

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Кафедра теории вероятностей

На правах рукописи

Илларионов Егор Александрович

**Количественные показатели эволюции магнитных  
полей на Солнце**

01.03.03 – Физика Солнца

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. Соколов Д.Д.

Москва – 2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Современное состояние проблемы изучения солнечных магнитных полей</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Рост векторных полей в терминах произведения случайных матриц</b>	<b>33</b>
1	Предварительные сведения . . . . .	33
2	Уравнение Якоби и произведение случайных матриц . . . . .	35
3	Инвариантная мера для уравнения Якоби . . . . .	39
4	Показатель Ляпунова . . . . .	52
5	Моменты старших порядков . . . . .	55
6	Магнитное поле в случайном потоке . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Магнитное поле в цикле солнечной активности</b>	<b>64</b>
1	Солнечный цикл в свете наблюдательных данных . . . . .	64
2	Данные о пятенной активности . . . . .	66
3	Методы кластерного анализа . . . . .	67
3.1	Алгоритм DBSCAN . . . . .	67
3.2	Алгоритм кластеризации <i>C</i> -means . . . . .	70
3.3	Устойчивость разделения на кластеры . . . . .	73
4	Приложения методов кластерного анализа . . . . .	75
5	Архивные данные . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Генерация магнитного поля в цикле солнечной активности</b>	<b>82</b>
1	Теория динамо и альфа-эффект . . . . .	82
2	Выделение биполярных структур на магнитограммах . . . . .	84
3	Средний тилт-угол . . . . .	88
4	Закон Джоя . . . . .	90
5	Циклические изменения тилт-угла . . . . .	93
6	Распределение тилт-угла на широтно-временной диаграмме . . . . .	96
7	Нарушения правила полярности Хейла . . . . .	97
8	Оценка альфа-эффекта . . . . .	98
9	Распределение тилт-угла в свете теорий динамо . . . . .	100

<b>6 Заключение</b>	<b>110</b>
Список литературы . . . . .	117

# Глава 1

## Введение

**Актуальность темы** Современный взгляд на природу многих активных процессов, наблюдаемых на Солнце, предполагает присутствие магнитных полей в качестве основного фактора, влияющего на их формирование. Многообразие и выраженный нестационарный характер активных процессов является свидетельством сложной структуры магнитных полей. Изучать эту структуру можно качественными методами, опираясь на современные и исторические данные о солнечной активности, и на основе теоретической модели эволюции магнитного поля, называемой теорией солнечного динамо. Для того, чтобы согласовать эти два подхода, необходимо иметь возможность их сравнения в количественных показателях.

В части наблюдательных данных сложность получения количественных значений обычно обусловлена разного рода ограниченностью данных, например, по времени или по числу наблюдаемых компонент вектора, и степенью развития методов массовой алгоритмической обработки. В то же время, изучение моделей физических систем, в которых присутствует развитая турбулентность, существенно затрудняется обстоятельствами другого рода. С одной стороны, необходимый математический инструментарий, с помощью которого можно было бы эффективным образом описывать подобные процессы, окончательно оформился лишь к середине 20 века. Речь, в первую очередь, идет о вероятностном и статистическом подходе, закрепленном в работах А.Н. Колмогорова [22]–[25]. А с другой стороны, далеко не очевидным представлялся и сам факт того, что случайные флуктуации в системе могут оказывать ненулевое результирующее действие.

Однако как показали уже первые целенаправленные исследования, случайности в среде могут не просто влиять, но и определять динамику системы и служить источником накопления энергии и прогрессивного усиления протекающих процессов. Эти результаты оказались столь неожиданными, что привели к мощному всплеску интереса к интеграции вероятностного подхода в изучение динамики.

Начиная с середины 20 века, бурно стали развиваться исследования, стоящие на стыке физических и вероятностно-статистических подходов. Впоследствии они закрепились в самостоятельные разделы, такие как статистическая гидромеханика, магнитная гидродинамика и другие. Этот союз в течение короткого промежутка времени дал множество замечательных результатов, которые успели стать классическими и лечь в основу представлений о физике данного раздела.

Одним из результатов стало понимание условий и демонстрация факта усилению векторных полей, переносимых случайной средой. Оказалось, что случайности служат основным механизмом появления выраженных структур в среде и получаемая картина разительным образом отличается от ожидаемой более или менее равномерной. Эти структуры имеют ряд особенностей: они появляются в виде пиков в случайных местах и в случайные моменты времени, в то время как промежутки между пиками характеризуются большой протяженностью и малой интенсивностью. На это явление, получившее название перемежаемости, в свое время обратил внимание, в частности, Я.Б. Зельдович в контексте магнитных задач и изучения уравнений переноса (напр., [12]).

Интенсивность и частота появления пиков оказывается нетипичной для гауссовского случая, который по общепринятой традиции полагается в качестве основного распределения. Более того, если в гауссовском случае подобными выбросами можно пренебречь, то в условиях перемежаемой величины напротив, в этих пиках сосредотачивается почти вся энергия генерируемого поля, и именно они вносят основной вклад в среднее значение поля и его средний квадрат. Хорошей иллюстрацией данного явления служат солнечные пятна, которые занимают небольшие участки на поверхности Солнца, но при этом концентрируют магнитное поле, в сотни и тысячи раз превышающим уровень спокойного Солнца.

Другой особенностью перемежаемой величины является, опять же по сравнению с гауссовским случаем, нетипичный рост не только первого и второго момента, но и старших статистических моментов. Моменты растут прогрессивным образом, и второй момент растет быстрее квадрата первого, четвертый – быстрее квадрата второго и произведение первого с третьим и т.д. Примеры подобных величин и их связь, например, с задачей распространения света во Вселенной с неоднородностями [11], получили развитие в работах Я.Б. Зельдовича и продолжали исследоваться его учениками.

Нужно отметить, что, благодаря физической интуиции, значительную часть утверждений удавалось выводить из соображений размерности и общих физических принципов. При этом, однако, крайне редко удавалось получить точные числовые соотношения, и еще реже – пронаблюдать их в эксперименте. Дело в том, что многие явления носят пороговый характер, т.е. наступают при превышении некоторых критических значений, которые крайне трудно достичь в лабораторных условиях. В этой связи большие надежды возлагаются на численный эксперимент и математическое моделирование.

В то же время, математическое развитие вопроса шло, как это часто бывает, своим чередом и вне контекста астрономических задач. Отправной точной принято считать цикл работ Г. Ферстенберга [54]-[55], посвященный теории произведения случайных матриц. Теоремы, которые ему удалось доказать, открывают прямой путь по вычислению показателей роста нормы произведения случайных матриц, что является аналогом задачи о росте векторных полей в условиях т.н. короткокоррелированного приближения.

Долгое время результаты Ферстенберга оставались мало задействованными в контексте прикладных задач, поскольку были сформулированы на достаточно тяжелом математическом языке и предполагали работу со сложными объектами. Получение ответов аналитическим путем представлялось возможным лишь в простейших случаях, а более менее интересные с физической точки зрения задачи не поддавались анализу без привлечения численных методов. В работах В. Н. Тутубалина ([34], [88], [89]) удалось сформулировать результаты Ферстенберга в более простых терминах и адаптировать их под конкретные задачи, но и здесь все упиралось в решение нетривиальных интегральных уравнений.

Таким образом, применение аппарата случайных матриц к задачам о ро-

сте векторных полей является актуальным направлением и представляет собой практически неисследованную область.

