е. оно достаточно мало. Из этой оценки следует что, пренебрегая левой частью уравнения (3.11.60) получим достаточно хорошее приближенное описание изменения плотности внутри петли. После этого из уравнения (3.11.60) немедленно следует барометрическая формула

$$\rho_i(t, z) = \rho_f \exp \left( -\frac{L}{\pi H(t)} \cos \frac{\pi z}{L} \right), \quad (3.11.62)$$

где  $\rho_f$  — плотность плазмы внутри петли у её основания предполагаемая постоянной. Поскольку температура окружающей плазмы не меняется, плотность вне петли даётся выражением

$$\rho_e(z) = \frac{\rho_f}{\zeta} \exp \left( -\frac{L}{\pi H_0} \cos \frac{\pi z}{L} \right), \quad (3.11.63)$$

где  $H_0 = H(0)$ . Далее, предполагаем что плотность в переходном слое является линейной функцией радиальной координаты,

$$\rho_t(t, r, z) = \frac{1}{2} [\rho_i(t, z) + \rho_e(z)] + [\rho_i(t, z) - \rho_e(z)] \frac{R - r}{\ell}. \quad (3.11.64)$$

Как видим  $\rho_t = (\rho_i + \rho_e)/2$  когда  $r = R$ , так что  $V_A(R, z) = C_k(z)$ . Из этого следует что уравнение (3.11.14) совпадает с уравнением (3.11.7) когда  $r = R$  и, следовательно,  $\omega_{A1}^2(R) = \omega^2$ . Таким образом заключаем что  $r_1 = R$  и, как и в предыдущем разделе, величина  $W_0(z)/w_1(R, z)$  постоянна. Напомним что рассматривается только фундаментальная мода. Поскольку невозмущённое состояние симметрично относительно вершины,  $W_0(z)$  является чётной функцией. Тогда  $W_0(z)$  принимает максимальное значение при  $z = 0$  и условие  $\max(W_0) = 1$  сводится к  $W_0(0) = 1$ . Используя это условие получим

$$w_1(R, z) = w_1(R, 0)W_0(z). \quad (3.11.65)$$

Из уравнения (3.11.16) и соотношения  $V_A(R) = C_k$  следует что

$$w_1^2(R, 0) = \frac{2B^2}{\mu_0 I}. \quad (3.11.66)$$

Дифференцируя уравнение (3.11.14) по  $r$  и подставляя  $r = R$  получим с помощью (3.11.65)

$$\left( \frac{2\omega^2(\rho_i - \rho_e)}{\ell(\rho_i + \rho_e)} - \frac{\partial \omega_{A1}^2}{\partial r} \right) \frac{W_0}{C_k^2} = \frac{\partial^3 W_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\omega^2}{C_k^2} \frac{\partial W_0}{\partial r}. \quad (3.11.67)$$

Умножая это уравнение на  $W_0$ , интегрируя по  $z$  и используя граничные условия  $W_0(\pm L/2) = 0$  находим

$$\Delta_1 = - \frac{\partial \omega_{A1}^2}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \frac{2\omega^2 J}{\ell I}, \quad J = \int_{-L/2}^{L/2} (\rho_i - \rho_e) W_0^2 dz. \quad (3.11.68)$$

Используя уравнения (3.11.64)-(3.11.66) и (3.11.68) получим

$$\Gamma = \frac{\pi \omega^2 \ell |J|}{4R}. \quad (3.11.69)$$

Введём безразмерные переменные и параметры

$$\sigma = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_{\text{cool}}}, \quad \varpi = \frac{\omega L}{C_f}, \quad \kappa = \frac{L}{\pi H_0}, \quad (3.11.70)$$

где

$$C_f^2 = \frac{2\zeta B^2}{\mu_0 \rho_f (\zeta + 1)}. \quad (3.11.71)$$

Поскольку решается линейная задача, величина  $A$  может быть выбрана произвольно в начальный момент времени. Положим  $A(0) = 1$ , так что



$A(t)$  – отношение текущей и начальной амплитуды колебаний. Перепишем уравнение (3.11.7) с  $W_0$  подставленным вместо  $S_0$  в безразмерной форме

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial \sigma^2} + \frac{\varpi^2 W_0}{\zeta + 1} [\zeta \exp(-\kappa e^\tau \cos(\pi\sigma)) + \exp(-\kappa \cos(\pi\sigma))] = 0. \quad (3.11.72)$$

Поскольку рассматривается только фундаментальная мода и петля симметрична, то можно использовать граничные условия

$$\frac{\partial W_0}{\partial \sigma} = 0 \text{ при } \sigma = 0, \quad W_0 = 0 \text{ при } \sigma = 1/2, \quad (3.11.73)$$

вместо (3.11.8). Безразмерная форма уравнения (3.11.41) с  $\Gamma$  определяемым уравнением (3.11.69) имеет вид

$$\frac{d(\varpi \Pi_+ A^2)}{d\tau} = -\alpha \varpi^2 |\Pi_-| A^2, \quad (3.11.74)$$

где

$$\Pi_{\pm} = \int_0^{1/2} W_0^2 [\zeta \exp(-\kappa e^\tau \cos(\pi\sigma)) \pm \exp(-\kappa \cos(\pi\sigma))] d\sigma, \quad (3.11.75)$$

а параметр

$$\alpha = \frac{\pi \ell C_f t_{\text{cool}}}{4RL} \quad (3.11.76)$$

определяет относительную эффективность резонансного затухания и увеличения амплитуды вследствие охлаждения. При выводе выражения для  $\Pi_{\pm}$  было принято во внимание что  $W_0(z)$ ,  $\rho_i(z)$  и  $\rho_e(z)$  – чётные функции.

Как видим, зависимость амплитуды  $A$  от времени определяется тремя безразмерными параметрами,  $\alpha$ ,  $\zeta$  и  $\kappa$ . Функция  $A(t)$  была найдена численно для различных значений этих параметров. Результаты вычислений представлены на Рис. 3.11.1-3.11.6.

Введём критическое значение параметра  $\alpha$ ,  $\alpha_c$ , определяемое условием что при этом значении  $\alpha$  имеем  $A(1) = A(0)$ , т. е. амплитуда колебаний при  $t = t_{\text{cool}}$  равна начальной амплитуде. Также введём критическое значение толщины переходного слоя,  $\ell_c$ , определяемое выражением

$$\frac{\ell_c}{R} = \frac{4\alpha_c L}{\pi C_f t_{\text{cool}}}. \quad (3.11.77)$$

При  $\ell = \ell_c$  имеется баланс между увеличением амплитуды вследствие охлаждения и затуханием вследствие резонансного поглощения. С помощью Рис. 3.11.1-3.11.6 получим следующие значения  $\alpha_c$  для различных значений  $\zeta$  и  $\kappa$ :

**Таблица 1.** Значения  $\alpha_c$  для различных значений  $\zeta$  и  $\kappa$ .

|            |      |      |      |      |     |      |
|------------|------|------|------|------|-----|------|
| $\zeta$    | 3    | 3    | 3    | 10   | 10  | 10   |
| $\kappa$   | 0.5  | 1    | 2    | 0.5  | 1   | 2    |
| $\alpha_c$ | 0.13 | 0.22 | 0.19 | 0.08 | 0.1 | 0.09 |

Эта таблица показывает что  $\alpha_c$  уменьшается когда  $\zeta$  увеличивается. Зависимость  $\alpha_c$  от  $\kappa$  не монотонна и, при  $\zeta = 10$ , очень слабая.

Следует отметить немонотонное поведение точечной, пунктирной и штрих-пунктирных кривых на Рис. 3.11.2 и 3.11.3. Подобное поведение связано с тем фактом что, при  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 1$  и 2, функция  $\Pi_-(t)$  изменяет знак: в то время как  $\Pi_-(0) > 0$ ,  $\Pi_-(t) < 0$  при достаточно большом  $t$ , так что существует такое  $t_0$  что  $\Pi_-(t_0) = 0$ . Правая сторона уравнения (3.11.74) очень мала при  $t$  близком к  $t_0$ . При таких значениях  $t$  резонансное затухание мало и увеличение амплитуды вследствие охлаждения доминирует.

Отметим также что условие  $\rho_i(z) > \rho_e(z)$  при  $z \in [-L/2, L/2]$  нарушается при  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 1$  и 2, а также при  $\zeta = 10$  и  $\kappa = 2$ . Однако во всех случаях имеется только одна резонансная поверхность. По-видимому при достаточно большом  $t$  изгибная мода перестаёт быть захваченной и становится радиационной в случае когда  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 2$  и, возможно, также когда  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 1$ . Если это верно, то имеется также дополнительное затухания за счёт излучения волн. Однако, в приближении тонкой трубки, радиационное затухание очень мало и им можно пренебречь. По этой причине данная проблема не исследовалась.

Используя полученные результаты можно дать оценку толщины переходного слоя в петле колебания которой описаны в работе Aschwanden and Schrijver (2011). Особенностью наблюдавшихся колебаний было то что амплитуда практически не менялась в течении всего времени наблюдений. В событии описанном в данной работе петля имела приближённо полукруглую форму с высотой в вершине равной 37 Мм. Первоначальный период колебаний был  $\Pi_{\text{init}} = 395$  s. Наблюдение продолжалось приблизительно 3.6 периода. За это время температура упала с 0.8 МК до 0.4 МК. Если принять что температура убывала экспоненциально то получим  $t_{\text{cool}} \approx 2050$  s. Температура 0.8 МК соответствует шкале высот в 40 Мм. Таким образом, высота петли приближённо равна шкале высот и, следовательно,  $\kappa \approx 1$ . В статье также оценено что отношение плотности вне петли к плотности внутри петли было равно 0.08, так что можно приближённо принять  $\zeta = 10$ . В начальный момент температура плазмы была одной и той же внутри и

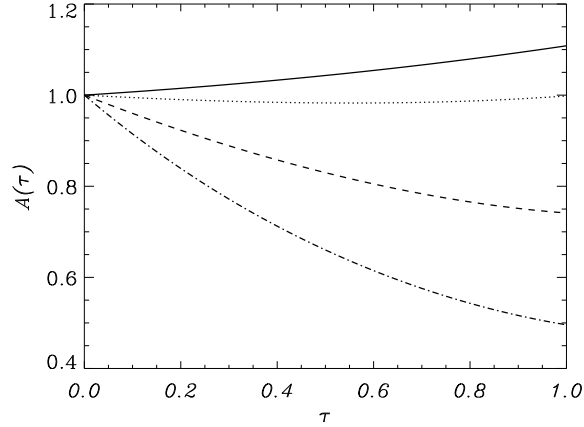


Рис. 3.11.1. Зависимость относительной амплитуды  $A$  от безразмерного времени  $\tau$  при  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 0.5$ . Сплошная, точечная, штриховая и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\alpha = 0, 0.13, 0.5$  и  $1.0$ .

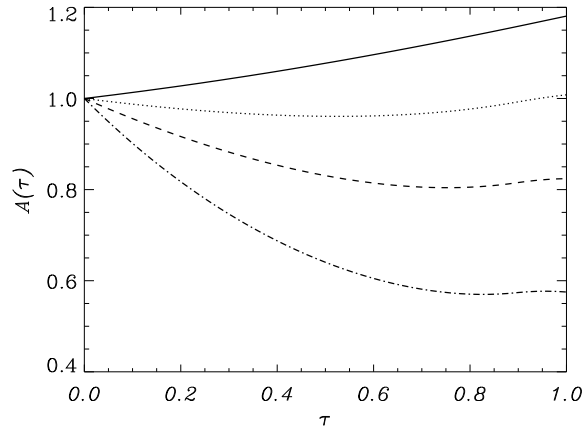


Рис. 3.11.2. То же что и на Рис. 3.11.1, но при  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 1$ . Сплошная, точечная, штриховая и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\alpha = 0, 0.22, 0.5$  и  $1.0$ .

вне петли и, следовательно,  $\rho_i(z)/\rho_e(z) = \text{const}$ . После этого из уравнения (3.11.72) следует что  $\varpi(0)$  не зависит от  $\zeta$ . С помощью численного решения задачи на собственные значения определяемой уравнением (3.11.72) и (3.11.73) найдено что  $\varpi(0) \approx 4.8$  при  $\kappa = 1$ . После этого, используя соотношение  $\varpi(0) = 2\pi L/\Pi_{\text{init}}C_f$ , находим  $L/C_f \approx 300$  s. Теперь из Таблицы 1 определяем что  $\alpha_c \approx 0.1$  при  $\zeta = 10$  и  $\kappa = 1$ . Подставляя эти значения в уравнение (3.11.77) получим  $\ell_c/R \approx 0.02$ . На основе того что колебания практически не затухали, Aschwanden and Schrijver (2011) сделали вывод что резонансное затухание было очень слабым и, следовательно, переходный слой должен быть очень тонким. Как видим, учёт усиления колебаний вследствие охлаждения не влияет на данный вывод.

Способность охлаждения усиливать колебания и противодействовать

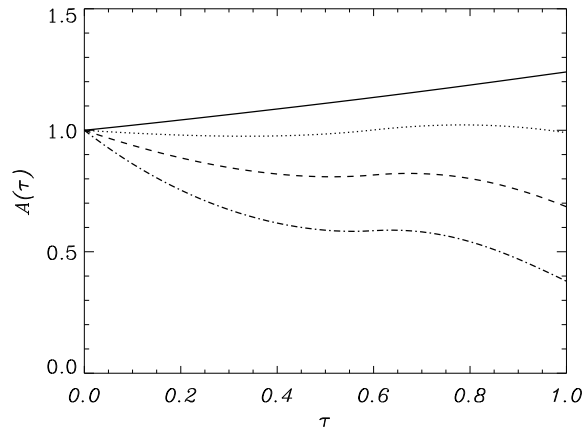


Рис. 3.11.3. То же что и на Рис. 3.11.1, но при  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 2$ . Сплошная, точечная, штриховая и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\alpha = 0, 0.19, 0.5$  и  $1.0$ .

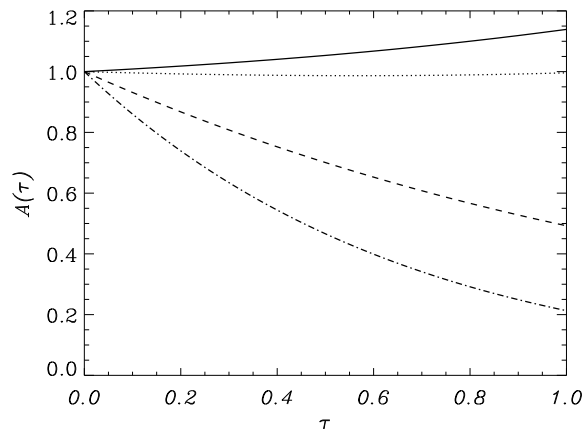


Рис. 3.11.4. То же что и на Рис. 3.11.1, но при  $\zeta = 10$  and  $\kappa = 0.5$ . Сплошная, точечная, штриховая и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\alpha = 0, 0.08, 0.5$  и  $1.0$ .

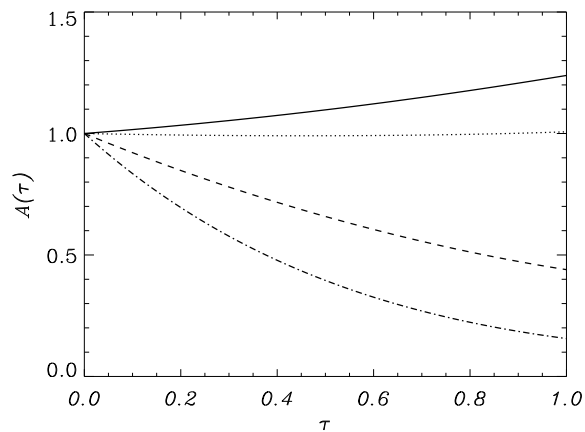


Рис. 3.11.5. То же что и на Рис. 3.11.1, но при  $\zeta = 10$  and  $\kappa = 1$ . Сплошная, точечная, штриховая и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\alpha = 0, 0.1, 0.5$  и  $1.0$ .

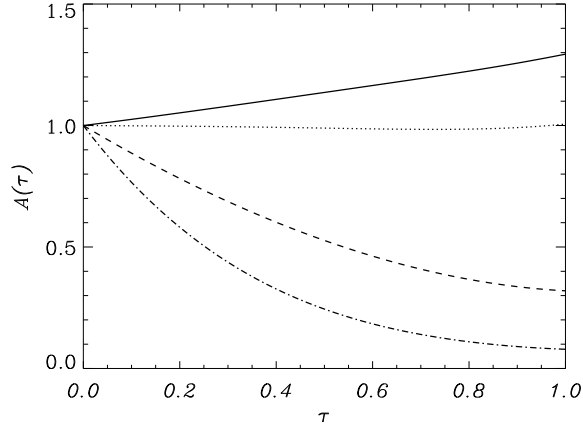


Рис. 3.11.6. То же что и на Рис. 3.11.1, но при  $\zeta = 10$  и  $\kappa = 2$ . Сплошная, точечная, штриховая и штрих-пунктирная кривые соответствуют  $\alpha = 0, 0.08, 0.5$  и  $1.0$ .

затуханию вследствие резонансного затухания сильно зависит от параметров колеблющейся петли и от характерного времени охлаждения. В качестве примера рассмотрим петлю с  $\zeta = 3$  и  $\kappa = 1$ . В этом случае  $\alpha_c \approx 0.22$  и, поскольку при равных температурах внутри и вне петли, частота колебаний не зависит от  $\zeta$ , можно положить  $\varpi(0) \approx 4.8$ . Подставляя эти числа в уравнение (3.11.77) получим

$$\frac{\ell_c}{R} \approx 0.21 \frac{\Pi_{\text{init}}}{t_{\text{cool}}}. \quad (3.11.78)$$

Если теперь положить  $t_{\text{cool}} = \Pi_{\text{init}}$ , то получим  $\ell_c/R \approx 0.21$ , что находится вполне в диапазоне характерных значений для  $\ell/R$  для неохлаждающихся петель (см. напр. Goossens et al. 2002). Заметим что исследование в этом разделе произведено при условии что  $t_{\text{cool}} \gg \Pi_{\text{init}}$ , так что не понятно остаётся ли уравнение (3.11.77) справедливым при  $t_{\text{cool}} = \Pi_{\text{init}}$ . По-видимому, при таком быстром затухании задачу надо решать численно без использования ВКБ приближения.

### 3.11.3. Выводы

В настоящей главе было исследовано резонансное затухание изгибных колебаний охлаждающихся корональных петель. В качестве модели петли была использована прямая магнитная трубка состоящая из центральной области и переходного слоя. Магнитное поле везде имеет постоянную величину и направление. В центральной области и вне петли плотность меняется только вдоль петли, а в переходном слое она меняется также в радиальном направлении. К тому же плотность изменяется со временем. В

результате этого возникает течение плазмы вдоль петли. Движение плазмы описывается линеаризованными МГД уравнениями в приближении холодной плазмы. Используется приближение тонкой трубки. Для описания изгибных колебаний используются уравнения (3.7.23) и (3.7.24) выведенные в главе 3.7. Эти уравнения не являются замкнутыми поскольку, в дополнение к смещению оси петли, они содержат также скачки возмущения магнитного давления и смещения плазмы в радиальном направлении поперёк переходного слоя. Уравнение (3.7.23) являются замкнутыми только когда переходный слой отсутствует и петля имеет резкую границу.

Эффекты охлаждения и резонансного затухания исследованы в предположении что как время охлаждения так и время затухания много больше чем период колебаний. Второе предположение означает что используется приближение тонкого пограничного слоя. Два сделанных предположения позволяют использовать ВКБ приближение. С помощью этого метода и формул связи вычислены скачки поперёк переходного слоя возмущения магнитного давления и смещения плазмы в радиальном направлении. В результате получено замкнутое уравнение описывающее смещение оси петли в предположении что радиальная зависимость плотности в переходном слое линейная. После этого выведено уравнение описывающее зависимость от времени адиабатического инварианта для изгибных колебаний магнитной трубки. В том случае когда петля имеет резкую границу адиабатический инвариант сохраняется. Уравнение описывающее изменение адиабатического инварианта определяет эволюцию амплитуды колебаний.

Дополнительно было предположено что охлаждение происходит только внутри петли, петля имеет форму полукруга, начальная температура вне и внутри петли одна и та же и температура плазмы снаружи петли не изменяется. Зависимость плотности петли от высоты описывается барометрической формулой. Наконец, предполагалось, что температура внутри петли убывает экспоненциально. После этого уравнение описывающее эволюцию амплитуды записано в безразмерных переменных и содержит три безразмерных параметра: отношение плотностей внутри и вне петли в начальный момент времени,  $\zeta > 1$ , отношение высоты петли к шкале высот  $\kappa$  и параметр  $\alpha$  характеризующий эффективность резонансного поглощения. Последний параметр пропорционален отношению толщины переходного слоя  $\ell$  к радиусу поперечного сечения петли  $R$ .

Уравнение определяющее эволюцию амплитуды при различных зна-

чениях параметров  $\zeta$ ,  $\kappa$  и  $\alpha$  было решено численно. Наиболее интересным результатом является то что охлаждение петли приводит к увеличению амплитуды колебаний которое может компенсировать резонансное затухание. Этот эффект делает возможным существование незатухающих колебаний. Колебания считаются незатухающими если амплитуда в момент времени равный времени затухания  $t_{\text{cool}}$  равна начальной амплитуде. Значение  $\alpha$  соответствующее незатухающим колебаниям обозначено как  $\alpha_c$ , а соответствующее значение толщины переходного слоя через  $\ell_c$ . Величина  $\alpha_c$  дана в Таблице 1 для различных значений  $\zeta$  и  $\kappa$ . Эта величина возрастает с увеличением  $\zeta$ , в то время как зависимость от  $\kappa$  немонотонна. При  $\zeta = 10$ ,  $\alpha_c$  почти не зависит от  $\kappa$ . На основе численных результатов можно сделать вывод что усиление колебаний за счёт охлаждения петли не слишком эффективно. Усиление колебаний за счёт охлаждения может сбалансировать резонансное затухание петель с типичными значениями  $\ell/R$  ( $\ell/R \gtrsim 0.2$ ) только когда  $\zeta$  не слишком велико ( $\zeta \lesssim 3$ ) и охлаждение происходит очень быстро со временем охлаждения  $t_{\text{cool}}$  порядка периода колебаний.

### 3.12. Затухание изгибных колебаний корональных петель вследствие преобразования мод

#### 3.12.1. Анализ классической теории резонансного затухания

В настоящее время наиболее популярной теорией затухания изгибных колебаний является резонансное поглощение. Применение теории резонансного поглощения к описанию затухания изгибных колебаний корональных петель описано в главах 3.8–3.11.

В первых работах по резонансному затуханию изгибных колебаний использовалось идеальное МГД описание (см. напр. Sedláček 1971; Hollweg and Yang 1988). При этом затухание появляется благодаря наличию сингулярности на Римановой поверхности преобразования Лапласа когда оно продолжается с комплексной плоскости являющейся основным листом Римановой поверхности на неосновной лист. Хотя с математической точки зрения этот подход является абсолютно корректным, возникновение затухания выглядит как математический трюк поскольку все физические процессы происходящие в окрестности резонансной поверхности остаются за кадром.

Позже Goossens et al. (1992) предложили другой подход основан-

ный на использовании диссипативной МГД для описания движения плазмы в окрестности резонансной поверхности. Для вычисления декремента они использовали формулы связи впервые введённые в работе Sakurai et al. (1991). Основная идея этого подхода заключается в следующем. Диссипация важна только в тонком диссипативном слое охватывающем резонансную поверхность поскольку движение там характеризуется наличием больших градиентов. Вне диссипативного слоя движение плазмы описывается в рамках идеальной МГД. Решение линейных уравнений диссипативной МГД используется для вычисления скачков возмущения полного давления и нормальной компоненты скорости поперёк диссипативного слоя. В главе 2.4 получены выражения для этих скачков и указано что они называются формулами связи (см. уравнение (2.4.26)).

Вначале формулы связи были использованы для исследования резонансного поглощения волновой энергии в стационарной задаче где колебания в системе вызываются внешним источником энергии. Позже Goossens et al. (1992) использовали формулы связи для исследования затухания волн в цилиндрической геометрии. Фактически аналогичный подход был использован в работе Mok and Einaudi (1985) для исследования затухания поверхностных волн распространяющихся по тонкому переходному слою между двумя областями с однородной плазмой, хотя эти авторы не ввели понятие формул связи.

Mok and Einaudi (1985) были, по-видимому, первыми кто указал что решение в диссипативном слое полученное для стационарной задачи может быть использовано для описания диссипативных собственных МГД мод только в том случае когда диссипация не слишком мала. Для того чтобы точно сформулировать это условие прежде всего необходимо задать невозмущённое состояние. В дальнейшем будем рассматривать то же невозмущённое состояние что и в главе 2.4, а именно, магнитную трубку радиуса  $R$  и длины  $L \gg R$ . Напомним что в цилиндрических  $r, \varphi, z$  координатах с осью  $z$  совпадающих с осью трубки плотность плазмы определяется уравнением

$$\rho = \begin{cases} \rho_i, & r \leq R - \ell/2, \\ \rho_t(r), & R - \ell/2 \leq r \leq R + \ell/2, \\ \rho_e, & R + \ell/2 \leq r, \end{cases} \quad (3.12.1)$$

где  $\rho_i$  и  $\rho_e$  — постоянные,  $\rho_i > \rho_e$ , и  $\rho_t(r)$  — монотонно убывающая функция. Также предполагается что переходный слой тонкий,  $\ell \ll R$ . Таким



образом, используется приближение тонкой трубки и тонкого пограничного слоя (ТТТП). Кроме того используется приближение холодной плазмы.

Введём вязкое и магнитное числа Рейнольдса  $R_e = C_k \ell / \nu_v$  и  $R_m = C_k \ell / \nu_m$ . Напомним что  $\nu_v$  — кинематическая вязкость,  $\nu_m$  — коэффициент магнитной диффузии и  $C_k$  — фазовая скорость изгибных волн определяемая выражением

$$C_k^2 = \frac{2B^2}{\mu_0(\rho_i + \rho_e)}. \quad (3.12.2)$$

Для того чтобы охарактеризовать одновременное действие вязкости и конечной проводимости введём полное число Рейнольдса  $R_t$  определяемое уравнением

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_m}. \quad (3.12.3)$$

Тогда движение в диссипативном слое можно приближённо описывать решением полученным для стационарной задачи в том случае когда зависимость возмущений от координаты поперёк слоя является монотонной. Как показано в разделе 2.4.3, это имеет место при  $R_t < R_c = \epsilon^{-1}(R/\ell)^4$ , где  $\epsilon$  — отношение радиуса трубки  $R$  к длине волны. Ruderman et al. (1995) рассмотрели ту же задачу что и Mok and Einaudi (1985), но в случае когда условие  $R_t < R_c$  не выполняется. Было показано что, в то время как движение плазмы в диссипативном слое сильно отличается от движения в случае стационарной задачи, скорость затухания поверхностной волны не изменяется. Позже Tirry and Goossens (1996) обобщили этот анализ на случай цилиндрической геометрии. Они выразили решение в диссипативном слое через функции  $F_\Lambda$  и  $G_\Lambda$ . Используя этот результат они показали что формулы связи не зависят от  $\Lambda$  и остаются теми же самыми что и в стационарном случае.

В то время как использование формул связи в стационарной задаче абсолютно корректно, их использование в задаче с начальными значениями для описания затухания возмущений вызывает определённые сомнения. В качестве примера рассмотрим затухание изгибных колебаний корональных петель. Как было показано в главе 3.8, при не слишком ограничительных предположениях относительно начального возмущения, фундаментальная мода изгибных колебаний возникает из начального возмущения после переходного процесса с характерным временем равным периоду колебаний. Однако движение плазмы описывается нормальной модой диссипативной МГД адекватно только далеко от резонансной поверхности. Вблизи этой по-

верхности движение плазмы достаточно хорошо описывается нормальной модой только когда формируются пространственные масштабы порядка  $R_t^{-1/3}\ell$ . Это происходит после переходного периода с характерной длительностью порядка  $R_t^{1/3}$  умноженного на период колебаний (см. напр. Karpraff and Tataronis 1977, Poedts et al. 1990, Mann et al. 1995). Поскольку типичное значение  $R_t$  в солнечной короне равно  $10^{12}$ , это время порядка  $10^4$  периодов колебаний. С другой стороны, наблюдения показывают что характерное время затухания изгибных колебаний корональных петель равно нескольким периодам колебаний.

В главе 2.4 рассмотрено резонансное затухание изгибных волн распространяющихся по полубесконечной магнитной трубке. Было показано что амплитуда распространяющейся волны убывает экспоненциально с расстоянием от источника возмущений. Однако в численном моделировании в работе Pascoe et al. (2012) было найдено что волна не затухает экспоненциально. Вместо этого на достаточно малых расстояниях зависимость амплитуды от расстояния описывается Гауссовской функцией. И только на достаточно больших расстояниях эта зависимость становится экспоненциальной. Как уже было указано в главе 2.4, Hood et al. (2013) развили аналитическую теорию объясняющую данное поведение амплитуды волны.

Имеется полная аналогия между пространственным резонансным затуханием распространяющихся волн и затуханием со временем стоячих волн в магнитной трубке. Поэтому, по аналогии с распространяющимися волнами, можно ожидать что экспоненциальное затухание не является корректным описанием зависимости амплитуды стоячих волн от времени. Причиной этого является тот факт что экспоненциальное затухание стоячих волн было получено в предположении что возмущение описывается собственной модой диссипативной МГД. Как было показано выше, это предположение некорректно. Целью данной главы является построение аналитической теории описывающей затухание стоячих волн. Результаты этой теории будут затем сравниваться с результатами численного моделирования. В дальнейшем следуем работе Ruderman and Terradas (2013).

### 3.12.2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматриваем изгибные колебания прямой магнитной трубки длины  $L$ . Плотность плазмы постоянна во внутренней части трубки и вне трубки, и монотонно убывает в переходном слое. Используем приближение тонкой трубки и тонкого переходного слоя (ТТТП), а также приближение холодной плазмы. Для описания изгибных колебаний используем уравнения (3.7.23) и (3.7.24). В отсутствии течения эти уравнения сводятся к виду

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - C_k^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{\mathcal{L}}{\rho_i + \rho_e}, \quad (3.12.4)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\ell \rho_i}{R} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - V_{Ai}^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \frac{\delta P}{R} - \rho_e \left( \frac{\partial^2 \delta \xi_r}{\partial t^2} - V_{Ae}^2 \frac{\partial^2 \delta \xi_r}{\partial z^2} \right). \quad (3.12.5)$$

Напомним что здесь  $\eta$  — смещение плазмы в радиальном направлении внутри трубки где это смещение не зависит от радиальной переменной  $r$ ;  $\ell$  — толщина переходного слоя;  $\delta P$  и  $\delta \xi_r$  — скачки возмущения магнитного давления и радиального смещения плазмы поперёк переходного слоя. Поскольку используется приближение тонкого слоя, то величина  $\mathcal{L}$  вычисляется только в главном приближении по малому параметру  $\epsilon = \ell/R$ .

В дальнейшем рассматриваем линейно поляризованные изгибные колебания и полагаем  $\xi_r \propto \cos \varphi$ ,  $P \propto \cos \varphi$  и  $\xi_\varphi \propto -\sin \varphi$ . После этого уравнения линейной магнитной гидродинамики сводятся к системе уравнений (2.4.2)-(2.4.5) с  $\nu_v = 0$  и без множителя  $i$  в уравнениях (2.4.3) и (2.4.5). Нетрудно получить оценку что отношение левой части уравнения (2.4.5) к его правой части порядка  $\epsilon^2$ , так что левой части можно пренебречь. После этого, исключая  $b_r$  и  $b_\varphi$  из этих уравнений, получим систему

$$\frac{\partial(r\xi_r)}{\partial r} - \xi_\varphi = 0, \quad (3.12.6)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (3.12.7)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial z^2} = -\frac{P}{\rho r}. \quad (3.12.8)$$

заметим что  $\xi_r = \eta$  при  $r < R - \ell/2$ .

Предполагаем что магнитные линии заморожены в плотную фотоферную плазму, так что удовлетворяются граничные условия

$$\eta = \xi_r = \xi_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, L. \quad (3.12.9)$$

В дальнейшем рассматриваем только фундаментальную моду изгибных колебаний и полагаем что  $\eta$ ,  $\xi_r$ ,  $\xi_\varphi$  и  $P$  пропорциональны  $\sin(kz)$ , где  $k = \pi/L$ . После этого уравнения (3.12.4), (3.12.5), (3.12.7) и (3.12.8) переписутся в виде

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \omega^2\eta = \frac{\mathcal{L}}{\rho_i + \rho_e}, \quad (3.12.10)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2}\omega^2(\rho_i - \rho_e)\eta + \frac{\delta P}{R} - \frac{1}{2}\omega^2(\rho_i - \rho_e)\delta\xi_r, \quad (3.12.11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho k^2(C_k^2 - V_A^2)\xi_r, \quad (3.12.12)$$

$$\frac{\partial^2\xi_\varphi}{\partial t^2} + k^2V_A^2\xi_\varphi = -\frac{P}{\rho r}. \quad (3.12.13)$$

Уравнение (3.12.6) не меняется.

Как уже упоминалось, движение вдали от резонансной поверхности, в частности, движение вне переходного слоя, достаточно хорошо описывается собственной модой после переходного времени порядка периода колебаний. Таким образом, поле переходного времени, движение плазмы является гармоническим колебанием с частотой  $\omega = kC_k$  и амплитудой медленно затухающей вследствие резонансного затухания. Следовательно, можно использовать приближение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx -\omega^2 f. \quad (3.12.14)$$

Это приближение справедливо для  $\eta$ ,  $\xi_r$  и  $P$ , но, в общем случае, не годится для  $\xi_\varphi$  в переходном слое.