Наравне с модельными задачами мы изучаем вопрос о вычислении количественных показателей в реальных наблюдаемых системах. Самым наглядным примером нетривиальной эволюции векторного поля служит феномен 11-летней солнечной цикличности. Гипотеза периодичности появления максимумов и минимумов в числе солнечных пятен была высказана еще в 19 веке, и с тех пор ведется пристальное наблюдение за особенностями каждого цикла. При этом само понятие цикла остается весьма расплывчатым и допускает известные вариации в определении его границ, что влечет за собой и неоднозначность в определении каких-либо количественных показателей. Поэтому актуальны работы по алгоритмическому решению данной задачи. Особый интерес связан с применением этих методов к историческим данным, для которых известно далеко не все то, что можно использовать при работе с современными данными. Можно надеяться на то, что разработка алгоритмов, устойчивых к различным погрешностям и способных обучаться на малых выборках, позволит восстановить важную информацию о характере солнечной активности до начала 20 века.

С точки зрения теории солнечного динамо, видимые периодические структуры в распределении пятен на широтно-временной диаграмме отражают только одну часть полного цикла. Вторая его компонента связана с механизмом альфа-эффекта, который проявляется в систематическом наклоне биполярных областей по отношению к солнечному экватору. Получение количественных оценок величины угла наклона крайне осложнено по причине неустойчивости магнитных структур и малости характерных значений угла наклона. По сути, задача сводится к сбору большого количества примеров биполярных областей и разработке специальных методов обработки данным с целью снижения уровня шума и получения устойчивых результатов.

**Объект и методы исследования** Задача о вычислении количественных показателей имеет множество аспектов. Начинать ее рассмотрение мы будем с простых систем дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами, которые допускают точные решения. В качестве примеров мы рассматриваем модельное уравнение Якоби со случайным параметром кри-

визны и уравнение эволюции магнитного поля в однородном и изотропном поле скоростей. Следующим шагом мы переходим к более сложной модели эволюции магнитного поля, которая существует в рамках теории солнечного динамо. Для этой модели мы проверяем, в какой степени ее положения соответствуют тем количественным характеристикам, которые можно извлечь из наблюдательных данных по солнечной активности.

Более детально, работа выстроена следующим образом. Вначале мы выбираем пример, который задается относительно простой системой уравнений со случайными коэффициентами и для которого предполагается качественная картина роста решений. Удобным примером, сохраняющим отношение к физическим задачам, является модельное уравнение Якоби, которое уже использовалось в качестве отправной точки рядом авторов, например, [29] и [27]. Для этого примера мы впервые применяем аппарат случайных матриц, основанный на теоремах Ферстенберга. Предложенный метод позволяет вычислять точные значения показателей роста, которые мы затем сравниваем с результатами численного эксперимента. Сравнение должно ответить на вопрос, в какой степени численный эксперимент способен воспроизводить ожидаемую картину поведения решений.

Разработанный на примере модельного уравнения Якоби метод получения оценок скорости роста векторных полей мы переносим на задачу описания эволюции магнитного поля в потоке проводящей жидкости. Рассматриваемое уравнение эволюции служит основой для более сложных систем, возникающих в магнитной гидродинамике. Мы ограничиваемся случаем однородного и изотропного поля скоростей и изучаем вопрос о получении показателей роста магнитного поля, переносимого вместе с потоком. Метод получения количественных значения основывается на комбинации идей короткокоррелированного приближения и теорем о росте нормы произведения случайных матриц.

Далее мы обращаемся к реальной наблюдаемой картине эволюции магнитных полей на Солнце. Среди всех активных процессов, являющихся трасерами магнитных полей, наиболее длинный ряд имеют наблюдения о количестве и распределении солнечных пятен. В работе мы используем каталоги современных наблюдений солнечных пятен и обогащаем их реконструированными сведениями за исторический период 18 и 19 веков. Применение методов



кластерного анализа к полученному массиву данных позволяет восстановить ключевые параметры циклов солнечной активности и сделать выводы об их вариации.

Для описания более тонких процессов генерации магнитных полей мы используем карты магнитной активности Солнца, полученных с наземных и орбитальных магнитографов. На картах алгоритмически выделяются биполярные структуры и измеряется их угол наклона по отношению к экватору (тилт-угол). Величина тилт-угла служит трассером процессов преобразования тороидальной компоненты поля в полоидальную. Статистические методы обработки и построение широтно-временных диаграмм позволяет судить об интенсивности этих процессов и распределении активных зон.

**Цель диссертации и вытекающие из нее задачи** Целью работы является количественная оценка показателей, характеризующих эволюцию магнитных полей на Солнце. Количественные значения получаются в результате изучения модели процесса и путем интерпретации данных натуральных наблюдений. Поэтому работа предполагает как теоретическое исследование вопросов роста векторных полей, так и согласование моделей с наблюдательными данными.

В рамках цели диссертации ставятся следующие задачи:

1. Получить количественное значение показателя роста поля Якоби для модельного уравнения Якоби со случайным параметром кривизны в рамках теории произведения случайных матриц.
2. Получить оценки скорости роста магнитного поля и старших статистических моментов в однородном и изотропном поле скоростей;
3. Изучить структуру солнечных циклов и волн активности на основе современных и исторических наблюдений о пятенной активности;
4. Построить распределение параметров биполярных областей;
5. Установить взаимосвязь между параметрами биполярных областей;
6. Получить оценку для величины альфа-эффекта на основе данных о распределении тилт-угла биполярных областей.

Решение поставленных задач предполагает разработку новых и совершенствование известных методов обработки наблюдательных данных, адаптацию современных методик анализа больших массивов данных с учетом представлений о физике изучаемых процессов.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Получена плотность распределения инвариантной меры для модельного уравнения Якоби со случайным параметром кривизны, на основе найденной меры получены оценки скорости роста поля Якоби.
2. Найдены оценки скорости роста магнитного поля и старших статистических моментов в однородном и изотропном поле скоростей путем сведения к задаче о росте произведения случайных матриц.
3. Определены характеристики циклов и волн активности по современным и архивным данным на основе алгоритмической процедуры выделения структур на солнечных баттерфляй-диаграммах.
4. Представлено широтно-временное распределение тилт-угла биполярных областей на Солнце, обнаружены различия свойств больших и малых биполярных областей.

**Научная новизна** В работе впервые удалось получить количественные значения скорости роста поля Якоби со случайным параметром кривизны на основе расчета по его точному аналитическому выражению. Это оказалось возможным благодаря реализации численной схемы, позволяющей найти инвариантную меру, задающую искомую скорость роста. Ранее для нахождения скорости роста использовались методы типа Монте-Карло, дающие лишь приближенную оценку, в предположении, что число реализаций достаточно велико. Наше сравнение показало высокую степень согласия оценочных значений и результатов интегрирования по инвариантной мере, что подтверждает сложившиеся представления относительно характера эволюции поля Якоби.

Изучение модельного уравнения Якоби позволило предложить дальнейшее применение теории произведения случайных матриц к вычислению скоростей роста статистических моментов магнитного поля в случайном потоке.

Здесь удалось показать, что в предположении об однородности и изотропности поля скоростей и в отсутствие магнитной диффузии, скорости роста магнитного поля и моментов старшего порядка выводятся аналитическим путем. Получены оценки для показателей роста.

Обработка и статистический анализ наблюдательных данных о солнечной магнитной активности обнаружила новые сведения, обогащающие представление о режимах работы солнечного динамо. Выделим основные положения: 1) впервые была предложена методика кластерного анализа для разделения волн активности на солнечных баттерфляй-диаграммах, предложенный метод не требует знаний о полярности пятен; 2) применение методики разделения волн активности позволило показать структуру циклов по данным исторических наблюдений и выявить необычное строение одного из циклов; 3) построены широтно-временные диаграммы распределения тилт-угла биполярных областей, изучена связь с интенсивностью солнечных циклов; 4) обнаружено различие большой и малых биполярных областей по широкому спектру свойств.

**Практическая ценность результатов** Ценность результатов диссертации складывается из нескольких факторов.

Во-первых, близость получаемых результатов вычисления показателей роста поля Якоби путем интегрирования по инвариантной меры и путем моделирования методами Монте-Карло обосновывает возможность применения генераторов случайных чисел для изучения явления перемежаемости в данном примере. Аналогичные численные эксперименты позволят ответить на более тонкие вопросы о росте старших статистических моментов.