Необходимо также задать начальные условия. Будем предполагать что в начальный момент имеется внешнее воздействие на петлю которое возбуждает фундаментальную моду колебаний. Это, в частности, означает что начальное условие для  $\eta$  имеет вид

$$\eta = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = a\omega \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (3.12.15)$$

где  $a$  — положительная постоянная. В однородной части трубки  $\xi_\varphi = \eta$ , так что  $\partial\xi_\varphi/\partial t = a\omega$  при  $t = 0$ . Вне переходного слоя ( $r > R + \ell/2$ ) имеем  $\xi_\varphi = -\eta/r^2$ . Будем полагать что в неоднородном переходном слое  $\xi_\varphi = 0$  и  $\partial\xi_\varphi/\partial t = a\omega \operatorname{sgn}(R - r)$  при  $t = 0$ .

Уравнения (3.12.10)-(3.12.13) и начальные условия (3.12.14) и (3.12.15) используются в следующем разделе для вывода уравнения описывающего эволюцию  $\eta$  со временем.

### 3.12.3. Вывод уравнения описывающего эволюцию $\eta$

Для того чтобы вывести уравнение описывающее эволюцию  $\eta$  необходимо выразить  $\mathcal{L}$  через  $\eta$ . Как уже упоминалось, в однородной центральной области магнитной трубки  $\xi_r$  не зависит от  $r$ , так что  $\xi_r = \eta$  при  $r \leq R - \ell/2$ . В главе 3.7 показано что  $P$  является линейной функцией  $r$  и  $\delta\xi_r = O(\epsilon)$ . После этого из уравнения (3.12.12) следует что

$$P_i = \frac{1}{2}\omega^2 R(\rho_i - \rho_e)\eta + O(\epsilon), \quad (3.12.16)$$

где  $P_i = P$  при  $r = R - \ell/2$ . В главе 3.7 также показано что

$$\delta P \approx \epsilon P_i. \quad (3.12.17)$$

Из уравнений (3.12.16) и (3.12.17) следует что первый и второй члены в уравнении (3.12.11) взаимно сокращаются.

Теперь выразим  $\delta\xi_r$  через  $\eta$ . Для этого сначала найдём выражение для  $\xi_\varphi$  из уравнение (3.12.13). С помощью (3.12.16) и (3.12.17) перепишем уравнение (3.12.13) в приближённом виде

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial t^2} + k^2 V_A^2 \xi_\varphi = -\frac{\omega^2}{2\rho_t}(\rho_i - \rho_e)\eta \quad (3.12.18)$$

справедливым в неоднородном переходном слое. Решение этого уравнения удовлетворяющее начальным условиям (3.12.15) даётся выражением

$$\xi_\varphi = \frac{\omega R}{kV_A} \text{sgn}(R - r) \sin(kV_A t) - \kappa kV_A \int_0^t \eta(t - t') \sin(kV_A t') dt', \quad (3.12.19)$$

где

$$\kappa = \frac{\rho_i - \rho_e}{\rho_i + \rho_e}. \quad (3.12.20)$$

В дальнейшем полагаем что плотность является линейной функцией  $r$  в переходном слое,

$$\rho_t(r) = \frac{1}{\ell}[\rho_i(R + \ell/2 - r) - \rho_e(R - \ell/2 - r)]. \quad (3.12.21)$$

Используя уравнения (3.12.6) и (3.12.19) получим

$$\delta\xi_r = \frac{1}{R} \int_{R-\ell/2}^{R+\ell/2} \xi_\varphi dr = \frac{\epsilon R}{\kappa} F(\omega t) - \epsilon \omega \int_0^t G(\omega t') \eta(t - t') dt', \quad (3.12.22)$$

где

$$\begin{aligned}
F(x) = & -\frac{x}{6} \left( 2 \cos x - (1 + \kappa) \cos \frac{x}{\sqrt{1 + \kappa}} - (1 - \kappa) \cos \frac{x}{\sqrt{1 - \kappa}} \right) \\
& + \frac{x^2 - 2}{6} \left( 2 \sin x - \sqrt{1 + \kappa} \sin \frac{x}{\sqrt{1 + \kappa}} - \sqrt{1 - \kappa} \sin \frac{x}{\sqrt{1 - \kappa}} \right) \\
& + \frac{\kappa}{3} \left( \sqrt{1 + \kappa} \sin \frac{x}{\sqrt{1 + \kappa}} - \sqrt{1 - \kappa} \sin \frac{x}{\sqrt{1 - \kappa}} \right) \\
& - \frac{x^3}{6} \left( 2 \text{Ci}(x) - \text{Ci} \frac{x}{\sqrt{1 + \kappa}} - \text{Ci} \frac{x}{\sqrt{1 - \kappa}} \right), \tag{3.12.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(x) = & \sqrt{1 + \kappa} \sin \frac{x}{\sqrt{1 + \kappa}} - \sqrt{1 - \kappa} \sin \frac{x}{\sqrt{1 - \kappa}} \\
& - x \text{Ci} \frac{x}{\sqrt{1 + \kappa}} + x \text{Ci} \frac{x}{\sqrt{1 - \kappa}}. \tag{3.12.24}
\end{aligned}$$

Здесь  $\text{Ci}(x)$  – интегральный косинус определяемый выражениями

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du = \ln x + E - \int_0^x \frac{1 - \cos u}{u} du, \tag{3.12.25}$$

где  $E \approx 0.5772$  – постоянная Эйлера. С помощью уравнения (3.12.22) выразим  $\mathcal{L}$  через  $\eta$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2} \omega^2 (\rho_i - \rho_e) \left( \frac{a}{\kappa} F(\omega t) - \omega \int_0^t G(\omega t') \eta(t - t') dt' \right). \tag{3.12.26}$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.12.10) получим уравнение определяющее эволюцию  $\eta$ ,

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega^2 \eta = \frac{\epsilon \omega^3}{2} \int_0^t G(\omega t') \eta(t - t') dt' - \frac{\epsilon R \omega^2}{2} F(\omega t). \tag{3.12.27}$$

### 3.12.4. Резонансное затухание изгибных колебаний

Прежде всего исследуем асимптотическое поведение решения уравнения (3.12.27) при больших значениях  $t$ . Из уравнения (F.23) выведенного в Дополнении F следует что, при  $\pi \epsilon \omega t / 8 \sim 1$ , амплитуда колебаний пропорциональна  $e^{-\gamma t}$ , где

$$\gamma_d = \frac{\pi \epsilon \kappa \omega}{8} = \frac{\pi^2 \ell (\rho_i - \rho_e)}{4 R \Pi (\rho_i + \rho_e)}, \tag{3.12.28}$$

и  $\Pi = 2\pi/\omega$  – период колебаний. Это тот же результат который был получен в главах 3.8 и 3.9. Асимптотическая формула (3.12.28) используется

при  $\pi\epsilon\omega t/8 \sim 1$  и не используется для больших времён,  $\omega t \gg \epsilon^{-1}$ , поскольку, в соответствии с (F.23), уравнение (3.12.28) описывает экспоненциальное затухание амплитуды только при  $t \sim 8(\pi\epsilon\omega)^{-1}$ . При  $\omega t \gg \epsilon^{-1}$  член  $O(1/\omega t)$  в правой части уравнения (F.23) или сравним или даже много больше экспоненциального члена. Таким образом, уравнение (3.12.28) справедливо только при  $\pi\epsilon\omega t/8 \lesssim 1$ .

Уравнение (F.11) выражает решение уравнения (3.12.27) в виде интеграла по действительной оси. В принципе, это выражение может быть использовано для изучения зависимости  $\eta$  от времени. Однако оказывается что проще решить его численно. Для этого производная в левой части этого уравнения аппроксимировалась с помощью центральной разности, а для вычисления интеграла в правой части использовалась формула трапеций. Кроме того, решение задачи в той же постановке было получено с помощью численного решения линейных уравнений идеальной МГД. Интересно сравнить результаты полученные двумя методами. Эти результаты представлены на Рис. 3.12.1-3.12.6. Во всех расчётах принималось  $\zeta = \rho_i/\rho_e = 3$ , так что  $\kappa = 1/2$ . На Рис. 3.12.1-3.12.3 представлены результаты решения уравнения (3.12.27) вместе с результатами численного решения полной системы линейных уравнения идеальной МГД при  $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3$ . Определим время затухания  $t_d$  как время за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. На Рис. 3.12.1-3.12.3 зависимости  $\eta$  от  $t$  показаны на временном интервале приблизительно равном  $2t_d$ . Отметим что, в то время как сплошная кривая показывающая результаты численного интегрирования линейных МГД уравнений и пунктирная кривая показывающая решение уравнения (3.12.27) практически совпадают в течении первых нескольких периодов, амплитуда колебаний сплошной кривой немного меньше чем амплитуда колебаний пунктирной кривой на больших временах. По-видимому эта разница связана с предположениями сделанными при выводе уравнения (3.12.27). Этот результат служит дальнейшим подтверждением что уравнение (3.12.27) справедливо только при  $\omega t \lesssim \epsilon^{-1}$ . Отметим также небольшую разницу в периоде колебаний возникающую при увеличении  $\epsilon$ . Эта разница связана с тем что при прямом численном моделировании не используется приближение тонкой трубки и тонкого переходного слоя. Наличие переходного слоя приводит к увеличению периода колебаний и этот эффект становится более выраженным при увеличении толщины переходного слоя.

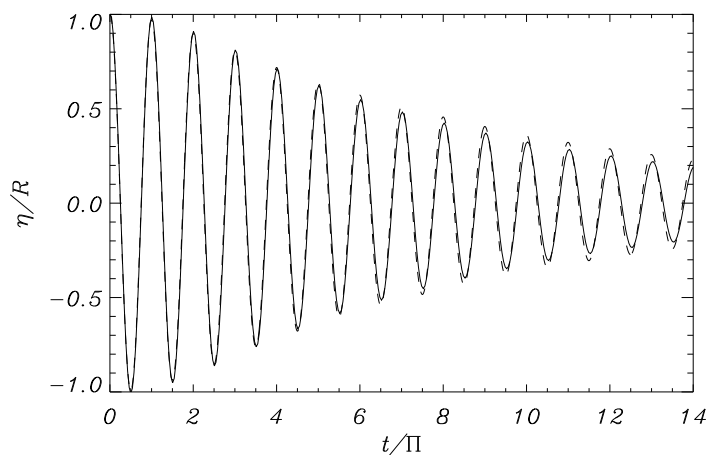


Рис. 3.12.1. Зависимость  $\eta$  от времени найденная при численном моделировании на основе полной системы линейных уравнений идеальной МГД (сплошная линия) и с помощью решения уравнения (3.12.27) (пунктирная линия) при  $\epsilon = 0.1$ .

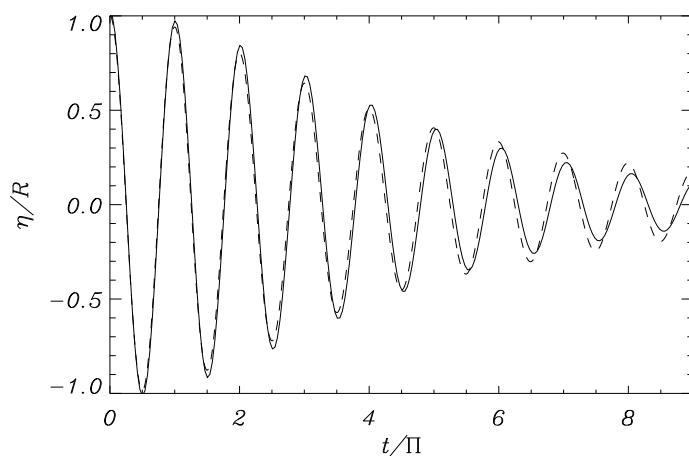


Рис. 3.12.2. То же самое что и Рис. 3.12.1, но при  $\epsilon = 0.2$ .

Анализ Рис. 3.12.1-3.12.3 показывает что решение может быть записано в виде  $\eta(t) = A(t) \sin(\omega t + \Phi(t))$ . Сдвиг фазы  $\Phi(t)$  весьма мал и в дальнейшем не обсуждается. Сконцентрируем внимание на поведении амплитуды  $A(t)$  графики которой представлены на Рис. 3.12.4-3.12.6. На этих рисунках сплошные линии показывают зависимость  $\ln(A/R)$  от времени найденную с помощью решения уравнения (3.12.27). Кружки показывают ту же величину полученную с помощью численного решения системы линейных МГД уравнений. Как видим, при достаточно малых значениях  $t/\Pi$  кривые имеют параболическую форму, а при бóльших значениях  $t/\Pi$  они приблизительно прямые. Расстояние на котором происходит переход



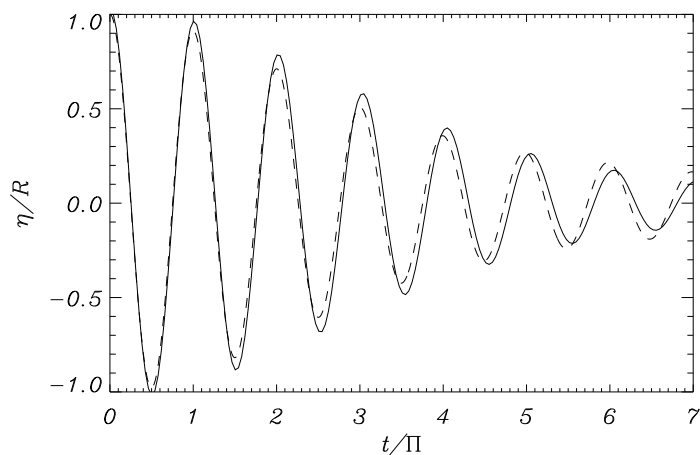


Рис. 3.12.3. То же самое что и Рис. 3.12.1, но при  $\epsilon = 0.3$ .

от параболического профиля к линейному увеличивается с увеличением  $\epsilon$ . Таким образом, амплитуда описывается гауссовским профилем на малых временах и экспоненциальной функцией на больших временах. Ранее аналогичный результат был найден в работах Pascoe et al. (2010, 2011, 2012) для распространяющихся волн. Пунктирные линии на Рис. 3.12.4–3.12.6 показывают зависимость  $\ln(A/R)$  от времени найденную в классической теории резонансного затухания представленной в главах 3.8 и 3.9.

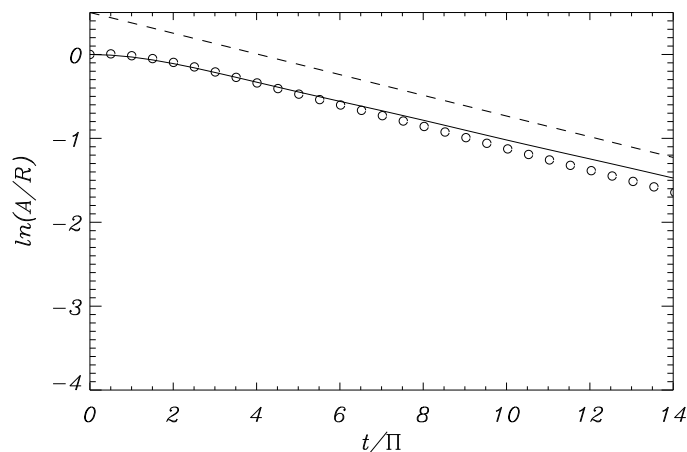
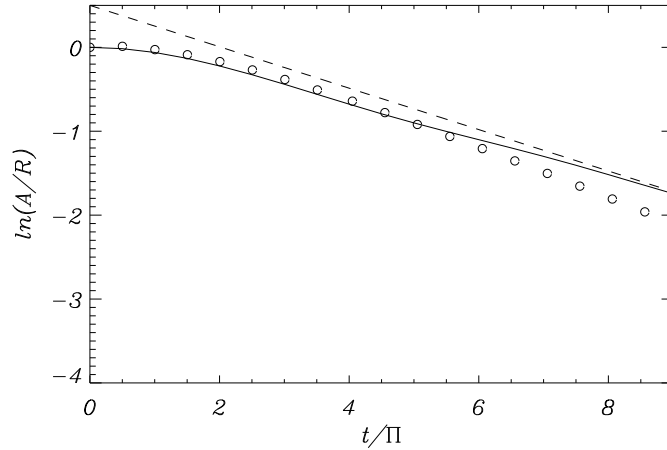
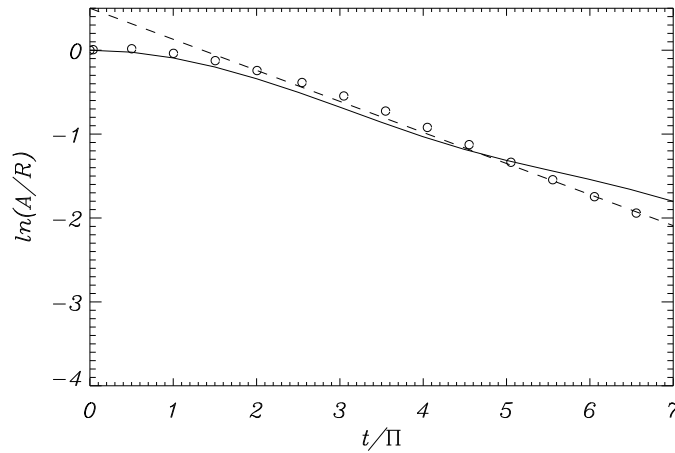


Рис. 3.12.4. Зависимость  $\ln(A/R)$  от времени при  $\epsilon = 0.1$ . Сплошной линией показано решение уравнения (3.12.27). Кружками показаны результаты численного моделирования. Пунктирной линией показана асимптотическая зависимость от времени справедливая при больших  $t$ .

Вычислим время затухания  $t_d$  определённое уравнением  $A(t_d)/A(0) = e^{-1}$  и сравним его со временем затухания найденным на основе классиче-

Рис. 3.12.5. То же что и Рис. 3.12.4, но при  $\epsilon = 0.2$ .Рис. 3.12.6. То же что и Рис. 3.12.4, но при  $\epsilon = 0.3$ .

ской теории резонансного затухания,  $t_{dc} = 1/\gamma_d$ , где  $\gamma_d$  определяется уравнением (3.12.28). Как с помощью прямого численного моделирования, так и из решения уравнения (3.12.27) находим что  $t_d/\Pi \approx 8.8$  при  $\epsilon = 0.1$ ,  $t_d/\Pi \approx 4.6$  при  $\epsilon = 0.2$  и  $t_d/\Pi \approx 3.2$  при  $\epsilon = 0.3$ . С помощью уравнения (3.12.28) получим  $t_{dc}/\Pi = 4(\pi^2\epsilon\kappa)^{-1}$ . В результате находим что  $t_d$  превышает  $t_{dc}$  на 9% при  $\epsilon = 0.1$ , на 14% при  $\epsilon = 0.2$ , и на 18% при  $\epsilon = 0.3$ . Таким образом, приходим к заключению что классическая теория резонансного затухания недооценивает время затухания и ошибка возрастает с ростом  $\epsilon$ . Однако ошибка не слишком велика, так что время затухания вычисленное на основе классической теории резонансного затухания даёт достаточно хорошую оценку.

Интересно сравнить результаты полученные в настоящей главе с данными полученными в статье Hood et al. (2013). Эти авторы исследовали резонансное затухание распространяющихся изгибных волн в полубесконечной трубке возбуждаемых у её конца. Имеется очевидное сходство этих результатов. Hood et al. (2013) нашли что амплитуда волны приближённо описывается гауссовской функцией на достаточно малых расстояниях от конца трубки, а в настоящей главе показано что амплитуда волны приближённо описывается гауссовской функцией на достаточно малых временах. Затем Hood et al. (2013) нашли что на больших расстояниях амплитуда волны затухает экспоненциально и переход от гауссовского к экспоненциальному затуханию происходит на расстоянии которое увеличивается с ростом  $\epsilon$ . В настоящей главе найдено что на достаточно больших временах амплитуда волны затухает экспоненциально и переход от гауссовского к экспоненциальному затуханию происходит в момент времени который увеличивается с возрастанием  $\epsilon$ . Наконец, Hood et al. (2013) нашли что классическая теория резонансного затухания недооценивает расстояние на котором происходит затухание волны, а в настоящей главе аналогичный результат получен для времени затухания.

### 3.12.5. Выводы

В настоящей главе исследовано затухание изгибных колебаний корональных петель вследствие преобразования изгибной моды в локальные альвеновские колебания вблизи резонансной поверхности. Использовано приближение тонкой трубки и тонкого переходного слоя, а также приближение холодной плазмы. Было выведено уравнение определяющее эволюцию смещения трубки (см. уравнение (3.12.27)).

Для исследования затухания колебаний уравнение (3.12.27) было решено численно при разлных значения отношения толщины переходного слоя к радиусу трубки  $\epsilon$ . Найдено что, для достаточно малых моментов времени, уменьшение амплитуды колебаний со временем описывается гауссовской функцией, а на больших временах затухание становится экспоненциальным. Чем больше  $\epsilon$  тем позже происходит переход от гауссовского к экспоненциальному режиму. Проведено сравнение решения уравнения (3.12.27) с результатами прямого численного моделирования на основании полной системы линеаризованных уравнений идеальной МГД. Совпадение резуль-

татов полученных двумя методами найдено достаточно хорошим.

Время затухания определяется условием что амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз. Это время рассчитывалось с помощью решения уравнения (3.12.27) и затем сравнивалось со временем полученным на основании классической теории резонансного затухания. Найдено что классическая теория недооценивает время затухания, причём ошибка возрастает с ростом  $\epsilon$ . Однако эта ошибка не слишком велика. Даже при  $\epsilon = 0.3$ , что является наибольшим значением рассмотренным в настоящей главе, ошибка составила только 18%. Таким образом, время затухания вычисленное на основе классической теории резонансного затухания может быть использовано как достаточно хорошая аппроксимация реального времени затухания.

## 4. Заключение

В работе было проведено детальное исследование изгибных колебаний магнитных трубок в солнечной атмосфере. Для этого автором была разработана асимптотическая теория таких колебаний в приближении тонкой магнитной трубки. В работе проведено исследование влияния эффектов изменения плотности плазмы и радиуса сечения трубки вдоль трубки, формы поперечного сечения трубки, скрученности линий магнитного поля, течения плазмы внутри трубки, кручения оси трубки, нелинейности и охлаждения плазмы в трубке. Также было детально исследовано затухание изгибных волн вследствие резонансного поглощения связанного с неоднородностью плазмы в направлениях ортогональных к оси трубки. Результаты полученные в работе использовались для интерпретации данных наблюдений полученных на космических аппаратах.

### Основные результаты и выводы

1. Выведено уравнение описывающее изгибные волны в тонкой магнитной трубке с плотностью и радиусом поперечного сечения изменяющимися вдоль трубки. Это уравнение использовано для исследования безотражательного распространения изгибных волн вдоль корональных петель. Оно также использовано для исследования влияния на собственные частоты стоячих волн в корональных петлях. Результаты этого исследования применяются в корональной сейсмологии. Показано что учёт расширения корональной петли приводит к уменьшению оценки шкалы высот полученной на основе одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона изгибных колебаний.
2. Выведено уравнение описывающее распространение нелинейных изгибных волн с учётом резонансного затухания. Показано что нелинейность может существенно увеличивать эффективность резонансного затухания.
3. Исследованы стоячие изгибные волны в магнитных трубках с эллиптическим сечением. Показано что в этом случае имеется две фун-

даментальные моды с разными собственными частотами. Обе моды линейно поляризованы, одна вдоль большой оси эллиптического сечения, а другая — вдоль малой. Аналогичные результаты получены для каждого обертона.

4. Исследованы вертикальные и горизонтальные колебания плоской магнитной трубки с сечением изменяющимся вдоль трубки. Показано что, в общем случае, фундаментальные моды этих колебаний имеют разные частоты. Аналогичные результаты получены для каждого обертона.
5. Исследованы изгибные колебания неплоских магнитных трубок. Показано что направление поляризации линейно поляризованной волны изменяется вдоль трубки таким образом что угол между направлением поляризации и направлением главной нормали к оси петли остаётся постоянным. Получен критерий позволяющий определить является ли наличие узла в наблюдаемых поперечных колебаниях эффектом проекции, или оно свидетельствует о том что наблюдалась не фундаментальная мода а первый обертон.
6. Исследованы коллективные колебания двух параллельных магнитных трубок. Показано что взаимодействие между трубками уменьшает резонансное затухание колебаний. Также показано что оценка шкалы высот полученная с помощью одновременного наблюдения фундаментальной моды и первого обертона колебаний системы двух параллельных трубок совпадает с оценкой полученной на основе наблюдений колебаний уединённой трубки.
7. Исследованы изгибные колебания магнитной трубки в присутствии течения. Показано что при типичных наблюдаемых скоростях течений влияние течения на оценку шкалы высот мало.
8. Решена начальная задача для изгибных колебаний магнитной трубки возбуждаемых произвольным возмущением. Показано что, после переходного периода с длительностью порядка одного периода фундаментальной моды, движение трубки описывается фундаментальной модой колебаний. В приближении тонкого переходного слоя исследовано резонансное затухание этой моды. Предложен метод оценки

поперечной структуры корональной петли на основе наблюдений затухания её поперечных колебаний.

9. Исследовано влияние изменения плотности вдоль магнитной трубки на эффективность резонансного затухания её изгибных колебаний. Показано что, в предположении однородной стратификации, означаящем что отношение плотности вне и внутри трубки постоянно, а отношение плотности в переходном слое к плотности внутри трубки зависит только от радиальной координаты, отношение времени затухания к периоду фундаментальной моды не зависит от стратификации.
10. Исследованы изгибные колебания охлаждающихся корональных петель. Показано, что охлаждение приводит к увеличению амплитуды колебаний. Этот эффект может компенсировать резонансное затухание, что приводит к возможности существования незатухающих колебаний.

## Дополнение

### А. Вычисление компонент тензора **A**

В этом разделе вычисляются компоненты тензора **A**. Из уравнения (2.5.13) следует что матрица компонент этого тензора является обратной к матрице компонент тензора  $\mathbf{I} + (\nabla \boldsymbol{\xi})^T$ . В соответствии с уравнениями (2.5.20) и (2.5.21) элементы матрицы компонент тензора  $\mathbf{I} + \nabla \boldsymbol{\xi}$  совпадают с элементами определителя в правой части уравнения (2.5.21). Теперь, принимая во внимание что определитель матрицы компонент тензора  $\mathbf{I} + (\nabla \boldsymbol{\xi})^T$  равен единице, нетрудно вычислить компоненты тензора **A**. Они даются выражениями

$$A_{11} = 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\xi_r}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi_z}{\partial z} - \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} + \xi_r \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$A_{12} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - \xi_\varphi + \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi_z}{\partial z} - \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} - \xi_\varphi \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$A_{13} = -\frac{\partial \xi_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} + \xi_r \frac{\partial u_r}{\partial z} + \xi_\varphi \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} \right), \quad (\text{A.3})$$

$$A_{21} = -\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} \frac{\partial \xi_z}{\partial r}, \quad (\text{A.4})$$

$$A_{22} = 1 + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \frac{\partial \xi_z}{\partial z} - \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \frac{\partial \xi_z}{\partial r}, \quad (\text{A.5})$$

$$A_{23} = -\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r}, \quad (\text{A.6})$$

$$A_{31} = -\frac{\partial \xi_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} + \xi_r \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$A_{32} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} + \xi_\varphi \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$A_{33} = 1 + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\xi_r}{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} + \xi_r \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \xi_\varphi \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} \right). \quad (\text{A.9})$$



## В. Вывод выражения для радиального смещения и возмущения полного давления во втором приближении

В этом разделе выводятся уравнения (2.5.51) and (2.5.54). Исключая  $\xi_{\varphi m}^{(2)}$  из уравнений (2.5.47) и (2.5.49) получим

$$\begin{aligned}
P_m^{(2)} &= -\frac{r\rho_i}{m^2} \left(1 - \frac{V_{Ai}^2}{C^2}\right) \frac{\partial^3(r\xi_{rm}^{(2)})}{\partial r \partial \tau^2} - \frac{2\rho_i V_{Ai}^2}{|m|C} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \zeta \partial \tau} r^{|m|} \\
&+ \frac{\rho_i(C^2 - V_{Ai}^2)}{C^2 m^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-2} \chi_{mk} (|k| - 1) \\
&\times \left[ (|m-k| - 1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_k U_{m-k}) - m U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} k \right]. \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

Подставляя уравнение (B.1) в уравнение (2.5.48) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^3(r\xi_{rm}^{(2)})}{\partial r \partial \tau^2} - m^2 \frac{\partial \xi_{rm}^{(2)}}{\partial \tau^2} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-3} \chi_{mk} (|k| - 1) \\
&\times \left\{ (|2k-m| - 2)(|k-m| - 1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_k U_{m-k}) \right. \\
&\left. - m[ (|2k-m| - 2) \operatorname{sgn} k - m] U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} \right\}. \quad (\text{B.2})
\end{aligned}$$

С помощью тождества

$$(|2k-m| - 2) \operatorname{sgn} k - m = 2(|m-k| - 1) \operatorname{sgn} k \quad (\text{B.3})$$

справедливого при  $k(m-k) < 0$  перепишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^3(r u_{rm}^{(2)})}{\partial r \partial \tau^2} - m^2 \frac{\partial u_{rm}^{(2)}}{\partial \tau^2} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-3} \chi_{mk} (|k| - 1)(|k-m| - 1) \\
&\times \left[ (|2k-m| - 2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_k U_{m-k}) - 2m U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} k \right]. \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

Делая подстановку  $k = m - \tilde{k}$  и затем опуская тильду получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|} \chi_{mk} (|k| - 1)(|k-m| - 1) U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} k \\
&= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|} \chi_{mk} (|k| - 1)(|k-m| - 1) U_{m-k} \frac{\partial^2 U_k}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} k. \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

При выводе этого уравнения принималось во внимание что  $\operatorname{sgn} k = -\operatorname{sgn}(m - k)$  при  $\chi_{mk} \neq 0$ . Из уравнения (B.5) следует что

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|} \chi_{mk} (|k| - 1) (|k - m| - 1) U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|} \chi_{mk} (|k| - 1) (|k - m| - 1) \\ & \times \frac{\partial}{\partial \tau} \left( U_k \frac{\partial U_{m-k}}{\partial \tau} - U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \right) \operatorname{sgn} k. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Подставляя уравнение (B.6) в уравнение (B.4) и используя тождество

$$U_k \frac{\partial U_{m-k}}{\partial \tau} - U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_k U_{m-k}) - 2U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \quad (\text{B.7})$$

и уравнение (B.3) получим уравнение (2.5.51).

Выведем теперь уравнение (2.5.54). Подставляя уравнение (2.5.52) в уравнение (B.1) получим

$$\begin{aligned} P_m^{(2)} &= -\frac{2\rho_i V_{Ai}^2}{|m|C} \frac{\partial^2 U_m}{\partial \zeta \partial \tau} r^{|m|} - \rho_i \frac{C^2 - V_{Ai}^2}{|m|C^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}_m}{\partial \tau^2} r^{|m|} \\ &- \frac{\rho_i (C^2 - V_{Ai}^2)}{2C^2 m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|-2} \chi_{mk} \operatorname{sgn} k \\ &\times \left[ (|k| - 1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (U_k U_{m-k}) + 2(|k| - 1) U_k \frac{\partial^2 U_{m-k}}{\partial \tau^2} \right. \\ &\left. + (|2k - m| - 2) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

При выводе этого уравнения использовалось тождество

$$2|m - k| - |2k - m| = -m \operatorname{sgn} k, \quad (\text{B.9})$$

справедливое при  $k(m - k) < 0$ . Сделав подстановку  $k = m - \tilde{k}$ , опуская тильду и замечая что  $\operatorname{sgn}(m - k) = -\operatorname{sgn} k$  при  $\chi_{mk} \neq 0$ , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|} \chi_{mk} \operatorname{sgn} k (|2k - m| - 2) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( U_{m-k} \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \right) \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|} \chi_{mk} \operatorname{sgn} k (|2k - m| - 2) \\ & \times \left( U_{m-k} \frac{\partial^2 U_k}{\partial \tau^2} + \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \frac{\partial U_{m-k}}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

С помощью аналогичного метода можно показать что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|2k-m|} \chi_{mk} \operatorname{sgn} k (|2k-m| - 2) \frac{\partial U_k}{\partial \tau} \frac{\partial U_{m-k}}{\partial \tau} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Подставляя уравнения (B.10) и уравнение (B.11) в уравнение (B.8) и используя уравнение (B.9) с заменой  $m - k$  на  $k$  получим уравнение (2.5.54).