Во-вторых, применение теории произведения случайных матриц к задаче об эволюции магнитного поля продемонстрировало возможности данного подхода и открыло прямой путь по численному и аналитическому изучению эволюции магнитного поля в более сложно устроенных течениях.

В-третьих, представляют интерес как сами методики, так и результаты, полученные в ходе обработки наблюдательных данных по солнечной активности. Предложенный алгоритмический метод обработки солнечных баттерфляй-диаграмм выделяет границы циклов и волн активности, не опираясь на данные о знаке магнитного поля в пятне. Эта особенность позволяет

применять алгоритм для распознавания циклов на основе исторических данных. В целом, применение алгоритмической процедуры позволяет устранять ошибки и искажения, допускаемые при проведении границ визуальной оценкой.

Представленные в работе результаты по изучению статистики биполярных областей на Солнце ориентируют наблюдателей на изучение малых областей, которые ранее предполагались распределенными случайным образом, и потому считались малоинтересными для исследования. Детальное наблюдение малых областей, потребует, безусловно, разработки новых более совершенных телескопов с высоким разрешением и более качественных методов обработки получаемого сигнала.

**Область применения результатов** С учетом широты рассмотренного круга задач, полученные результаты могут найти применение как в теоретическом аспекте в рамках теории солнечного динамо и теории случайных процессов, так и в прикладном аспекте в вопросах алгоритмической обработки больших массивов наблюдательных данных.

**Степень достоверности и апробация работы** Предложенные методы и полученные результаты прошли апробацию и обсуждение на международных конференциях: «40th COSPAR Scientific Assembly» (Москва, 2014), «Space Climate 6 Symposium» (Леви, 2016), «Helicity, Structures and Singularity in Fluid and Plasma Dynamics» (Венеция, 2016), «SCOSTEP'S 13th Quadrennial Solar-Terrestrial Physics Symposium» (Сиань, 2014), «Физика Солнца: теория и наблюдения» (Научный, 2015), «Knots and Links in Fluid Flows — from helicity to knot energies» (Москва, 2015), «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность» (Москва, 2014), «Differential Rotation and Magnetism across the HR Diagram» (Стокгольм, 2013), «Теория вероятностей и ее приложения» (Москва, 2012), «Magnetic Fields in stars and exoplanets. Future directions in observational and theoretical studies» (Потсдам, 2011), «Galactic magnetism – Perspectives of observations and modeling» (Пушино, 2011); на всероссийских конференциях: «Молодежная научная школа-конференция при 40-й Ассамблее COSPAR» (Москва, 2014), «XII Колмогоровские чтения» (Ярославль, 2014), «Физика плазмы в солнечной системе»

(Москва, 2014), «XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред» (Пермь, 2013), «Всероссийская конференция Солнечная и солнечно-земная физика» (Санкт-Петербург, 2012); на научных семинарах, проводимых в МГУ, НИВЦ МГУ, ИЗМИРАН, ГАО РАН. Отдельные темы работы были представлены в публичной лекции академика В.А. Садовниченко в рамках 40-й ассамблеи COSPAR.

При разработке алгоритмов обработки данных использовалось современное программное обеспечение, а вычисления проводились на суперкомпьютере «Чебышев» МГУ.

**Публикации и личный вклад автора** Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях в международных и российских научных журналах, из которых 2 входят в перечень ВАК, 4 индексируется базой данных ISI Web of Science (в том числе 1 – в высокорейтинговом журнале).

Все исследования, результаты которых представлены в диссертационной работе, проведены лично автором в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертационную работу включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит автору.

**Структура диссертации** Диссертация состоит из четырех глав, введения и заключения. В первой главе дается оценка современному состоянию изучаемой проблемы. Во второй главе рассматриваются вопросы аналитического и численного нахождения показателей роста векторных полей в случайных средах на модельных примерах, которые описываются системой дифференциальных уравнений. В третьей главе акцент переносится на вопросы извлечения количественных показателей из наблюдательных данных по солнечной активности. Обсуждаются возможности алгоритмического подхода к выделению структур на широтно-временных диаграммах. В четвертой главе детально изучается распределение и статистические характеристики тилт-угла биполярных областей. Обсуждается связь полученных результатов с представлениями современной динамо-теории. Объем диссертации составляет 125 страниц, содержит 47 рисунков, 11 таблиц и список литературы из 95 публикации.

## Глава 2

# Современное состояние проблемы изучения солнечных магнитных полей

Современный взгляд на проблему описания эволюции солнечных магнитных полей в терминах количественных показателей сформирован во многом под влиянием задач более общего плана, направленных на изучение процессов в случайных средах. Подход к исследованию подобных задач выстраивается путем объединения ряда математических результатов и представлений о физической стороне вопроса. Прежде чем переходить к обзору конкретных достижений в этой области, необходимо пояснить специфику изучения случайных сред и показать, в чем состоит трудность подобной работы.

Термином «случайная среда» принято обозначать среду, параметры которой в каждой точке определяются набором случайных величин. Такая модель естественным образом возникает, если допустить наличие определенных флуктуаций в начальных условиях или управляющих параметрах среды. Процессы, протекающие в такой среде, являются реализациями случайного процесса. Представляется разумным изучать не отдельные реализации, а интересоваться их усредненными значениями, которые меняются значительно медленнее и менее подвержены влиянию отдельных выбросов (экстремальных состояний). Интуитивно ясно, что именно средние характеристики на качественном уровне дают описание среды и изучаемых в ней процессов. Есть

основания рассчитывать, что их удастся связать в систему уравнений. Однако присутствие специфических эффектов среды, например, явления перемежаемости, в состоянии существенно исказить ожидаемую картину.

Конечно, многое зависит от выбора способа усреднения. Этот вопрос является достаточно тонким. Применяемое на практике временное или пространственное среднее существенным образом зависит как от выбора весовой функции, так и от тех промежутков, по которым берется среднее. Естественно также требовать, чтобы выбранный способ усреднения приводил к простым уравнениям для средних значений. В этой связи временное и пространственное усреднение зачастую вызывают определенные трудности для последующих уравнений.

Более привлекательным оказывается вероятностный подход, в котором берется усреднение по ансамблю реализаций. С точки зрения теории вероятностей это означает, что мы рассматриваем модель случайной среды, в которой элементарным исходом является каждая отдельная реализация. В рамках такого подхода удается выписывать дифференциальные уравнения для средних величин и изучать их привычными методами. Интересно отметить, что эта работа во многом шла одновременно со становлением самой теории вероятностей. Основной вклад, сформировавший подход к изучению подобных задач, был сделан в работах А.Н. Колмогорова [22]–[25].

Следует ожидать, что если флуктуации в системе предельно малы или могут быстро и эффективно гаситься в процессе эволюции, то применение вероятностного подхода даст мало нового по сравнению с классическим случаем, когда флуктуации отсутствуют вовсе. В то же время, если флуктуации могут приводить к развитию неустойчивостей, теория средних значений становится эффективным инструментом для их изучения. Одним из успехов такого подхода стала возможность описания турбулентных сред, позднее воплотившийся в теорию средних полей. На этом вопросе мы остановимся подробнее ввиду особой важности некоторых результатов для нашей работы.

Одним из первых нетривиальных следствий новой теории стал тот факт, что случайные флуктуации вблизи средних значений могут оказывать ненулевое результирующее воздействие и приводить к систематическим отклонениям от стандартным образом ожидаемых значений. Примером подобной ситуации служат результаты ряда экспериментов, в которых наблюдалось

значимое отклонение от спектрального закона «5/3», который прямо вытекал из соображений размерности и подобия. Это побудило высказать гипотезу о присутствии в задаче более сложных структур, в частности, с нецелой размерностью. Более подробно эти вопросы раскрыты в монографии [36], излагающей основные модели и подходы к изучению турбулентности.