### С. Вычисление суммы в уравнении (2.5.136)

Этот раздел посвящён упрощению суммы в уравнении (2.5.136). Рассмотрим выражение

$$S_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k [\operatorname{sgn} k + \operatorname{sgn}(m - k)] \psi_k \psi_{m-k}. \quad (\text{C.1})$$

Подстановка  $m - k \rightarrow k$  преобразует это выражение к виду

$$S_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (m - k) [\operatorname{sgn} k + \operatorname{sgn}(m - k)] \psi_k \psi_{m-k}. \quad (\text{C.2})$$

Складывая уравнения (C.1) и (C.2) получим

$$S_1 = \frac{m}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn} k + \operatorname{sgn}(m - k)] \psi_k \psi_{m-k}. \quad (\text{C.3})$$

Далее рассмотрим

$$S_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| [\operatorname{sgn} k - \operatorname{sgn}(m - k)] \psi_k \psi_{m-k}. \quad (\text{C.4})$$

Подстановка  $m - k \rightarrow k$  преобразует это выражение к виду

$$S_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m - k| [\operatorname{sgn} k - \operatorname{sgn}(m - k)] \psi_k \psi_{m-k}. \quad (\text{C.5})$$

Складывая уравнения (C.4) и (C.5) и используя тождество

$$|k| - |m - k| = m \operatorname{sgn} k, \quad (\text{C.6})$$

справедливое при  $k(m - k) < 0$  получим

$$S_2 = \frac{m}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{1 - \operatorname{sgn}[k(m - k)]\} \psi_k \psi_{m-k}. \quad (\text{C.7})$$

Используя уравнения (С.3) и (С.7) и симметрию по отношению к подстановке  $m - k \rightarrow k$  перепишем сумму в уравнении (2.5.136) в виде

$$\begin{aligned}
S = & m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \{1 + \operatorname{sgn}[k(m - k)]\} \psi_k \frac{\partial^2 \psi_{m-k}}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} m \right. \\
& - \operatorname{sgn} k \left( \psi_{m-k} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \tau^2} - \psi_k \frac{\partial^2 \psi_{m-k}}{\partial \tau^2} \right) \\
& \left. - \frac{1}{2} \{2 \operatorname{sgn} k - (1 - \operatorname{sgn}[k(m - k)])\} \operatorname{sgn} m \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\psi_k \psi_{m-k}) \right\}. \quad (\text{C.8})
\end{aligned}$$

Снова используя симметрию по отношению к подстановке  $m - k \rightarrow k$  нетрудно преобразовать это уравнение к виду

$$\begin{aligned}
S = & m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \{1 - \operatorname{sgn}[k(m - k)]\} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_{m-k}}{\partial \tau} \operatorname{sgn} m \right. \\
& \left. + 2 \psi_k \frac{\partial^2 \psi_{m-k}}{\partial \tau^2} \operatorname{sgn} m - 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \psi_{m-k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \right) \operatorname{sgn} k \right\}. \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

Рассмотрим очевидное тождество

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [1 - \operatorname{sgn}(mk)] [\operatorname{sgn} k + \operatorname{sgn}(m - k)] f_k f_{m-k} = 0, \quad (\text{C.10})$$

справедливое для любой функции  $f(\varphi)$ . Его можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{1 + \operatorname{sgn}[k(m - k)]\} f_k f_{m-k} \operatorname{sgn} m = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn} k \\
& + \operatorname{sgn}(m - k)] f_k f_{m-k} = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k f_{m-k} \operatorname{sgn} k. \quad (\text{C.11})
\end{aligned}$$

После этого, используя уравнение (С.11), окончательно получаем

$$S = 2m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ (\operatorname{sgn} m - \operatorname{sgn} k) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \psi_{m-k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_{m-k}}{\partial \tau} \operatorname{sgn} k \right]. \quad (\text{C.12})$$

#### D. Вывод уравнения для потока волновой энергии

В этом разделе выводится выражение (2.5.144) для потока волновой энергии проинтегрированного по времени, а также уравнение (2.5.145) опи-

сывающее эволюцию этой величины со временем. Выражение для плотности волновой энергии имеет вид

$$e = \frac{\rho|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{b}|^2}{2\mu_0}. \quad (\text{D.1})$$

Подставляя  $\mathbf{v} = \partial\xi/\partial t$  и  $\mathbf{b} = B_0\partial\xi/\partial z$  в уравнение (D.1), перепишем его в виде

$$e = \frac{\rho}{2} \left( \left| \frac{\partial\xi}{\partial t} \right|^2 + V_A^2 \left| \frac{\partial\xi}{\partial x} \right|^2 \right). \quad (\text{D.2})$$

В дальнейшем вычисляем поток волновой энергии в главном порядке по  $\epsilon$ . В соответствии с этим пренебрегаем величиной  $\xi_z$  в уравнении (D.2) (напомним что  $\xi_z = O(\epsilon^2 R)$ ), а также пренебрегаем вкладом кольцевой области  $R < r < R + l$ . Поскольку, в главном приближении по  $\epsilon$ ,  $\xi$  является функцией  $t - z/C_k$ , можно сделать подстановку  $\partial\xi/\partial z = (1/C_k)\partial\xi/\partial t$  в уравнении (D.2). После этого, используя тождество Парсеваля и уравнения (2.5.40), (2.5.41), (2.5.69), (2.5.70) и (2.5.130), получим

$$\int_0^{2\pi} e d\varphi = \begin{cases} 2\pi(2\rho_i + \rho_e) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial U_m}{\partial t} \right|^2 r^{2|m|-2}, & r < R, \\ 2\pi\rho_e \sum_{m=-\infty}^{\infty} R^{4|m|} \left| \frac{\partial U_m}{\partial t} \right|^2 r^{-2|m|-2}, & R < r < R + l. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Используя это уравнение получим с помощью соотношения  $\psi_m = R^{|m|-1}U_m$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} er dr = 2\pi R^2(\rho_i + \rho_e) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|m|} \left| \frac{\partial\psi_m}{\partial t} \right|^2. \quad (\text{D.4})$$

Это выражение определяет плотность энергии в данный момент времени. Снова используя равенство Парсеваля и уравнение (2.5.141) преобразуем уравнение (D.4) к виду

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} er dr = -(\rho_i + \rho_e)R^2 \int_0^{2\pi} \left[ \mathcal{H} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) \int_0^{\varphi} \frac{\partial\psi}{\partial t} d\varphi' \right] d\varphi. \quad (\text{D.5})$$

Поскольку в главном порядке по  $\epsilon$  волна распространяется с фазовой скоростью  $C_k$  без дисперсии, для того чтобы вычислить полный поток волновой энергии достаточно умножить левую часть уравнения (D.5) на  $C_k$  и проинтегрировать по времени. В результате для потока волновой энергии проинтегрированного по времени получим выражение  $C_k R^2(\rho_i + \rho_e)E$ ,

где  $E$  определяется уравнением (2.5.144). Из уравнения (D.4) следует что  $E > 0$ .

Перейдём теперь к выводу уравнения (2.5.145). Введём обозначения

$$\chi = \mathcal{H}(\psi), \quad \Phi = \int_0^\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} d\varphi'.$$

Интегрируя уравнение (2.5.142) по  $\varphi$  получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left( \frac{1}{C} + \frac{lq}{2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\gamma \mathcal{L}(\chi) - \beta \chi] \\ = q \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathcal{H} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\}. \end{aligned} \quad (D.6)$$

Используя тождество (Titchmarsh 1948, Papoulis 1962, Bracewell 1999)

$$\mathcal{H}(\mathcal{H}(\psi)) = -\psi, \quad (D.7)$$

получим соотношение между  $\psi$  и  $\chi$ :

$$\chi = \mathcal{H}(\psi), \quad \psi = -\mathcal{H}(\chi). \quad (D.8)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (2.5.142) и используя уравнение (D.1) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial z} + \left( \frac{1}{C} + \frac{lq}{2} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^3}{\partial \varphi \partial t^2} (\gamma \mathcal{L}(\psi) - \beta \psi) \\ = -q \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathcal{H} \left( \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + \mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (D.9)$$

Умножая уравнение (D.6) на  $\partial \chi / \partial t$ , уравнение (D.9) на  $\Psi$ , складывая полученные уравнения и интегрируя полученный результат по  $t$  и  $\varphi$  получим

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} = \left( \frac{1}{C} + \frac{lq}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \Phi \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) d\varphi \\ + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\chi)}{\partial t^2} - \Phi \frac{\partial^3 \mathcal{L}(\psi)}{\partial \varphi \partial t^2} \right) d\varphi \\ + \beta \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left( \Phi \frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi \partial t^2} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi \partial t} \right) d\varphi + qI, \end{aligned} \quad (D.10)$$

где  $E$  определяется уравнением (2.5.144), а  $I$  даётся выражением

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \mathcal{H} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \right. \\ \left. + \Phi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathcal{H} \left( \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] \right\} d\varphi. \end{aligned} \quad (D.11)$$

Очевидно что первый член в правой части уравнения (D.10) равен нулю. С помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left( \Phi \frac{\partial^3 \psi}{\partial \varphi \partial t^2} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi \partial t} \right) d\varphi \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi \partial t} \right) d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

так что третий член в правой части уравнения (D.10) также равен нулю.

Покажем теперь что  $I = 0$ . Снова используя интегрирование по частям преобразуем уравнение (D.11) к виду

$$\begin{aligned} I = & \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \left[ \mathcal{H} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] + \frac{\partial \psi}{\partial t} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \left[ \mathcal{H} \left( \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right\} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Теперь используем соотношение аналогичное формуле интегрирования по частям (Paroulis 1962, Bracewell 1999),

$$\int_0^{2\pi} f \mathcal{H}(g) d\varphi = - \int_0^{2\pi} g \mathcal{H}(f) d\varphi, \quad (\text{D.14})$$

справедливое для любых периодических функций  $f$  и  $g$ . С помощью уравнений (D.7), (D.8) и (D.14) преобразуем уравнение (D.13) к виду

$$I = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \left[ \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] d\varphi. \quad (\text{D.15})$$

Снова используя интегрирование по частям сводим уравнение (D.15) к

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - 2\mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right] d\varphi. \quad (\text{D.16})$$

Теперь используем ещё одну формулу для преобразования Гильберта (Paroulis 1962, Bracewell 1999)

$$\mathcal{H}(fg) = \mathcal{H}(\mathcal{H}(f)\mathcal{H}(g)) + f\mathcal{H}(g) + g\mathcal{H}(f). \quad (\text{D.17})$$

С помощью этой формулы и уравнения (D.8) получим

$$2\mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2. \quad (\text{D.18})$$

Из уравнений (D.16) и (D.18) следует что  $I = 0$ . Таким образом, единственный ненулевой член в правой части уравнения (D.10) это член пропорциональный  $\gamma$ . С помощью уравнений (D.8) и (D.14) и интегрирования по частям уравнение (D.10) сводится к уравнению (2.5.45).

С помощью уравнения (2.5.126) и равенства Парсеваля получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \mathcal{L} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^3 |\psi_\omega|^2 dt, \quad (\text{D.19})$$

где  $\psi_\omega$  – преобразование Фурье функции  $\psi$  по времени. Из уравнения (D.19) следует что правая часть уравнения (2.5.145) отрицательна.

### Е. Асимптотические выражения для функций $\text{Fek}_n(z, \theta)$ и $\text{Gek}_n(z, \theta)$

В этом дополнении выводятся асимптотические выражения для функций  $\text{Fek}_n(z, \theta)$  и  $\text{Gek}_n(z, \theta)$  справедливые при  $\theta < 0$  и  $|\theta| \ll 1$ . В дальнейшем используем разложение функций  $\text{se}_n(z, \theta)$ ,  $\text{se}_n(s, \theta)$ , и модифицированных функций Матье  $\text{Feu}_n(z, \theta)$  и  $\text{Geu}_n(z, \theta)$  в ряды произведений функций Бесселя, соотношения (3.3.18), и выражения для функций  $\text{Fek}_n(z, \theta)$  и  $\text{Gek}_n(z, \theta)$  через функции  $\text{Ce}_n(z, \theta)$ ,  $\text{Se}_n(s, \theta)$ ,  $\text{Feu}_n(z, \theta)$  и  $\text{Geu}_n(z, \theta)$  (см. Bateman 1955, Разделы 16.5 и 16.6). Дополнительно используем соотношения

$$\text{J}_n(iz) = i^n \text{I}_n(z), \quad \text{Ha}_n^{(1)} = \frac{2}{\pi} i^{-n-1} \text{K}_n(z), \quad (\text{E.1})$$

где  $\text{J}_n$  – функция Бесселя,  $\text{I}_n$  – модифицированная функция Бесселя,  $\text{Ha}_n^{(1)}$  – Функция Ганкеля и  $\text{K}_n$  – модифицированная функция Бесселя третьего рода (Функция Макдональда). В результате получаются следующие выражения справедливые при  $\theta < 0$ :

$$\text{Fek}_{2m}(z, \theta) = \frac{p_{2m}}{\pi A_0^{2m}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l A_{2l}^{2m} \text{I}_l(|\theta|^{1/2} e^{-s}) \text{K}_l(|\theta|^{1/2} e^s), \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} \text{Fek}_{2m+1}(z, \theta) &= \frac{p_{2m+1}}{\pi A_1^{2m+1}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l A_{2l+1}^{2m+1} \\ &\times [\text{I}_l(|\theta|^{1/2} e^{-s}) \text{K}_{l+1}(|\theta|^{1/2} e^s) - \text{I}_{l+1}(|\theta|^{1/2} e^{-s}) \text{K}_l(|\theta|^{1/2} e^s)], \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} \text{Gek}_{2m+1}(z, \theta) &= \frac{q_{2m+1}}{\pi B_1^{2m+1}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l B_{2l+1}^{2m+1} \\ &\times [\text{I}_l(|\theta|^{1/2} e^{-s}) \text{K}_{l+1}(|\theta|^{1/2} e^s) + \text{I}_{l+1}(|\theta|^{1/2} e^{-s}) \text{K}_l(|\theta|^{1/2} e^s)], \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$



$$\begin{aligned} \text{Gek}_{2m+2}(z, \theta) &= \frac{q_{2m+2}}{\pi B_2^{2m+2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l B_{2l+2}^{2m+2} \\ &\times [\text{I}_l(|\theta|^{1/2} e^{-s}) \text{K}_{l+2}(|\theta|^{1/2} e^s) - \text{I}_{l+2}(|\theta|^{1/2} e^{-s}) \text{K}_l(|\theta|^{1/2} e^s)], \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , и

$$A_0^{2m} p_{2m} = \text{ce}_{2m}(0) \text{ce}_{2m}(\pi/2), \quad (\text{E.6})$$

$$|\theta|^{1/2} A_1^{2m+1} p_{2m+1} = i \text{ce}_{2m+1}(0) \text{ce}'_{2m+1}(\pi/2), \quad (\text{E.7})$$

$$|\theta|^{1/2} B_1^{2m+1} q_{2m+1} = -i \text{se}'_{2m+1}(0) \text{se}_{2m+1}(\pi/2), \quad (\text{E.8})$$

$$\theta B_2^{2m+2} q_{2m+2} = \text{se}'_{2m+2}(0) \text{se}'_{2m+2}(\pi/2). \quad (\text{E.9})$$

Используя уравнения (3.3.30) и асимптотические выражения для модифицированных функцией Бесселя справедливые при  $|z| \ll 1$  (см. Abramowitz and Stegun 1964),

$$\text{I}_n(z) \sim \frac{z^n}{2^n n!}, \quad \text{K}_0(z) \sim -\ln \frac{z}{2} - \gamma, \quad \text{K}_{n+1} \sim \frac{2^n n!}{z^{n+1}}, \quad (\text{E.10})$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  и  $\gamma \approx 0.577$  — постоянная Эйлера, получим из уравнений (E.2)-(E.5) следующие асимптотические выражения для модифицированных функций Матье справедливые при  $|\theta|^{1/2} e^s \ll 1$ :

$$\text{Fek}_0(z, \theta) \sim -\frac{p_0}{2\pi} (\ln |\theta| + 2z + 2\gamma - 2 \ln 2), \quad (\text{E.11})$$

$$\text{Fek}_{2m+1}(z, \theta) \sim \frac{(-1)^m p_{2m+1}}{\pi |\theta|^{1/2} A_1^{2m+1}} e^{-(2m+1)z}, \quad (\text{E.12})$$

$$\text{Fek}_{2m+2}(z, \theta) \sim \frac{(-1)^m p_{2m+2}}{2\pi (m+1) A_0^{2m+2}} e^{-(2m+2)z}, \quad (\text{E.13})$$

$$\text{Gek}_{2m+1}(z, \theta) \sim \frac{(-1)^m q_{2m+1}}{\pi |\theta|^{1/2} B_1^{2m+1}} e^{-(2m+1)z}, \quad (\text{E.14})$$

$$\text{Gek}_{2m+2}(z, \theta) \sim \frac{2(m+1)(-1)^{m+1} q_{2m+2}}{\pi \theta B_2^{2m+2}} e^{-(2m+2)z}, \quad (\text{E.15})$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

## Ф. Асимптотическое решение уравнения (3.12.27), справедливое на больших временах

В этом дополнении исследуется асимптотическое поведение решения уравнения (3.12.27) при  $\omega t \sim \epsilon^{-1}$ . Введём преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^t f(t)e^{ist} dt. \quad (\text{F.1})$$

Сделав преобразование Лапласа уравнения (3.12.27) и используя теорему о конволюции получим

$$\mathcal{L}[\eta(t)](s) = R\omega \frac{2 - \epsilon \mathcal{L}[F(t)](s/\omega)}{2(\omega^2 - s^2) - \epsilon \kappa \omega^2 \mathcal{L}[G(t)](s/\omega)}. \quad (\text{F.2})$$

С помощью стандартной таблицы преобразований Лапласа находим

$$\mathcal{L}[G(t)](s) = \frac{1}{2s^2} \ln \frac{1 - s^2(1 - \kappa)}{1 - s^2(1 + \kappa)}. \quad (\text{F.3})$$

Выражение для  $\mathcal{L}[F(t)](s)$  не приводится потому что не используется в дальнейшем. Решение уравнения (3.12.27) с начальными условиями (3.12.15) даётся уравнением

$$\eta(t) = \frac{\pi R}{2} \int_{i\varsigma - \infty}^{i\varsigma + \infty} \frac{\{2 + \epsilon \mathcal{L}[F(t)](s)\} e^{-is\omega t} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)}, \quad (\text{F.4})$$

где  $\varsigma$  — положительная постоянная. При вычислении обратного преобразования Лапласа была сделана подстановка  $s = \omega s'$  после чего штрих был опущен.

Теперь используем уравнение (F.4) для того чтобы получить асимптотическое выражение для  $\eta(t)$  справедливое при  $\omega t \sim \epsilon^{-1}$ . Отношение второго члена в числителе подынтегрального выражения в уравнении (F.4) к первому члену порядка  $\epsilon$ . Таким образом, вторым членом в числителе можно пренебречь и использовать приближённое выражение

$$\eta(t) = \frac{R}{\pi} \int_{i\varsigma - \infty}^{i\varsigma + \infty} \frac{e^{-is\omega t} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)} \quad (\text{F.5})$$

для нахождения асимптотического поведения  $\eta(t)$  на больших временах. Подынтегральное выражение в уравнении (F.5) имеет четыре логарифмических точки ветвления при  $s = \pm s_+$  и  $s = \pm s_-$ , где

$$s_+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa}}, \quad s_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa}}. \quad (\text{F.6})$$

Для того чтобы получить однозначные ветви подынтегрального выражения сделаем разрезы в комплексной  $s$ -плоскости вдоль интервалов  $[-s_-, -s_+]$  и  $[s_+, s_-]$ . Многозначность подынтегрального выражения в уравнении (F.4) связана с присутствием логарифма в уравнении (F.3). Определим основной лист Римановой поверхности подынтегрального выражения условием что мнимая часть логарифма находится между  $-\pi i$  и  $\pi i$ . В дальнейшем обозначение ‘ $\ln$ ’ используем только для этой ветви логарифма, а значение логарифма определяемое этой ветвью называем основным. Все остальные значения отличаются от основного на  $2\pi ni$ , где  $n$  — целое число.

Функция

$$w(s) = \ln \frac{1 - s^2(1 - \kappa)}{1 - s^2(1 + \kappa)} \quad (\text{F.7})$$

отображает комплексную  $s$ -плоскость с разрезами  $[-s_-, -s_+]$  и  $[s_+, s_-]$  на полосу  $-\pi < \Im(w) < \pi$  в комплексной  $w$ -плоскости, где, как и прежде,  $\Im$  обозначает мнимую часть величины. Нули знаменателя в выражении (F.5) определяются уравнением

$$\epsilon \kappa w(s) = 4s^2(1 - s^2). \quad (\text{F.8})$$

Обозначим через  $s_*$  корень этого уравнения. Если этот корень не близок к  $\pm s_{\pm}$  то  $s_*^2(1 - s_*^2) = O(\epsilon)$ . Отсюда следует что  $s_* = O(\epsilon^{1/2})$  или  $s_* = \pm 1 + O(\epsilon)$ . В первом случае сразу получаем что левая часть уравнения (F.8) порядка  $\epsilon^2$ , так что единственное возможное решение этого сорта это  $s_* = 0$ . Поскольку  $\mathcal{L}[G(t)](0) = \kappa$ , очевидно что знаменатель подынтегрального выражения в уравнении (F.5) не равен нулю при  $s = 0$ , так что  $s_* = 0$  — посторонний корень.

Рассмотрим вторую возможность, а именно положим  $s_* = \pm 1 + O(\epsilon)$ . В этом случае решение уравнения (F.8) можно отыскивать в виде  $s_* = \pm 1 + \epsilon \delta$ . Подставляя это выражение в уравнение (F.8) получим

$$\kappa \ln \left( -1 \pm \frac{4\epsilon \delta}{\kappa} \right) = \mp 8\delta + O(\epsilon). \quad (\text{F.9})$$

Мнимая часть левой части этого уравнения близка к  $-\pi i$  когда  $\Im(\pm \delta) < 0$  и к  $\pi i$  когда  $\Im(\pm \delta) > 0$ . Это означает что мнимые части левой и правой частей уравнения (F.9) имеют разные знаки, так что это уравнение не имеет корней с  $\Im(\delta) \neq 0$ . Оно также не может иметь действительных корней

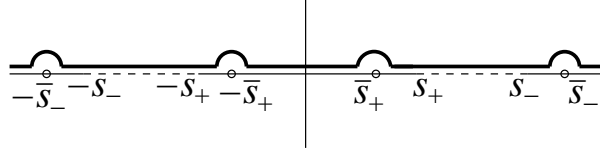


Рис. F.1. Контур интегрирования использованный для вывода уравнения (F.11) показан толстой сплошной линией. Пунктирные линии обозначают разрезы.

полскольку при действительном  $\delta$  мнимая часть правой части равна нулю, а мнимая часть левой части отлична от нуля.

Таким образом, уравнение (F.8) может иметь только решения близкие к  $\pm s_{\pm}$ . Будем искать эти решения в виде  $s_* = \pm s_{\pm} + \delta$ , где  $\delta \ll 1$ . Подставляя это выражение в уравнение (F.8) получим четыре корня,  $s = \pm \bar{s}_+$  и  $s = \pm \bar{s}_-$ , где

$$\bar{s}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \kappa}} \left[ 1 \mp \frac{\kappa}{1 \pm \kappa} \exp \left( -\frac{4}{\epsilon(1 \pm \kappa)^2} \right) \right]. \quad (\text{F.10})$$

И так, имеется четыре полюса подынтегрального выражения на действительной оси в точках  $s = \pm \bar{s}_+$  и  $s = \pm \bar{s}_-$ .

Контур интегрирования в уравнении (F.5) это прямая параллельная действительной оси. Её уравнение имеет вид  $\Im(s) = \varsigma > 0$ . Поскольку подынтегральное выражение в уравнении (F.5) является аналитической функцией в верхней части комплексной  $s$ -плоскости, можно произвольно деформировать контур интегрирования не меняя величину интеграла. Единственное условие которое должно при этом удовлетворяться это то что новый контур целиком лежит в объединении верхней части комплексной  $s$ -плоскости и действительной оси и часть контура лежащая на действительной оси не содержит сингулярностей подынтегрального выражения. Удобно использовать контур интегрирования показанный на Рис. F.1. Этот контур состоит из пяти интервалов действительной оси,  $(-\infty, -\bar{s}_- - \epsilon]$ ,  $[-\bar{s}_- + \epsilon, -\bar{s}_+ - \epsilon]$ ,  $[-\bar{s}_+ + \epsilon, \bar{s}_+ - \epsilon]$ ,  $[\bar{s}_+ + \epsilon, \bar{s}_- - \epsilon]$  и  $[\bar{s}_- + \epsilon, \infty)$ , а также из четырёх полуокружностей радиуса  $\epsilon$  с центрами в точках  $\pm \bar{s}_+$  и  $\pm \bar{s}_-$ . Полагая  $\epsilon \rightarrow +0$  получим

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \frac{R}{\pi} \left( \mathcal{P} \int_{-\infty}^{-s_-} + \int_{-s_-}^{-s_+} + \mathcal{P} \int_{-s_+}^{s_+} + \int_{s_+}^{s_-} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{P} \int_{s_-}^{\infty} \right) \frac{e^{-iswt} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)} \\ &\quad - \frac{iR}{2} \sum_{j=1}^4 \text{res}_{s=s_j} \frac{e^{-iswt}}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)}, \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

где  $s_{1,2} = \pm \bar{s}_+$ ,  $s_{3,4} = \pm \bar{s}_-$ ,  $\mathcal{P}$  как обычно обозначает главную часть интеграла по Каши, а в интегралах вдоль интервалов  $[-s_-, -s_+]$  и  $[s_+, s_-]$  подынтегральное выражение вычисляется на верхних границах разрезом.

Прежде всего заметим что

$$\operatorname{res}_{s=s_j} \frac{e^{-iswt}}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)} = A_j \exp(-C_j/\epsilon), \quad (\text{F.12})$$

где  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $A_j$  и  $C_j$  – постоянные порядка единицы и  $C_j > 0$ . Из этого следует что вклад последнего члена в уравнении (F.11) экспоненциально мал и им можно пренебречь. С помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{-s_-} \frac{e^{-iswt} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)} &= \frac{i}{\omega t} \left[ \frac{e^{i\omega t s_-}}{2 + 2s_-^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s_-)} \right. \\ &\left. - \int_{-\infty}^{-s_-} e^{-iswt} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)} \right) ds \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Как видим, вклад интеграла вдоль интервала  $(-\infty, -s_-]$  порядка  $1/\omega t$ . Аналогично можно показать что вклады интегралов вдоль интервалов  $[-s_+, s_+]$  и  $[s_-, \infty)$  также порядка  $1/\omega t$ . Таким образом получаем

$$\eta(t) = \frac{R}{\pi} \left( \int_{-s_-}^{-s_+} + \int_{s_+}^{s_-} \right) \frac{e^{-iswt} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon \kappa \mathcal{L}[G(t)](s)} + O(1/\omega t). \quad (\text{F.14})$$

Для вычисления асимптотики интегралов в этом выражении необходимо построить аналитическое продолжение функции  $w(s)$  на её Риманову поверхность. Эта Риманова поверхность состоит из бесконечного набора комплексных плоскостей с разрезами вдоль отрезков  $[-s_-, -s_+]$  и  $[s_+, s_-]$  определённым образом соединённых друг с другом на разрезах. В дальнейшем используются только два неосновных листа Римановой поверхности присоединённых к основному листу у верхних краёв разрезов основного листа. Для того чтобы определить  $w(s)$  на неосновном листе присоединённом к основному листу у верхнего края правого разреза рассмотрим точку  $s$  вблизи этого разреза на основном листе. Положим  $s = s_r + is_i$ , где  $s_+ < s_r < s_-$  и  $|s_i| \ll s_r$ . Тогда

$$\frac{1 - s^2(1 - \kappa)}{1 - s^2(1 + \kappa)} \approx -\frac{(1 - \kappa)(s_-^2 - s_r^2)}{(1 + \kappa)(s_r^2 - s_+^2)} + \frac{4i\kappa s_r s_i}{(1 + \kappa)^2 (s_r^2 - s_+^2)^2}, \quad (\text{F.15})$$

и в результате получаем

$$w(s_r + is_i) \approx \ln \frac{(1 - \kappa)(s_-^2 - s_r^2)}{(1 + \kappa)(s_r^2 - s_+^2)} + \pi i \operatorname{sgn}(s_i). \quad (\text{F.16})$$

Предположим что точка  $s$  движется по основному листу Римановой поверхности таким образом что она пересекает разрез двигаясь с верхней части комплексной плоскости в нижнюю часть, т.е.  $\Im(s)$  меняет знак с положительного на отрицательный. Тогда из уравнения (F.16) следует что при пересечении разреза  $\Im(w)$  скачком меняется на  $-2\pi i$ . Это означает что для того чтобы  $w(s)$  изменялось непрерывно когда  $s$  движется с верхнего края разреза на основном листе Римановой поверхности на нижний край разреза на неосновном листе необходимо определить  $w(s)$  на этом листе следующим образом:

$$w(s) = \ln \frac{1 - s^2(1 - \kappa)}{1 - s^2(1 + \kappa)} + 2\pi i. \quad (\text{F.17})$$

Аналогично находим что аналитическое продолжение функции  $w(s)$  на неосновной лист Римановой поверхности присоединённый к основному листу на верхнем крае левого разреза определяется выражением

$$w(s) = \ln \frac{1 - s^2(1 - \kappa)}{1 - s^2(1 + \kappa)} - 2\pi i. \quad (\text{F.18})$$

Для того чтобы вычислить интеграл вдоль отрезка  $[s_+, s_-]$  в уравнении (F.14) используем контур показанный на Рис. F.2. Он состоит из отрезка  $[s_+, s_-]$  на верхнем крае правого разреза основного листа Римановой поверхности, двух вертикальных прямых идущих от  $s_+$  до  $s_+ - ib$  и от  $s_-$  до  $s_- - ib$  на неосновном листе Римановой поверхности и горизонтальной линии соединяющей точки  $s_+ - ib$  и  $s_- - ib$  с  $b > 0$ . Эта линия также находится на неосновном листе Римановой поверхности. Для вычисления интеграла вдоль этого контура необходимо найти полюса подынтегрального выражения внутри контура. Эти полюса совпадают с корнями уравнения (F.8). Поскольку область внутри контура находится на неосновном листе Римановой поверхности, необходимо найти корни уравнения (F.8) на этом листе.

Несмотря на то что теперь функция  $w(s)$  определяется не уравнением (F.7) а уравнением (F.17), корни уравнения (F.8) близки к 0 или к 1, или к одному из чисел  $\pm s_{\pm}$ . Очевидно что корень близкий к 0 не может находиться внутри контура. Несложный анализ показывает что имеются корни близкие к  $\pm s_-$  и  $\pm s_+$ , но их действительные части равны, соответственно,  $\pm \bar{s}_-$  и  $\pm \bar{s}_+$ , так что эти корни также вне контура. Наконец корень

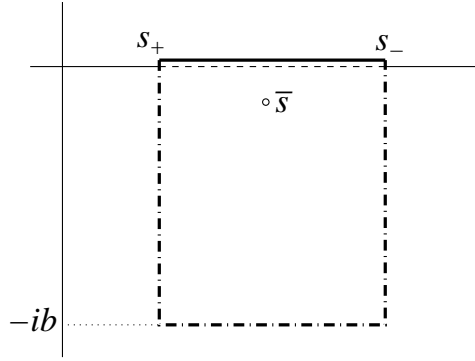


Рис. F.2. Контур интегрирования используемый для вычисления интеграла вдоль отрезка  $[s_+, s_-]$  в уравнении (F.14). Сплошная линия обозначает часть контура совпадающую с верхним краем разреза на основном листе Римановой поверхности. Штрих-пунктирная линия обозначает часть контура на неосновном листе Римановой поверхности. Разрез показан пунктирной линией.

близкий к 1 даётся выражением

$$s = \bar{s} \equiv 1 - \frac{i\pi\epsilon\kappa}{8}. \quad (\text{F.19})$$

Этот корень находится внутри контура. Таким образом,

$$\oint \frac{e^{-iswt} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon\kappa\mathcal{L}[G(t)](s)} = -2\pi i \operatorname{res}_{s=\bar{s}} \frac{e^{-iswt} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon\kappa\mathcal{L}[G(t)](s)}. \quad (\text{F.20})$$

Оценим интегралы вдоль частей контура которые находятся на неосновном Римановом листе. С помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} & \int_{s_-}^{s_- - ib} \frac{e^{-iswt} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon\kappa\mathcal{L}[G(t)](s)} \\ &= \int_0^b \frac{\exp[-\omega t(\sigma + is_-)] ds}{2i - 2i(s_- - i\sigma)^2 - i\epsilon\kappa\mathcal{L}[G(t)](s_- - i\sigma)} \\ &\rightarrow \frac{e^{-i\omega t s_-}}{\omega t} \int_0^\infty e^{-\omega t \sigma} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{2i - 2i(s_- - i\sigma)^2 - i\epsilon\kappa\mathcal{L}[G(t)](s_- - i\sigma)} \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

где предел берётся при  $b \rightarrow \infty$ . Аналогично доказывается что интеграл вдоль вертикальной линии соединяющей точки  $s_+ - ib$  и  $s_+$  порядка  $1/\omega t$ . Наконец, интеграл вдоль горизонтальной линии соединяющей точки  $s_- - ib$  и  $s_+ - ib$  стремится к нулю при  $b \rightarrow \infty$ . В результате имеем

$$\int_{s_+}^{s_-} \frac{e^{-iswt} ds}{2 - 2s^2 - \epsilon\kappa\mathcal{L}[G(t)](s)} = \tilde{C} e^{-i\omega t} \exp\left(-\frac{\pi\epsilon\kappa\omega t}{8}\right) + O(1/\omega t), \quad (\text{F.22})$$

где  $\tilde{C}$  — комплексная постоянная. Аналогичным образом можно вычислить интеграл вдоль отрезка  $[-s_-, -s_+]$ .

Стоит объяснить почему нельзя таким же образом доказать что интеграл вдоль отрезка  $[s_+, s_-]$  порядка  $1/\omega t$ . Причина заключается в том что имеется полюс подынтегрального выражения в точке  $s = \bar{s}$  которая близка к отрезку  $[s_+, s_-]$ . После интегрирования по частям получим  $1/\omega t$  умноженное на некоторый интеграл. Подынтегральное выражение в этом интеграле очень велико в окрестности точки  $s = 1$ , так что произведение не является величиной порядка  $1/\omega t$ .

Суммируя результаты анализа проведённого в настоящем дополнении получаем асимптотическое выражение

$$\eta(t) = C e^{-i\omega t} \exp\left(-\frac{\pi\epsilon\kappa\omega t}{8}\right) + \text{с.с.} + O(1/\omega t), \quad (\text{F.23})$$

где  $C$  — комплексная постоянная, а с.с. обозначает комплексно сопряжённую величину.