Сама идея о том, что случайность или хаос могут приводить к образованию определенных структур, причем довольно сложной природы, казалась необычайно красивой. Очень скоро изучение фрактальных структур, т.е. объектов с дробной размерностью, выделилось в самостоятельную область науки (см, напр., [14]). Применительно же к задачам гидродинамики подобная картина стала называться перемежаемой, а впоследствии этот термин приобрел самостоятельное значение.

Суть явления перемежаемости состоит в том, что случайные течения жидкости способны приводить к возникновению локальных участков, в которых переносимые ею векторные поля многократно усиливаются. В результате формируются отдельные пики высокой интенсивности, которые чередуются, или перемежаются, с обширными областями низкой интенсивности. По ряду свойств распределение этих пиков напоминает фрактальную структуру.

Вероятность возникновения каждого пика крайне мала, но их интенсивность настолько велика, что в сумме они дают основной вклад в среднее значение поля и энергию поля, т.е. его второй момент. Очевидно, здесь речь идет об особых типах распределений, отличающихся от привычного гауссовского распределения. Поэтому представляется разумным изучать их вероятностными методами и перейти от качественного описания явления к описанию в терминах соотношений между статистическими моментами случайных величин.

Такая работа во многом была инициирована Я.Б. Зельдовичем и затем развивалась его учениками. Говоря на математическом языке, явление перемежаемости связано с экспоненциальным ростом отдельных реализаций и прогрессивным возрастанием скоростей роста старших статистических моментов, т.е. второй момент растет быстрее квадрата первого, четвертый быстрее квадрата второго или произведения первого с третьим и т.д.

Приведем простой пример перемежаемой величины. Рассмотрим, как это было сделано к работе [12], последовательность независимых случайных вели-



чин  $c_n$ , принимающих значения 0 или 2 с одинаковой вероятностью  $p = 1/2$ , и пусть  $a_n = c_1 c_2 \dots c_i \dots c_n$ . Нас интересует поведение статистических свойств  $a_n$ , когда  $n \rightarrow \infty$ . Ясно, что последовательность  $a_n$  сходится к нулю, например, в смысле сходимости с вероятностью 1, т.к. рано или поздно одно из  $c_i$ , входящих в определение  $a_n$ , окажется нулем. Тем не менее, для любого конечного  $n$  существует ровно одна неубывающая реализация  $a_n$ , равная  $2^n$ . Хотя вероятность такой реализации всего  $2^{-n}$ , именно она приводит к тому, что математическое ожидание  $a_n$  отлично от нуля:

$$\langle a_n \rangle = 0 \times (1 - (1/2)^n) + 2^n \times (1/2)^n = 1, \quad (2.1)$$

а второй момент растет экспоненциально:

$$\langle a_n^2 \rangle = 0 \times (1 - (1/2)^n) + 2^{2n} \times (1/2)^n = 2^n. \quad (2.2)$$

Здесь угловыми скобками, следуя традиции, принятой в физических работах, обозначается усреднение по ансамблю реализаций. Нетрудно проверить, что рост старших моментов будет еще быстрее, чем для  $\langle a_n^2 \rangle$ .

Приведенный пример хотя кажется достаточно искусственным, но он наглядно демонстрирует особенности величин мультипликативного типа. Эти особенности будут возникать и далее при рассмотрении произведения случайных матриц.

Явление перемежаемости нашло отражение не только в лабораторных экспериментах и теоретических построениях, но и оказалось крайне продуктивным в астрофизике для качественного описания наблюдаемых процессов. Пожалуй, самым ярким примером стала новая интерпретация солнечного цикла. Солнечные пятна, как предполагается, образуются в местах выхода на поверхность сильных магнитных полей, которые представляют тороидальную компоненту крупномасштабного поля. Напряженность магнитного поля в пятне составляет тысячи гаусс, что многократно превышает напряженность слабого поверхностного поля. Далее из этих полей благодаря механизму, который принято называть альфа-эффектом, формируется полоидальная компонента крупномасштабного поля. Ее усиление в процессе цикла происходит одновременно с ослаблением энергии тороидального поля. Возникает прямая аналогия, в которой солнечные пятна соответствуют отдельным пикам вы-

сокой интенсивности, а конвективная оболочка Солнца выступает в качестве аналога случайной среды. Замыкание первой части цикла происходит под воздействием дифференциального вращения (омега-эффект), которое вытягивает линии полоидального поля, формируя из них тороидальную компоненту. Одно обращение цикла происходит с периодом порядка 11 лет. Вторая часть цикла прodelывает те же шаги, только уже с противоположным направлением магнитного поля, тем самым замыкая полный 22-летний цикл.

На основании анализа архивных материалов сегодня можно говорить о том, что время от времени данный механизм может давать сбои и режим работы солнечного динамо претерпевает существенные изменения. Проявления таких моментов связывают с долговременными минимумами солнечной активности и климатическими изменениями на Земле. Однако тот факт, что Солнце способно восстанавливать свой режим работы после периодов практически полного отсутствия пятенной активности, явно свидетельствует об участии более сложных механизмов, регулирующих солнечное динамо. Изучение подобных аномалий тесно связано как с развитием численного моделирования, так и с восстановлением информации о характере солнечной активности по историческим материалам.

Конечно, прежде чем переходить к изучению аномальных режимов, желательно прояснить ситуацию в регулярном случае. Эта задача в общем виде может быть сформулирована как задача изучения роста векторных полей в случайной среде. Стандартный прием состоит в переходе к лагранжевой системе координат, в которой эволюционное уравнение для магнитного поля  $\mathbf{H}$  приобретает простой вид:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{H}\hat{A}, \quad (2.3)$$

где матрица  $\hat{A}$  составлена из частных производных поля скорости  $\partial v_i/\partial x_j$ , а магнитная диффузия пренебрежимо мала. Здесь и далее мы придерживаемся соглашения записывать вектора в виде вектора-строки, как это свойственно литературе по теории вероятностей, на которую мы часто будем ссылаться.

Чтобы исследовать уравнение (2.3) необходимо выбрать условия на матрицу  $\hat{A}$ . Такие условия возникнут, если предположить, что поток  $\mathbf{v}$  теряет память в заданные моменты времени  $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$ . В этом состоит идея короткокоррелированного приближения. Предположение о том, что течение  $\mathbf{v}$  является бездивергентным, однородным и изотропным дает дополнительные

условия на вид корреляционного тензора  $V_{ij} = \langle v_i(x), v_j(y) \rangle$ . В такой постановке задача исследовалась многими авторами. Выписать уравнение для среднего поля не представляет труда, и оно отличается от (2.3) только наличием угловых скобок. Вывод уравнение на второй момент оказывается крайне трудоемким и впервые был сделан в работе Казанцева [23]. В работе [12] была исследована асимптотика получаемых решений и приведены оценки для скорости роста второго моменты.

Идея вывода уравнений для средних значений основана на том, что коэффициенты системы не зависят от того, каким было решение системы в предыдущим момент обновления. Тем самым операцию усреднения можно расщепить отдельно на матрицу коэффициентов и на само решение. Так получается разностное уравнение, которое переходит в дифференциальное после устремления времени памяти  $\tau$  к нулю.

Другой подход связан с тем, что поле  $\mathbf{H}$  в момент времени  $n\tau$  выражается через произведение независимых случайных матриц  $\hat{B}_i$ , которые описывают усиление поля в промежутки продолжительностью  $\tau$ :

$$\mathbf{H}(n\tau) = \mathbf{H}(0)\hat{B}_1\hat{B}_2\dots\hat{B}_n, \quad (2.4)$$

Если матрица  $\hat{A}(t)$  остается постоянной в течение  $i$ -го промежутка  $\tau$  и равна  $\hat{A}_i$ , то матрица  $\hat{B}_i$  есть матричная экспонента:  $\hat{B}_i = \exp \hat{A}_i$ . При более сложной зависимости от времени, матрица  $\hat{B}_i$  будет выражаться через мультипликативный интеграл [7].