## Публикации автора диссертации

1. Dymova M., Ruderman M. S., Non-axisymmetric oscillations of thin prominence fibrils // Solar Physics – 2005 - V. 229, P. 79-94.
2. Dymova M., Ruderman M. S., Resonantly damped oscillations of longitudinally stratified coronal loops // Astron. Astrophys. - 2006a - V. 457, P. 1059-1070.
3. Dymova M., Ruderman M. S., The geometry effect on transverse oscillations of coronal loops // Astron. Astrophys. - 2006b - V. 459, P. 241-244.
4. Goossens M., Ruderman M. S., Conservation laws and connection formulae for resonant MHD waves // Phys. Scripta - 1995 - V. 60, P. 171-184.
5. Goossens M., Ruderman M. S., Hollweg J. V., Dissipative MHD solutions for resonant Alfvén waves in 1-dimensional magnetic tubes // Solar Phys. - 1995 - V. 157, P. 75-102.
6. Goossens M., Erdélyi R., Ruderman, M. S., Resonant MHD waves in the solar atmosphere // Space Sci. Rev. - 2011 - V. 158, P. 289-338.
7. Hood A. W., Ruderman M., Pascoe D. J., De Mortel I., Terradas J., Wright A. N., Damping of kink waves by mode coupling // Astron. Astrophys. - 2013 - V. 551, A39.
8. Robertson D., Ruderman M. S., Taroyan Y., The effect of density stratification on the transverse oscillations of two parallel coronal loops // Astron. Astrophys. - 2010 - V. 515, A33.
9. Robertson D., Ruderman M. S., Resonantly damped oscillations of two coronal loops // Astron. Astrophys. - 2011 - V. 525, A4.
10. Ruderman M. S., Long nonlinear non-axisymmetric surface wave propagation in a magnetic tube // J. Plasma Phys. - 1992a - V. 47, P. 175-191.

11. Ruderman M. S., Nonlinear dissipation of surface Alfvén waves in the solar corona // *Astrophys. J.* - 1992b - V. 399, P. 724-732.
12. Ruderman M. S., Coronal loop heating by torsional Alfvén waves directly driven by footpoint motions: Harmonic driving versus stochastic driving // *Astrophys. J.* - 1999 - V. 521, P. 851-858.
13. Ruderman M. S., The resonant damping of oscillations of coronal loops with elliptic cross-sections // *Astron. Astrophys.* - 2003 - V. 409, P. 287-297.
14. Ruderman M. S., Non-axisymmetric oscillations of thin twisted magnetic tubes // *Solar Physics* - 2007 - V. 246, P. 119–131.
15. Ruderman M. S., On the vertical and horizontal transverse oscillations of curved coronal loops // *Astron. Astrophys.* - 2009 - V. 506, P. 885-893.
16. Ruderman M. S., The effect of flow on transverse oscillations of coronal loops // *Solar Physics* - 2010 - V. 267, P. 377-391.
17. Ruderman M. S., Transverse oscillations of coronal loops with slowly changing density // *Solar Physics* - 2011a - V. 271, P. 41–54.
18. Ruderman M. S., Resonant damping of kink oscillations of cooling coronal magnetic loops // *Astron. Astrophys.* - 2011b - V. 534, A78.
19. Ruderman M. S., Goossens M., Nonlinearity effect on resonant absorption of surface Alfvén waves in incompressible plasmas // *Solar Phys.* - 1993 - V. 143, P. 69-88.
20. Ruderman M. S., Erdélyi, Transverse oscillations of coronal loops // *Space Sci. Rev.* - 2009 - V. 149, P. 199-228.
21. Ruderman M. S., Roberts B., The damping of coronal loop oscillations // *Astrophys. J.* - 2002 - V. 577, P. 475–486.
22. Ruderman M. S., Scott A., Transverse oscillations of non-planar coronal loops // *Astron. Astrophys.* - 2011 - V. 529, A33.
23. Ruderman M. S., Terradas J., Damping of coronal loop kink oscillations due to mode conversion // *Astron. Astrophys.* - 2013 - V. 555, A9.

24. Ruderman M. S., Wright A. N., Nonstationary driven oscillations of a magnetic cavity // *Phys. Plasmas* - 2000 - V. 7, P. 3515-3530.
25. Ruderman M. S., Goossens M., Andries J., Nonlinear propagating kink waves in thin magnetic tubes // *Phys. Plasmas* - 2010 - V. 17, 082108.
26. Ruderman M. S., Oliver R., Erdélyi R., Ballester J. L., Goossens M., Slow surface wave damping in plasmas with anisotropic viscosity and thermal conductivity // *Astron. Astrophys.* - 2000 - V. 354, P. 261–276.
27. Ruderman M. S., Pelinovsky E., Petrukhin N. S., Talipova T., Non-reflective propagation of kink waves in coronal magnetic loops // *Solar Physics* - 2013 - V. 286, P. 417-426.
28. Ruderman M. S., Tirry W., Goossens M., Non-stationary resonant Alfvén surface waves in one-dimensional magnetic plasmas // *J. Plasma Phys.* - 1995 - V. 54, P. 129-148.
29. Ruderman M. S., Verth G., Erdélyi R., Transverse oscillations of longitudinally stratified coronal loops with variable cross-section // *Astrophys. J.* - 2008 - V. 686, P. 694-700.
30. Van Doorselaere T., Ruderman M. S., Robertson D., Transverse oscillations of two parallel coronal loops // *Astron. Astrophys.* - 2008b - V. 485, P. 849–857.

## Литература

1. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З., Физика плазмы для физиков // М.: Атомиздат, - 1979 - с. 12-13.
2. Баранов В. Б., Краснобаев К. В., Гидродинамическая теория космической плазмы // М.: Наука, - 1977.
3. Брагинский С. И., Явления переноса в плазме. В сб. "Вопросы теории плазмы," вып. 1 // Атомиздат, - 1963.
4. Бреховских Л. М., Волны в слоистой среде // М.: Наука, - 1973.
5. Власенко В. И., Генерация внутренних волн в океане с переменной глубиной // Известия Академии Наук СССР, Физика Атмосферы и Океана - 1987. - Т. 23, С. 300-308.
6. Гинзбург В. Л., Распространение электромагнитных волн в плазме // М.: Физматгиз, - 1960.
7. Зайцев В. Ф., Полянин Ф. Д., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнения // М.: Физматлит, - 2001.
8. Зайцев В. В., Степанов А. В., Корональные магнитные арки // Успехи Физ. Наук - 2008 - Т. 178, С. 1166-1204.
9. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., Магнитная гидродинамика // М.: Физматгиз, - 1965.
10. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., Электродинамика сплошных сред // М.: Гостехиздат, - 1957.
11. Петрухин Н. С., Пелиновский Е. Н., Батсина Е. К., Безотражательное распространение звуковых волн в земной атмосфере // Письма ЖЭТФ - 2011 - Т. 93, С. 564-567.
12. Петрухин Н. С., Пелиновский Е. Н., Талипова Т., // Известия атмосферы и океана - 2012 - Т. 48, С. 169-173.

13. РЮТОВ Д. Д., РЮТОВА М. П., ЗВУКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПЛАЗМЕ С МАГНИТНЫМИ ФИЛАМЕНТАМИ // ЖЭТФ - 1976 - Т. 70, С. 943-954.
14. ЧЕН Ф. Введение в физику плазмы // М.: Мир, - 1987 - С. 236-244.
15. Abramowitz M., Stegun I., Handbook of Mathematical Functions // 1964, Washington, DC: Natl. Bur. Stand.
16. Acton L., Tsuneta S., Ogawara Y., Bentley R., Bruner M., Canfield R., Culhane L., Doschek G., Hiei E., Hirayama T., The YOHKOH mission for high-energy solar physics // Science - 1992 - V. 258, P. 618-625.
17. Andries J., Arregui I., Goossens M., Determination of the coronal density stratification from the observation of harmonic coronal loop oscillations // Astrophys. J. - 2005a - V. 624, P. L57-L60.
18. Andries J., Goossens, M., Hollweg, J. V., Arregui I., Van Doorselaere, T., Coronal loop oscillations. Calculation of resonantly damped MHD quasi-mode kink oscillations of longitudinally stratified loops // Astron. Astrophys. - 2005b - V. 430, P. 1109-1118.
19. Andries J., Van Doorselaere T., Roberts B., Verth G., Verwichte E., Erdélyi R., Coronal seismology by means of kink oscillation overtones // Space Sci. Rev. - 2009 - V. 149, P. 3–29.
20. Arregui I., Ballester J. L., Damping mechanisms for oscillations in solar prominences // Space Sci. Rev. - 2011 - V. 158, P. 169–204.
21. Arregui I., Soler R., Ballester J. L., Wright A. N., Magnetohydrodynamic kink waves in two-dimensional non-uniform prominence threads // Astron. Astrophys. - 2011 - V. 533, A60.
22. Arregui I., Oliver, R., Ballester J. L., Prominence Oscillations // Living Rev. Solar Phys. - 2012 - V. 9, A2.
23. Aschwanden M. J., The 3D geometry, motion, and hydrodynamic aspects of oscillating coronal loops // Space Sci. Rev. - 2009 - V. 149, P. 31-64.
24. Aschwanden M. J., Terradas, J., The effect of radiative cooling on coronal loop oscillations // Astrophys. J. - 2008 - V. 686, P. L127-L130.

25. Aschwanden M. J., Schrijver, C. J., Coronal loop oscillations observed with atmospheric imaging assembly – kink mode with cross-section and density oscillations // *Astrophys. J.* - 2011 - V. 736, A102.
26. Aschwanden M. J., Fletcher L., Schrijver C. J., Alexander D., Coronal loop oscillations observed with the transition region and coronal explorer // *Astrophys. J.* - 1999 - V. 520, P. 880-894.
27. Aschwanden M. J., De Pontieu B., Schrijver C. J., Tilte, A.M., Transverse oscillations in coronal loops observed with TRACE II. Measurements of geometric and physical parameters // *Solar Physics* - 2002 - V. 206, P. 99-132.
28. Aschwanden M. J., Wülser J. P., Nitta N. V., Lemen J. R., First three-dimensional reconstructions of coronal loops with the STEREO A and B spacecraft. I. Geometry // *Astrophys. J.* - 2008a - V. 679, P. 827-842.
29. Aschwanden M. J., Nitta N. V., Wülser J.-P., Lemen J. R., First 3D reconstructions of coronal loops with the stereo A+B spacecraft. II. Electron density and temperature measurements // *Astrophys. J.* - 2008b - V. 680, P. 1477-1495.
30. Bender C. M., Orszag S. A., *Advanced mathematical methods for scientist and engineers* // 1987, Auckland: McGraw-Hill.
31. Bennett K., Roberts B., Narain U., *Waves in twisted magnetic flux tubes* // *Solar Physics* - 1999 - V. 185, P. 41-59.
32. Berghmans D., Clette F., *Active region EUV transient brightenings - First results by EIT of SOHO JOP80* // *Solar Physics* - 1999 - V. 186, P. 207-229.
33. Betta R., Orlando S., Peres G., Serio S., *On the stability of siphon flows confined in coronal loops* // *Space Sci. Rev.* - 1999 - V. 87, 133-136.
34. Boris, J. P., *Resistively modified normal modes of an inhomogeneous incompressible plasma*, Ph.D Thesis Princeton University, UMI Dissertation Service, Ann Arbor Michigan - 1968 - P. 172.
35. Bracewell R. N., *The Fourier transform and its applications* // 1999, McGraw-Hill, New York.

36. Brekke P., Kjeldseth-Moe O., Harrison R.A., High-velocity flows in an active region loop system observed with the coronal diagnostic spectrometer (CDS) on SOHO // *Solar Physics* - 1997 - V. 175, P. 511-521.
37. Brekke P., Kjeldseth-Moe O., Brynildsen N., Maltby P., Haugan S. V. H., Harrison R. A., Thompson W. T., Pike C. D., Flows and dynamics in the corona observed with the coronal diagnostic spectrometer (cds) // *Solar Physics* - 1997 - V. 170, P. 163-177.
38. Cally P. S., Alfvén reflection and reverberation in the solar atmosphere // *Solar Physics* - 2012 - V. 280, P. 33-50.
39. Chae J., Ahn K., Lim E.-K., Choe G. S., Sakurai T., Persistent horizontal flows and magnetic support of vertical threads in a quiescent prominence // *Astrophys. J.* - 2008 - V. 689, L73-L76.
40. Cirtain J. W., Golub L., Lundquist L., van Ballegoijen A., Savcheva A., Shimojo M., DeLuca E., Tsuneta S, Sakao T., Reeves K., Weber M., Kano R., Narukage N., Shibasaki K., Evidence for Alfvén waves in solar X-ray jets // *Science* - 2007 - V. 318, P. 1580-1582.
41. Coddington, E. A., Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations* // 1955, McGraw-Hill, New York.
42. Cowling T. G., *Magnetohydrodynamics* // 1960, Interscience.
43. Cram L. E., Wilson P. R., Hydromagnetic waves in structured magnetic fields // *Solar Physics* - 1975 - V. 41, P. 313-327.
44. Defouw R. J., Wave propagation along a magnetic tube // *Astrophys. J.* - 1976 - V. 209, P. 266-269.
45. De Moortel I., Longitudinal waves in coronal loops // *Space Sci. Rev.* - 2009 - V. 149, P. 65-81.
46. De Moortel I., Brady C. S., Observation of higher harmonic coronal loop oscillations // *Astrophys. J.* - 2007 - V. 664, P. 1210-1213.
47. De Moortel I., Ireland J., Walsh R. W. Observation of oscillations in coronal loops // *Astron. Astrophys.* - 2000 - V. 355, P. L23-L26.

48. De Pontieu B., McIntosh S. W., Carlsson M., Hansteen V. H., Tarbell T. D., Schrijver C. J., Title A. M., Shine R. A., Tsuneta S., Katsukawa Y., Ichimoto K., Suematsu Y., Shimizu T., Nagata S., Chromospheric Alfvénic waves strong enough to power the solar wind // *Science* - 2007 - V. 318, P. 1574-1577.
49. Diaz A. J., Oliver R., Ballester J. L., Prominence thread seismology using the  $P1/2P2$  ratio // *Astrophys. J.* - 2010 - V. 725, P. 1742–1748.
50. Didenkulova I., Pelinovsky E., Soomere T., Exact travelling wave solutions in strongly inhomogeneous media // *Proc. Est. Acad. Sci., Eng.* - 2008 - V. 14, P. 220-231.
51. Edwin P. M., Roberts B., Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. III - The slab in a magnetic environment // *Solar Physics* - 1982 - V. 76, P. 239-259.
52. Edwin P. M., Roberts B., Wave propagation in a magnetic cylinder // *Solar Physics* - 1983 - V. 88, P. 179-191.
53. Erdélyi R., Goossens M., Viscous computations of resonant absorption of MHD waves in flux tubes by FEM // *Astrophys. Space Sci.* - 1994 - V. 213, P. 273-298.
54. Erdélyi R., Goossens M., Resonant absorption of Alfvén waves in coronal loops in visco-resistive MHD // *Astron. Astrophys.* - 1995 - V. 294, P. 575-586.
55. Fludra A., Breke P., Harrison R. A., Mason H. E., Pike C. D., Thompson W. T., Young P. R., Active regions observed in extreme ultraviolet light by the coronal diagnostic spectrometer on SOHO // *Solar Physics* - 1997 - V. 175, P. 487-509.
56. Goedbloed J., Poedts S., *Principles of Magnetohydrodynamics* // 2004, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
57. Goossens M., Hollweg J. V., Sakurai T., Resonant behaviour of MHD waves on magnetic-flux tubes. III. Effect of equilibrium-flow // *Solar Physics* - 1992 - V. 138, P. 233-255.
58. Gordon B., Hollweg J. V., Collisional damping of surface waves in the solar corona // *Astrophys. J.* - 1983 - V. 266, P. 373-382.



59. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Nonreflecting internal wave beam propagation in the deep ocean // *J. Phys. Oceanography* - 2010 - V. 40, P. 802-813.
60. Grossmann W., Tataronis J. A., Decay of MHD waves by phase mixing // *Z. Phys.* - 1973 - V. 261, P. 217-236.
61. Gruszecki M., Murawski K., Ofman L., Standing fast magnetoacoustic kink waves of solar coronal loops with field-aligned flow // *Astron. Astrophys.* - 2008 - V. 488, P. 757-761.
62. Hain K., Lüst R., Zur stabilität zylindersymmetrischer plasmakonfigurationen mit volumenströmen // *Z. Naturforsch* - 1958 - V. 13a, P. 936-940.
63. Harvey J. V., Observations of small-scale photospheric magnetic fields // *Highlights of Astronomy* - 1977 - V. 4, Part II, P. 223-239.
64. He J., Marsch E., Tu C.-Y., Tian H., Excitation of kink waves due to small-scale magnetic reconnection in the chromosphere? // *Astrophys. J. Lett.* - 2009a - V. 705, P. L217-L222.
65. He J., Tu C.-Y., Marsch E., Guo L.-J., Yao S., Tian H., Upward propagating high-frequency Alfvén waves as identified from dynamic wave-like spicules observed by SOT on Hinode // *Astron. Astrophys.* - 2009b - V. 497, P. 525-535.
66. Heyvaerts, J., Priest, E. R., Coronal heating by phase-mixed shear Alfvén waves // *Astron. Astrophys.* - 1983 - V. 117, P. 220-234.
67. Hollweg J. V., Viscosity in a magnetized plasma - Physical interpretation // *J. Geophys. Res.* - 1985 - V. 90, P. 7620-7622.
68. Hollweg J. V., Resonance absorption of magnetohydrodynamic surface waves: Physical discussion // *Astrophys. J.* - 1987 - V. 312, P. 880-885.
69. Hollweg J. V., Yang G., Resonance-absorption of compressible magnetohydrodynamic waves at thin surfaces // *J. Geophys. Res.* - 1988 - V. 93, P. 5423-5436.
70. Ibragimov N. H., Rudenko O. V., Principle of an a priori use of symmetries in the theory of nonlinear waves // *Acoust. Phys.* - 2004 - V. 50, P. 406-419.