Теперь задача сводится к выяснению того, как растет норма произведения независимых матриц. Напомним, что поскольку мы условились записывать вектора с строчку, то с ростом  $n$  матрицы  $\hat{B}_n$  в выражении 2.4 приписываются справа.

Соответствующая математическая теория была разработана Ферстенбергом в статье [54]. Ее суть состоит в том, что при достаточно общих предположениях на распределение матриц, рост нормы их произведения достаточно быстро сходится к экспоненциальному и скорость роста задается неслучайным показателем  $\lambda$  (показатель Ляпунова). Примечательно, что при этом нарушается пространственная симметрия: выделяется случайный базис, так что вектор магнитного поля вытягивается вдоль одной из его компонент. Моменты старших порядков  $\langle |\mathbf{H}|^p \rangle$  также растут экспоненциально, и скорости

роста, нормированные на  $p$ , увеличиваются с возрастанием номера  $p$ , т.е. растут прогрессивно.

Результаты Ферстенберга позволяют вычислить показатель Ляпунова  $\lambda$ , не прибегая к вычислению пределов. Формула для  $\lambda$  включает в себя лишь интегрирование по мере на группе матриц и по мере, инвариантной по отношению к действию матриц на особом пространстве. Тот факт, что после специальной нормировки норма произведения матриц сходится к некоторой неслучайной величине впоследствии стал восприниматься как частный случай мультипликативной эргодической теоремы [30], а под теоремой Ферстенберга пониматься утверждение о том, что эта величина строго положительна.

Принципиальным затруднением для применения результата Ферстенберга является необходимость выразить инвариантную меру. На этом пути возникает целый комплекс задач, в которой входит решение интегрального уравнения и нахождение обратных отображений для определения ядра этого уравнения. Аналитическое решение получается лишь в исключительных случаях. Причем эти случаи оказываются настолько просто устроенными, что можно выписать ответ, не прибегая к этой теории. Идея численного решения задачи, по-видимому, до сих пор не привлекала внимание исследователей по причине явных сложностей технического плана.

Путь, который позволяет избежать решения интегральных уравнений, состоит в оценке показателя Ляпунова путем моделирования отдельных реализаций и усреднения их скоростей роста. Таким методом были получены оценки показателя Ляпунова в работах [29], [1]. Приходится, конечно, мириться с тем, что стандартные генераторы случайных чисел имеют весьма скромные показатели как по длине выдаваемой последовательности, так и по ее статистическим свойствам. Авторам упомянутых работ удалось продемонстрировать, что отдельные реализации достаточно быстро переходят в стадию экспоненциального роста и показатель роста оказывался достаточно устойчивым к определенным модификациям численной схемы. Однако присутствующий в системе эффект перемежаемости не позволяет дать однозначный ответ о том, насколько полученные оценки близки к истинным значениям.

С точки зрения изучения вопросов перемежаемости эволюция магнитного поля в случайной среде является достаточно сложным примером, и начинать лучше с более простых задач, которые имеют меньшую размерность и поз-

воляют явно выписывать решения. Идея такого примера восходит к работе Я.Б. Зельдовича [11], в которой обсуждается один интересный космологический эффект.

Рассмотрим модель Вселенной, однородной на больших масштабах, в которой при этом на малых масштабах могут присутствовать значительные флуктуации плотности вещества. Пусть  $\bar{K}$  обозначает кривизну некоторого пространственного сечения. Как показано в упомянутой работе [11], эту кривизну можно оценить, зная расстояния до выбранных далеких объектов и наблюдая их угловой размер. При малых угловых размерах светового конуса, испускаемого далеким источником, локальные неоднородности, встречающиеся на пути распространения света, могут существенно влиять на измеряемые величины. Там же отмечается, что полученное с помощью космологических тестов значение  $\bar{K}$  может оказываться систематически меньше истинного значения. Это есть следствие того, что в модели, однородной лишь с средним, необходимо учитывать вклад экстремальных отклонений, пусть и даже и маловероятных. Недооценка в расчетах покажет наблюдателю Вселенную ближе к открытой модели, чем она есть на самом деле. Хотя как показано в работе [15], обсуждаемые эффекты оказываются крайне малы и трудно поддаются количественным оценкам, тем не менее, этот пример остается весьма поучительным, если рассмотреть его с геометрической точки зрения. Для наших задач мы ограничиваемся только двумерными многообразиями, а более общая ситуация в многомерном случае обсуждается в книге [9].

Пусть  $\gamma(\theta, x)$  обозначает семейство геодезических на двумерном римановом многообразии, выходящих из фиксированной точки. Выделим некоторую геодезическую  $\Gamma$ , относительно которой все остальные будут параметризоваться посредством угла  $\theta$  между ними в начальной точке. Расстояния вдоль каждой геодезической будем измерять координатой  $x$ . Векторное поле  $\vec{y}(x)$ , заданное вдоль геодезической  $\Gamma$  как

$$\vec{y}(x) = \partial\gamma/\partial\theta|_{\theta=0}, \quad (2.5)$$

по определению называется полем Якоби в точке  $x$ . Известно [10], что величина нормальной компоненты поля Якоби удовлетворяет уравнению Якоби

$$y''(x) + K(x)y(x) = 0, \quad (2.6)$$

где  $K$  – гауссова кривизна многообразия. Зададим  $K$  в виде случайного процесса, определенного на луче  $x > 0$ , значения которого обновляются в точках вида  $n\tau$ , где  $n$  – натуральное. Предполагается, что в момент обновления значения  $K$  заменяется на независимое. Нетрудно видеть, что если при этом  $K$  остается положительным, то поле Якоби экспоненциально возрастает, т.е. две близкие геодезически экспоненциально быстро разбегаются, а если  $K$  всюду отрицательно, то поле будет осциллировать и периодически обращаться в ноль.

Результаты работы [11] предсказывают, что если  $K$  принимает положительные и отрицательные значения, оставаясь в среднем равным нулю, то поле также будет экспоненциально расти, при этом время от времени будут возникать сопряженные точки, в которых оно обращается в ноль. При этом ожидается перемежаемый характер роста старших статистических моментов. Эти гипотезы подтвердились в ходе прямого численного моделирования (напр., [27], [1]), здесь же были приведены первые оценки для скоростей роста поля и старших моментов. В то же время авторами отмечалось, что для правильной интерпретации их результатов требуется сопоставить полученные оценки с точными значениями.

Точную оценку можно получить, если понизить порядок уравнения Якоби и перейти к системе уравнений первого порядка. Для этой системы может быть легко выписана фундаментальная матрица, и тогда решение выразится через произведение фундаментальных матриц на каждом интервале обновления. Возникает задача о произведении случайных унимодулярных матриц, к которым применимы результаты Ферстенберга [54]. При этом результаты Ферстенберга значительно удобнее излагать в терминах цепей Маркова и в несколько иной системе координат, как это предлагается в работе В.Н. Тутубалина [88]. Опишем этот подход.

Рассмотрим произведение  $n$  независимых одинаково распределенных случайных матриц из группы унимодулярных матриц  $SL(2, \mathbb{R})$ :

$$\hat{B}(n) = \hat{B}_1 \hat{B}_2 \dots \hat{B}_n. \quad (2.7)$$

Известно (напр., [3]), что каждую матрицу  $\hat{B}$  из группы  $SL(2, \mathbb{R})$  можно разложить в произведение  $\hat{Z}\hat{D}\hat{O}$ , где  $\hat{Z}$  – верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали,  $\hat{D}$  – диагональная матрица  $\text{diag}(\lambda^{-1}, \lambda)$ , а  $\hat{O}$  из

ортогональной группы. Итак, пусть

$$\hat{B}(n) = \hat{Z}(n)\hat{D}(n)\hat{O}(n). \quad (2.8)$$

Домножив справа на  $\hat{B}_{n+1}$ , получим

$$\hat{B}(n+1) = \hat{B}(n)\hat{B}_{n+1} = \hat{Z}(n)\hat{D}(n)(\hat{O}(n)\hat{B}_{n+1}). \quad (2.9)$$

К матрице  $\hat{O}(n)\hat{B}_{n+1}$  вновь применим разложение вида  $\hat{Z}'\hat{D}'\hat{O}(n+1)$  и подставим результат в (2.9). Получим в итоге

$$\hat{B}(n+1) = (\hat{Z}(n)\hat{Z}'')(\hat{D}(n)\hat{D}')\hat{O}(n+1), \quad (2.10)$$

где  $\hat{Z}'' = \hat{D}(n)\hat{Z}'(\hat{D}(n))^{-1}$ .