71. Ionson, J. A., Resonant absorption of Alfvénic surface waves and the heating of solar coronal loops // *Astrophys. J.* - 1978 - V. 226, P. 650-673.
72. Jess D. B., Mathioudakis M., Erdélyi R., Crockett P. J., Keenan F. P., Christian D. J., Alfvén waves in the lower solar atmosphere // *Science* - 2009 - V. 323, P. 1582-1585.
73. Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C. C., Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in cold plasma // *J. Phys. Soc. Japan* - 1968 - V. 24, P. 1159-1166.
74. Kappraff J. M., Tataronis, J. A., Resistive effects on Alfvén wave heating // *J. Plasma Phys.* - 1977 - V. 18, P. 209-226.
75. Khodachenko M. L., Zaitsev V. V., Kislyakov A. G., Stepanov A. V., Equivalent electric circuit models of coronal magnetic loops and related oscillatory phenomena on the sun // *Space. Sci. Rev.* - 2009 - V. 149, P. 83-117.
76. Kjeldseth-Moe O., Breke P., Time Variability of Active Region Loops Observed with the Coronal Diagnostic Spectrometer (Cds) on SOHO // *Solar Physics* - 1998 - V. 182, P. 73-95.
77. Kliem B., Dammasch I. E., Curdt W., Wilhelm K., Correlated dynamics of hot and cool plasmas in the main phase of a solar flare // *Astrophys. J.* - 2002 - V. 568, P. L61-L65.
78. Korn G., and Korn T., *Mathematical handbook for scientists and engineers* // 1961, New York: McGraw-Hill.
79. Kruskal M., Tuck J. L., The instability of a pinched fluid with a longitudinal magnetic field // *Proc. R. Soc. Lond. A* - 1958 - V. 245, P. 222-237.
80. Lee M. A., Roberts B., On the behavior of hydromagnetic surface waves // *Astrophys. J.* - 1986 - V. 301, P. 430-439.
81. Luna M., Terradas J., Oliver R., Ballester J. L., Transverse oscillations of two coronal loops // *Astrophys. J.* - 2008 - V. 676, P. 717-727.

82. Mann I. R., Wright A. N., Cally P. S., Coupling of magnetospheric cavity modes to field line resonances - a study of resonance widths // *J. Geophys. Res.* - 1995 - V. 100, P. 19441-19456.
83. Mathioudakis M., Jess D. B., Erdélyi R., Alfvén waves in the solar atmosphere // *Space Sci. Rev.* - 2013 - V. 175, P. 1-27.
84. McIntosh S. W., De Pontieu B., Caelsson M., Hansteen V., Boemer P., Goossens M., Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar coronal and fast solar wind // *Nature* - 2011 - V. 475, P. 477-480.
85. Moffatt H. K., *Magnetic field generation in electrically conducting fluids* // 1978, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
86. Mok Y., Einaudi G., Resistive decay of Alfvén waves in a non-uniform plasma // *J. Plasma Phys.* - 1985 - V. 33, P. 199-208.
87. Morton R. J., Erdélyi R., Transverse oscillations of a cooling coronal loop // *Astrophys. J.* - 2009 - V. 707, P. 750–760.
88. Morton R. J., Erdélyi R., Application of the theory of damping of kink oscillations by radiative cooling of coronal loop plasma // *Astron. Astrophys.* - 2010 - V. 519, A43.
89. Naimark M. A., *Linear differential operators, Part I* // 1967, Frederic Ungar Publ. Co., New York.
90. Nakariakov V. M., Ofman L., DeLuca E. E., Roberts B., Davila J. M., TRACE observation of damped coronal loop oscillations: Implications for coronal heating // *Science* - 1999 - V. 285, P. 862-864.
91. Nakariakov V. M., Ofman L., Determination of the coronal magnetic field by coronal loop oscillations // *Astron. Astrophys.* - 2001 - V. 372, P. L53-L56.
92. Nakariakov V. M., Melnikov V. F., Quasi-periodic pulsations in solar flares // *Space Sci. Rev.* - 2009 - V. 149, P. 119-151.
93. Ofman, L., Wang, T. J., Hinode observations of transverse waves with flows in coronal loops // *Astron. Astrophys.* - 2008 - V. 482, L9-12.

94. Ofman L., Davila J. M., Steinolfson R. S., Coronal heating by the resonant absorption of Alfvén waves: The effect of viscous stress tensor // *Astrophys. J.* - 1994 - V. 421, P. 360-371.
95. Okamoto T. J., Tsuneta S., Berger T. E., Ichimoto K., Katsukawa Y., Lites B. W., Nagata S., Shibata K., Shimizu T., Shine R. A., Suematsu Y., Tarbell T. D., Title A. M., Coronal transverse magnetohydrodynamic waves in a solar prominence // *Science* - 2007 - V. 318, P. 1577-1580.
96. Orlando S., Peres G., Serio S., Models of stationary siphon flows in stratified, thermally conducting coronal loops. 1: Regular solutions // *Astron. Astrophys.* - 1995 - V. 294, P. 861-873.
97. O'Shea E., Srivastava A. K., Doyle J. G., Banerjee D., Evidence for wave harmonics in cool loops // *Astron. Astrophys.* - 2007 - V. 473, P. L13-L16.
98. Papoulis A., *The Fourier integral and its applications* // 1962, McGraw-Hill, New York.
99. Parker E. N., The nature of the sunspot phenomenon. II: Internal overstable modes // *Solar Physics* - 1974 - V. 37, P. 127-144.
100. Parker E. N., *Cosmical magnetic fields* // 1979, Oxford Univ. Press, Oxford.
101. Pascoe D. J., Hood A. W., De Mortel I., Wright A. N., Spatial damping of propagating kink waves due to mode coupling // *Astrophys. J.* - 2012 - V. 539, A37.
102. Poedts S., Kerner W., Ideal quasimodes reviewed in resistive magnetohydrodynamics // *Phys. Rev. Lett.* - 1991 - V. 66, P. 2871-2874.
103. Poedts S., Goossens M., Kerner W., Temporal evolution of resonant absorption in solar coronal loops // *Comput. Phys. Commun.* - 1990 - V. 59, P. 95-103.
104. Priest E. R., The structure of coronal loops // *Solar Physics* - 1978 - V. 58, P. 57-87.
105. Priest E. R., *Solar magnetohydrodynamics* // 1982, Reidel, Dordrecht.
106. Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. J. *Mathematical methods for physics and engineering* // 2002, Cambridge University Press, Cambridge.

107. Robbrecht E., Verwichte E., Berghmans D., Hochedez J. F., Poedts S., Nakariakov V. M., Slow magnetoacoustic waves in coronal loops: EIT and TRACE // *Astron. Astrophys.* - 2001 - V. 370, P. 591-601.
108. Roberts B., Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. I: Surface waves on a magnetic interface // *Solar Physics* - 1981a - V. 69, P. 27-38.
109. Roberts B., Wave propagation in a magnetically structured atmosphere. II: Surface waves in a magnetic slab // *Solar Physics* - 1981b - V. 69, P. 39-56.
110. Roberts B., Webb A. R., Vertical motions in an intense magnetic flux tube // *Solar Physics* - 1978 - V. 56, P. 5-35.
111. Roberts B., Webb A. R., Vertical motions in an intense magnetic flux tube. III - On the slender flux tube approximation // *Solar Physics* - 1979 - V. 64, P. 77-92.
112. Roberts B., Edwin P. M., Benz A. O., On coronal oscillations // *Astrophys. J.* - 1984 - V. 279, P. 857-865.
113. Roberts P. H., Twisted magnetic fields // *Astrophys. J.* - 1956 - V. 124, P. 430-442.
114. Rosenberg H., Evidence for mhd pulsations in the solar corona // *Astron. Astrophys.* - 1970 - V. 9, P. 159-162.
115. Ryutova M., Shine R., Title A., Sakai J. I., A possible mechanism for the origin of emerging flux in the sunspot moat // *Astrophys. J.* - 1998 - V. 492, P. 402-414.
116. Ryutova M., Hogenaar H., Magnetic solitons: Unified mechanism for moving magnetic features // *Solar Physics* - 2007 - V. 246, P. 281-294.
117. Sakurai T., Goossens M., Hollweg J. V., Resonant behaviour of MHD waves on magnetic flux tubes. I. Connection formulae at the resonant surface // *Solar Physics* - 1991 - V. 133, P. 227-245.
118. Schrijver C. J., Title A. M., Hagenaar H. J., Shine R. A., Modeling the distribution of magnetic fluxes in field concentrations in a solar active region // *Solar Physics* - 1997 - V. 175, P. 329-340.

119. Schrijver C. J., Aschwanden M. J., Title A., Transverse oscillations in coronal loops observed with TRACE I. An overview of events, movies, and a discussion of common properties and required conditions // *Solar Physics* - 2002 - V. 206, P. 69-98.
120. Sedláček Z., Electrostatic oscillations in cold inhomogeneous plasma I. Differential equation approach // *J. Plasma Phys.* - 1971 - V. 5, P. 239-263.
121. Shafranov V. D., On magnetohydrodynamic equilibrium configurations // *Soviet Physics - ZhTP* - 1958 - V. 6, P. 545-554.
122. Soler R., Arregui I., Oliver R., Ballester J. L., Seismology of standing kink oscillations of solar prominence fine structure // *Astrophys. J.* - 2010 - V. 722, P. 1778–1792.
123. Soler R., Terradas J., Verth G., Goossens M., Resonantly damped propagating kink waves in longitudinally stratified solar waveguides // *Astrophys. J.* - 2011a - V. 736, A10.
124. Soler R., Terradas J., Goossens M., Spatial damping of propagating kink waves due to resonant absorption: Effect of background flow // *Astrophys. J.* - 2011b - V. 734, A80.
125. Spruit H. C., Motion of magnetic flux tubes in the solar convection zone and chromosphere // *Astron. Astrophys.* - 1981 - V. 98, P. 155-160.
126. Taniuti T., Wei C. C., Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. I // *J. Phys. Soc. Japan* - 1968 - V. 24, P. 941-946.
127. Taniuti T., Reductive perturbation method and far fields of wave equations // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* - 1974 - V. 55, P. 1-35.
128. Tataronis J. A., Grossmann W., Decay of MHD waves by phase mixing // *Z. Phys.* - 1973 - V. 261, P. 203-216.
129. Temam R. M., Miranville A. M., *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics* // 2005, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
130. Terradas, J., Arregui, I., Oliver, R., Ballester, J. L., Transverse oscillations of flowing prominence threads observed with Hinode // *Astrophys. J.* - 2008 - V. 678, P. L153-L156.

131. Terradas J., Oliver R., Ballester J. L., Damping of kink oscillations in curved coronal loops // *Astrophys. J.* - 2006 - V. 650, P. L91-L94.
132. Terradas J., Goossens M., Verth G., Selective spatial damping of propagating kink waves due to resonant absorption // *Astron. Astrophys.* - 2010a - V. 524, A23.
133. Terradas J., Goossens M., Ballai I., Selective spatial damping of propagating kink waves due to resonant absorption // *Astron. Astrophys.* - 2010b - V. 515, A46.
134. Terradas J., Goossens M., Transverse kink oscillations in the presence of twist // *Astron. Astrophys.* - 2012 - V. 548, A112.
135. Threlfall J., De Moortel I., McIntosh S. W., Bethge C., First comparison of wave observations from CoMP and AIA/SDO // *Astron. Astrophys.* - 2013 - V. 556, A124.
136. Tirry W. J., Goossens M., Quasi-modes as dissipative magnetohydrodynamic eigenmodes: Results for one-dimensional equilibrium states // *Astrophys. J.* - 1996 - V. 471, P. 501-509.
137. Titchmarsh E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals // 1948, Clarendon, Oxford.
138. Tomczyk S., McIntosh S. W., Keil S. L., Judge P. G., Schad T., Seeley D. H., Edmondson J., Alfvén waves in the solar corona // *Science* - 2007 - V. 317, P. 1192-1196.
139. Uberoi C., Narayanan A. S., Effect of variation of magnetic field direction on hydromagnetic surface waves // *Plasma Phys. Contr. Fusion* - 1986 - V. 28, P. 1635-1643.
140. Uchida Y., Diagnostics of coronal magnetic structure by flare-associated hydromagnetic disturbances // *Publ. Astr. Soc. Japen* - 1970 - V. 22, P. 341-364.
141. Vaiana G. S., Rosner R., Recent advances in coronal physics // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* - 1978. - V. 16, P. 393-428.

142. Van Doorselaere T., Debosscher A., Andries J., Poedts S., The effect of curvature on quasi-modes in coronal loops // *Astron. Astrophys.* - 2004 - V. 424, P. 1065-1074.
143. Van Doorselaere T., Nakariakov V., Verwichte E., Coronal loop seismology using multiple transverse loop oscillation harmonics // *Astron. Astrophys.* - 2007- V. 473, P. 959-966.
144. Van Doorselaere T., Nakariakov V., Verwichte E., Detection of waves in the solar atmosphere: Kink or Alfvén? // *Astrophys. J. Lett.* - 2008a - V. 676, P. L73-L75.
145. Van Doorselaere T., Verwichte E., Terradas J., The effect of loop curvature on coronal loop kink oscillations // *Space Sci. Rev.* - 2009 - V. 149, P. 299-324.
146. Verth, G., Erdélyi, R., Jess D. B., Refined magnetoseismological technique for the solar corona // *Astrophys. J.* - 2008 - V. 687, P. L45-L48.
147. Verwichte E., Nakariakov V. M., Ofman L., Deluca E. E., Characteristics of transverse oscillations in a coronal loop arcade // *Solar Physics* - 2004 - V. 223, P. 77-94.
148. Vlasenko V. I., Stashchuk N., Hutter K., Sabinin K., Nonlinear internal waves forced by tides near the critical latitude // *Deep-Sea Res.* - 2002. - V. 50, P. 317-338.
149. Wang T., Standing slow-mode waves in hot coronal loops: Observations, modeling, and coronal seismology // *Space Sci. Rev.* - 2011 - V. 158, P. 397-419.
150. Wang T. J., Solanki S. K., Vertical oscillations of a coronal loop observed by TRACE // *Astron. Astrophys.* - 2004 - V. 421, P. L33-L36.
151. Wang T. J., Solanki S. K., Curdt, W., Innes D. E., Dammasch I. E., Doppler shift oscillations of hot solar coronal plasmas seen by SUMER: A signature of loop oscillations? // *Astrophys. J.* - 2002 - V. 574, P. L101-L104.
152. Wang T. J., Solanki S. K., Curdt W., Innes D. E., Dammasch I. E., Kliem B., Hot coronal loop oscillations observed with SUMER: Examples and statistics // *Astron. Astrophys.* - 2003a - V. 406, P. 1105-1121.



153. Wang T. J., Solanki S. K., Innes D. E., Curdt W., Marsch E., Slow-mode standing waves observed by SUMER in hot coronal loops // *Astron. Astrophys.* - 2003b - V. 402, P. L17-L20.
154. Wang T. J., Solanki S. K., Selva M., Identification of different types of kink modes in coronal loops: Principles and application to TRACE results // *Astron. Astrophys.* - 2008 - V. 489, P. 1307–1317.
155. Wentzel D. G., Hydromagnetic surface waves // *Astrophys. J.* - 1979. - V. 227, P. 319-322.
156. Wentzel D. G., Hydromagnetic surface waves on cylindrical fluxtubes // *Astron. Astrophys.* - 1979 - V. 76, P. 20-23.
157. Wilson P. R., Hydromagnetic wave modes in magnetic flux tubes // *Astron. Astrophys.* - 1979 - V. 71, P. 9-13.
158. Winebarger A. R., DeLuca E. E., Golub L., Apparent flows above an active region observed with the Transition Region and Coronal Explorer // *Astrophys. J.* - 2001 - V. 553, P. L81-84.
159. Winebarger A. R., Warren H., van Ballegoijen A., DeLuca E. E., Golub L., Steady flows detected in extreme-ultraviolet loops // *Astrophys. J.* - 2002 - V. 567, P. L89-L92.
160. Wright, A. N., Coupling of fast and Alfvén modes in realistic magnetospheric geometries // *J. Geophys. Res.* - 1992a - V. 97, P. 6429-6438.
161. Wright, A. N., Asymptotic and time-dependent solutions of magnetic pulsations in realistic magnetic-field geometries // *J. Geophys. Res.* - 1992b - V. 97, P. 6439-6450.
162. Zwaan C., On the appearance of magnetic flux in the solar photosphere // *Solar Physics* - 1978. - V. 60, P. 213-240.