В таких координатах оказывается удобно изучать поведение выражения (2.10), когда  $n \rightarrow \infty$ . В работе [88] показано, что последовательность  $\hat{O}(n)$  порождает эргодическую цепь Маркова на сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками, т.е. ее распределение сходится к некоторому стационарному. Матрица  $\hat{Z}''$  быстро сходится к единичной, а последовательность  $\hat{Z}(n)$  к некоторому случайному пределу. При этом нижний диагональный элемент матрицы  $\hat{D}(n)$  начинает расти экспоненциально быстро и скорость его роста  $n^{-1} \log \lambda(n)$  сходится к положительному числу  $\lambda$ , которое называется показателем Ляпунова. В итоге рост нормы произведения матриц задается задается только диагональными элементами матрицы  $\hat{D}(n)$  и скорость роста будет  $\lambda$ . Если стационарное распределение цепи Маркова известно заранее, то, полагая его в качестве начального, статистические свойства последовательности уже не будут зависеть от  $n$  и показатель Ляпунова может быть найден как

$$\lambda = \mathbb{E} \log \|\mathbf{w}\hat{B}\|, \quad (2.11)$$

где математическое ожидание  $\mathbb{E}$  берется по распределению вектора  $\mathbf{w}$ , которое совпадает со стационарным, а распределение матрицы  $\hat{B}$  совпадает с распределением любой из матриц  $\hat{B}_n$ .

Условием для существования стационарного распределения является существование переходной плотности для рассматриваемой цепи Маркова. В дальнейшем мы проверим, что это условие выполнено. В примере с уравне-

нием Якоби стационарную плотность не удастся выписать аналитически и ее необходимо искать как решение интегрального уравнения, ядром которого является переходная плотность. Таким образом, задача распадается сразу на несколько подзадач, в которые входит численное решение интегрального уравнения и вычисление переходной плотности. Как мы отмечали, предыдущие авторы старались избежать необходимости разбираться с этими вопросами и шли в основном по пути моделирования отдельных решений уравнения Якоби.

Уравнение Якоби (2.6) и уравнение эволюции магнитного поля (2.3), представляют собой модельные задачи, на которых удобно развивать вероятностный подход к вычислению показателей Ляпунова, постепенно усложняя модели и приближая их к реальным физическим системам [28]. Процесс адаптации модели основывается на данных об поведении физических систем, которые доставляются из лабораторных экспериментов или наблюдений. Специфика рассматриваемых нами задач эволюции магнитных полей накладывает определенные ограничения на возможности воспроизведения необходимых параметров среды в лабораторных условиях. В первую очередь это связана с «астрономическими масштабами» характерных величин.

Примечательно, что небольшой набор характерных параметров, в который входит размер области ( $L$ ), скорость движения ( $v$ ) и показатель магнитной ( $\nu_m$ ) или гидродинамической ( $\nu$ ) вязкости укладываются в одну величину – число Рейнольдса – ответственную за возникновение многих гидродинамических или магнитогидродинамических явлений в астрофизике. Приведем взятые из работы [13] значения магнитного  $Re_m = Lv/\nu_m$  числа Рейнольдса, типичного для космической среды (табл. 2.1).

	$L$ [см]	$v$ [см/с]	$\nu_m$ [см <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> ]	$Re_m$
Жидкое ядро Земли	$3.5 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^2$
Конвективная область Солнца	$2 \cdot 10^{10}$	$10^5$	$10^7$	$2 \cdot 10^8$
Газовый диск	$10^{21}$	$10^6$	$10^{21}$	$10^6$

Таблица 2.1. Некоторые типичные параметры космической среды.

Число Рейнольдса выражает отношение кинематических и диссипативных сил. В случае малых чисел Рейнольдса диффузионные процессы работают эффективно и энергия успевает рассеиваться. При больших числах Рейнольдса течения в среде начинают играть доминирующую роль и способны



приводить к усилению магнитных полей. Естественное желание воспроизвести этот эффект в лабораторных условиях неминуемо наталкивается на ряд трудностей. Речь, в первую очередь, идет о специфическом подборе жидкостей (например, в ряде экспериментов использовался жидкий натрий) и сложных установках для воссоздания турбулентных течений. При этом наиболее успешные эксперименты позволяют достичь чисел Рейнольдса лишь порядка нескольких десятков [32].

Как следует из рассмотренных нами работ, количественное изучение моделей случайных сред, основанное на идее усреднения отдельных реализаций, может оказываться неустойчивым, а необходимое число реализаций приближаться к пределу возможностей генераторов случайных чисел. Понятно, что в условиях реальных наблюдательных данных мы принципиально ограничены в объеме выборки и возникает острый вопрос: насколько здесь возможно получить устойчивый количественный результат?

Классические опыты, в которых демонстрируется возникновение магнитного поля в проводнике с током, открывают наглядный путь по изучению явления электромагнитной индукции. Значительно раньше человек уже научился использовать в своих целях магнитное поле Земли, ориентируясь по стрелке компаса, и подметил, что некоторые породы вызывают отклонение этой стрелки. Сегодня мы понимаем, что причина возникновения магнитного поля в этих случаях различна. Для ферромагнетиков поле создается упорядочением магнитных моментов электронов, возникновение поля в проводнике описывается уравнениями Максвелла. Однако не так просто было предъявить источник поддержания земного поля. Выдвигаемые поначалу гипотезы об остаточном поле или внутреннем постоянном магните при детальном рассмотрении не выдержали критики. Серия открытий в палеогеологии, которые указывали на факты инверсии поля Земли, а также обнаружение Хейлом магнитного поля Солнца, заставило по-новому взглянуть на проблему генерации магнитного поля в астрофизических объектах. Стало понятно, что источником должны быть электромагнитная индукция, но чтобы обойти правило Ленца, препятствующее усилению поля, требовалось построение довольно сложных течений. Таким образом, главенствующая роль отводилась движению среды, а сам способ генерации, по аналогии с механической системой, получил название гидромагнитного динамо.

Согласно принятой сегодня точке зрения, магнитные поля играют определяющую роль в основных проявлениях звездной активности, таких как образование пятен, вспышки, нагрев короны. Поэтому наблюдение этих событий должно служить источником информации о магнитном поле звезды. Наиболее доступным объектом для изучения для нас является, конечно, Солнце.

Первые целенаправленные наблюдения солнечных пятен можно отнести к 17 веку, а начиная с 18 века, мы имеем уже относительно регулярные каталоги регистрации пятен на диске Солнца. Сегодня мы понимаем, что эти сведения, помимо чисто исторического интереса, содержат в себе уникальную информацию о солнечном цикле. Дело в том, что эти данные частично приходятся на периоды, в которые режим работы солнечного динамо, по-видимому, существенным образом изменялся. Эти изменения сопровождались эпохой минимума в пятнообразовательной деятельности Солнца. Причины возникновения таких особых режимов и механизмы восстановления из них являются одним из актуальных вопросов для современной теории. В настоящее время во многих научных центрах проводятся работы по восстановлению показателей активности из архивных данных и встраиванию их в контекст динамо теории. Эта деятельность сопряжена с целым рядом трудностей, свойственных, впрочем, любой работе с историческим материалом. Прежде всего, нужно понимать, что уровень проводимых наблюдений и ведения каталогов мы сегодня склонны были бы относить скорее к любительскому. Характерный способ записи наблюдений – зарисовывание видимого диска и пятен. Такой способ позволяет быстро отобразить видимое расположение пятен, однако оказывается крайне неприспособленным для последующего восстановления количественной информации, такой как положение или размер. К настоящему моменту проделана огромная работа по оцифровке каталогов Швабе и Штаудахера ([37], [38]), и мы находимся только в самом начале пути по извлечению из них полезных сведений. В аспекте нашей работы мы прежде всего будем интересоваться вопросом о том, в какой степени эти сведения можно считать надежным знанием о солнечном цикле.

Работа с историческим материалом требует достаточно специфического подхода. Во многом базой являются представления о сути вопроса, сформированные в результате изучения современных наблюдательных данных. В качестве примера может служить использование параметров дифференци-

ального вращения Солнца для восстановления координат пятен в 18 веке. При этом, однако, утрачивается информация о возможных вариациях параметров в прошлом. Конечно, это достаточно тонкие вопросы, и сначала хотелось бы увидеть ситуацию в целом, как она представляется в свете уже обработанных данных. Основным объектом изучения здесь является понятие солнечного цикла.

Традиционно солнечный цикл принято связывать с квазипериодическими колебаниями чисел Вольфа, которые отражают среднее число пятен и групп пятен. Приблизительно каждые 11 лет эти числа образуют максимумы и минимумы на временной диаграмме. Промежуток между двумя последовательными минимумами определяет временные рамки цикла, а величина максимума отражает его интенсивность. Числа Вольфа являются удобным инструментом для определения уровня солнечной активности. Поскольку солнечная активность проявляется не только в числе пятен, но и в данных о содержании изотопов в годовых кольцах деревьев, то благодаря методам радиоизотопного анализа удается качественно восстановить ряд чисел Вольфа на большом промежутке времени (напр., [82]).

С точки зрения современной теории, за один 11-летний цикл происходит смена знака солнечного диполя, а за два цикла – полный период. В тех местах, где магнитный поток выходит и возвращается на поверхность Солнца формируется пятно. Пятна, объединенные общим потоком, образуют биполярную группу. При этом ориентация солнечного диполя задает определенный знак ведущего пятна биполярной группы, который сменяется на противоположный в следующем 11-летнем цикле. Этот закон называется правилом полярности Хейла. С этой точки зрения, границы цикла можно определять согласно знаку магнитного потока в ведущем пятне. Однако этот подход сопряжен с рядом трудностей. Во-первых, поскольку мы не наблюдаем магнитных трубок напрямую, то процедура объединения пятен в биполярные группы может оказываться неоднозначной, а во-вторых, нужно учитывать, что в каждом цикле может присутствовать определенное количество групп нарушителей, знак которых противоположен основному знаку в цикле. В работе [81] приводится оценка для доли групп нарушителей порядка 5–7%. Но, пожалуй, самым серьезным недостатком этого метода является то, что его невозможно применить к данным, для которых недоступна информация о магнитного

поле, в частности, это относится к архивным записям. Таким образом встает вопрос о выработке методов выделения границ циклов, не действующих магнитный знак пятен.

Естественным шагом будет взять за основу координаты пятен и выделить циклические структуры на широтно-временных диаграммах. Визуально эти структуры хорошо различимы, и на них еще в начале 20 века указал Маундер в работе [71]. Формирование этих структур связано с тем, что, согласно закону Шпёрера (напр., [4]) в начале цикла пятна образуются на средних широтах северного и южного полушария, с течением цикла область пятнообразования смещается в сторону экватора и к концу цикла оказывается в области низких широт ниже  $10^\circ$ . Таким образом, цикл представлен двумя сходящимися волнами активности и по форме напоминает крылья бабочки. Начало цикла, т.е. область средних широт, можно отождествлять с центром масс северного и южного полушария. Конец цикла обычно определяется визуально, или, например, исходя из скорости миграции пятен. В то же время, в части вопросов о принадлежности отдельных пятен и групп к циклу и о разделению волн активности, из которых состоит цикл, возможности визуального подхода весьма ограничены и решение в конечном счете основывается на индивидуальном восприятии. В наибольшей степени неоднозначность проявляется в работе с историческими данными. Кроме того, есть указания на то, что в определенные моменты в прошлом глобальное магнитное поле Солнца могло быть иметь не дипольную, а более сложную конфигурацию, скажем, квадрупольную [79]. При этом нарушается закон Шпёрера и область пятнообразования приобретает иной структурный вид.

В связи с этим разработка алгоритмических способов выделения циклов представляет большой интерес. Эта работа востребована сразу в нескольких аспектах. С одной стороны, она позволяет ответить на вопрос, какие морфологические признаки являются устойчивыми и в наибольшей степени характеризуют понятие цикла, а с другой – определить его количественные параметры и проследить их по современным и архивным данным. В тех случаях, где методы выделения, обученные по современным данным, будут выдавать аномальные результаты, по-видимому, можно будет говорить о присутствии более сложных структур и определенном нарушении регулярных процессов.

В рамках теории солнечного динамо принято рассматривать две ком-

поненты глобального магнитного поля, тороидальную и полоидальную, и два механизма превращение одной компоненты в другую: дифференциальное вращение и альфа-эффект. Начиная с определенного радиуса, вращение Солнца начинает существенно отличаться от твердотельного и переходит в дифференциальное, при котором появляется зависимость угловой скорости от широты. Наибольшая скорость вращения приходится на экватор, к полюсам скорость постепенно спадает. Для полоидального поля, линии которого вначале идут вдоль меридианов, наличие дифференциально профиля скоростей приводит к тому, что линии начинают вытягиваться вдоль параллелей, создавая азимутальную (тороидальную) компоненту. Восстановление профилей дифференциального вращения стало возможным благодаря методам гелиосейсмологии, а миграцию тороидального поля принято ассоциировать с миграцией областей активного пятнообразования. Гораздо менее изученным является обратный механизм генерации полоидального поля. Простые модели, призванные объяснить этот механизм, неизбежно вступали в противоречие с теоремами запрета в теории динамо [13]. Скоро стало понятно, что это общая проблема, свойственная зеркально-симметричным моделям, и эффект может возникать только вследствие определенного нарушения этой симметрии. Первым к этой идее пришел Ю. Паркер (встречается также написание Е. Паркер) и предложил механизм генерации, учитывающий спиральность течений в конвективной зоне Солнца [74]. Этот механизм, как и ряд альтернативных точек зрения, например, [39], принято называть альфа-эффектом.

Математический базис, объединяющий дифференциальное вращение и альфа-эффект впервые был представлен в работе Штеенбека, Краузе и Рэдлера [83]. Система полученных уравнений для среднего поля, как подтвердили последующие численные эксперименты, действительно задает незатухающий динамо процесс, а возбуждаемые волны активности качественно воспроизводят солнечный цикл. Теоретические оценки, однако, предсказывали, что альфа-эффект будет иметь достаточно слабое проявление и его наблюдение потребует существенно более сложных схем. Возник серьезный вопрос о том, что является проявление альфа-эффекта и как его можно оценить из наблюдательных данных. Дискуссия по этому вопросу активно продолжается сегодня. Одним из последних достижений в этой области являются работы по определению величины токовой спиральности в активных областях (напр.,

[94]). Было показано, что структуры, порожденные знаком токовой спиральности, напоминают волны активности для пятен, что служит указанием на то, что механизм зеркальной асимметрии вовлечен в динамо процесс. Удалось также проследить, что величина спиральности возрастает и уменьшается с периодом, близким к 11 годам и в целом имеют противоположный знак в каждом полушарии. Однако авторами работы [94] подчеркивается, что подобная общая картина нарушается вкраплением определенных областей, в которых эти свойства не соблюдаются, и пока достаточно трудно судить о том, что является причиной их появления.

Значительно более доступным для наблюдения трассером, по-видимому, имеющим непосредственное отношение к альфа-эффекту, является систематический наклон биполярных групп по отношению к экватору, т.н. тилт-угол. Еще в работе 1919 года [57] был сформулирован закон Джоя, согласно которому ведущее пятно в биполярной паре имеет тенденцию располагаться ближе к экватору, чем хвостовое. Тем самым, тороидальное поле приобретает полоидальную компоненту, пропорционально величине угла наклона, которая накапливается в течение цикла.

Первые количественные исследования величины тилт-угла проводились вручную и достигались путем огромного напряжения сил. Сегодня, благодаря широкому внедрению компьютерных методов обработки и накоплению большой статистической базы, мы имеем возможность изучать те же вопросы на совершенно ином качественном уровне.

Отправной точкой, которая сегодня служит ориентиром, стала работа Стенфло и Косовичева [85]. В ней был предложен алгоритмический метод выделения биполярных областей на солнечных магнитограммах и описана процедура измерения тилт-угла. Этим способом была обработана серия магнитограмм за период 1995–2011 годов и построены графики зависимости тилт-угла от широты. Первым успехом можно считать то, что полученная выборка позволила извлекать информацию о тилт-угле с высоким уровнем значимости. Это открывает путь по изучению статистических свойств выборки. Что касается конкретных результатов, то они в целом совпадали с ожиданиями динамо теории. Удалось продемонстрировать, что тилт-угол значимо возрастает с широтой, и предложить закон, отражающий эту зависимость. Это стало убедительным подтверждением выполнения закона Джоя. В то же время,

использованная в той же работе выборка состоит преимущественно из крупных биполярных областей, которые соответствуют, в основном, пятнам. Тем самым результаты относятся только к определенным магнитным структурам. Известно, однако, что на Солнце образуются биполярные структуры и более мелких масштабов, которые отвечают эфемерным областям. В работе [87] была применена иная процедура выделения биполярных областей, которая дает существенно большую выборку, включающую отныне и эфемерные области. На основе предварительного анализа авторами впервые было высказано предположение о том, что малые биполи могут демонстрировать ряд свойств, отличающих их от больших областей, при этом отмечалось, что конкретные результаты можно будет сформулировать лишь после более детального статистического анализа данных.

Поводя общий итог, дадим оценку современному состоянию проблемы получения количественных показателей роста векторных полей в случайных средах. Отдельные постановки этой задачи независимо возникали в некоторых разделах физики и математики. Прошло значительное время до тех пор, пока эти задачи не стали рассматриваться в едином контексте и быть частными примерами общей теории. В тех примерах, которые пришли из физики, удалось во многом достичь качественного понимания характера поведения систем, однако в количественных вопросах эволюция шла преимущественно по пути уточнения тех показателей, которые нуждаются в оценке и представляют интерес. Разрешение вопросов измерения и непосредственной оценки этих величин по тем или иным обстоятельствам приходилось откладывать до лучших времен. С точки зрения математики удалось достичь существенного прогресса в методах описания и изучения случайных сред, однако попытки практического применения этих методов упирались в значительные трудности вычислительного плана. До определенного момента приоритет отдавался развитию теоретического базиса, а об его практической реализации не приходилось и думать в силу ограниченности вычислительных мощностей. Сегодня ситуация радикально изменилась и на первый план выходит численное моделирование, на которое возлагают большие надежды как на средство изучения и апробации различных теорий. Вопрос количественного определения показателей эволюции систем возник с новой силой и в несколько ином аспекте. Теперь конкретные количественные значения должны выступать как

начальные условия для системы, как ее управляющие параметры и как средство контроля за протекающими в ней процессами. Для проведения моделирования все представления о качественном характере системы должны быть сформулированы в виде набора конкретных числовых значений и наоборот, нужно иметь возможность перевести числовую информацию, выдаваемую компьютером, в термины качественного порядка и сделать вывод о степени их согласования с теоретическими предсказаниями. Сегодня эти вопросы в каждом случае решаются в основном индивидуально, что может приводить к трудностям в согласовании различных данных. С этой точки зрения, выделение смежных вопросов в общих круг задач и выработка общего подхода к их изучению представляется актуальным направлением работы. Результаты этой работы смогут дать новые инструменты для теоретического описания и практического исследования процессов в случайных средах.



## Глава 3

# Рост векторных полей в терминах произведения случайных матриц

### 1 Предварительные сведения

Рассмотрение задачи о росте векторных полей мы начнем с краткого введения в математическую сторону вопроса. Будем рассматривать произведения независимых одинаково распределенных случайных матриц  $B_i$  и интересоваться асимптотическим поведением матрицы-произведения  $B(n) = B_1 B_2 \dots B_n$ , когда  $n \rightarrow \infty$ . Изучение свойств таких матриц было начато Беллманом в работе [40] и затем продолжалось рядом математиков (напр., [42]). Основной подход состоит в том, чтобы связать произведение матриц с их действием на некотором специальном пространстве, которой называется границей группы матриц. Действие матриц на этом пространстве порождает эргодическую цепь Маркова, и асимптотические свойства полностью определяются стационарным распределением этой цепи (инвариантной мерой). Прежде всего, нас будет интересовать скорость роста нормы произведения матриц, которая задается показателем Ляпунова  $\lambda$ :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \log \|B(n)\|, \quad (3.1)$$

где  $\|\cdot\|$  – операторная норма и предполагается, что конечно математическое ожидание положительной части логарифма нормы матрицы  $B_1$ , т.е.  $E \log^+ \|B_1\| < \infty$ . Математическое ожидание  $E$  берется по распределению матриц  $B_i$ , которое в дальнейшем будем обозначать буквой  $\mu$ . Мы не ставим условия на отрицательную часть логарифма, поскольку этот случай не возникает при специальном выборе матричной подгруппы, из которой выбираются матрицы  $B_i$ .

Математические результаты Ферстенберга [54] показывают, что при определенных весьма общих предположениях на закон распределения матриц  $\mu$  показатель Ляпунова  $\lambda$  оказывается строго положительным, т.е. норма произведения растет с экспоненциальной скоростью. Саму скорость роста можно вычислить путем интегрирования по прямому произведению инвариантной меры  $\nu$  на распределение матриц  $\mu$ .

Выбор пространства, на котором рассматривается действие матриц, продиктован желанием воспользоваться эргодической теоремой, в частности, ее мультипликативным обобщением, известным как теорема Оселедца [30]. Поскольку мы работаем с матрицами из группы  $G = SL(2, \mathbb{R})$  (или  $SL(3, \mathbb{R})$ ), то в качестве подходящего пространства  $W$  берется единичная окружность (сферу) со склеенными диаметрально противоположными точками. Иногда это удобнее понимать как одномерное (двумерное) проективное пространство.

Действие элемента  $g \in G$  на пространстве  $W$  естественно определить формулой

$$w \circ g = \bar{w}g / \|\bar{w}g\|, \quad (3.2)$$

где  $\bar{w}$  – вектор, направленный в точку  $w \in W$  (вектора будем записывать в строчку). В силу этого определения последовательность  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  независимых одинаково распределенных случайных элементов группы  $G$  задает на  $W$  однородную по времени марковскую цепь. Определенные условие на распределение элементов из группы  $G$  гарантирует существование переходной плотности для цепи Маркова и, значит, со временем в ней устанавливается стационарное распределение  $\nu$ . Если стационарное распределение положить в качестве начального, то действие матриц будет сохранять эту меру и мы окажемся в условиях эргодической теоремы Оселедца. В силу это-

го показатель Ляпунова вычисляется по формуле

$$\lambda = \int_W \int_G \log \|wg\| d\mu(g) d\nu(w). \quad (3.3)$$

Чтобы применить эти результаты для изучения систем дифференциальных уравнений, нужно предположить, что коэффициенты системы обновляются, т.е. в определенные моменты времени заменяются на независимые. В промежутке между моментами обновления коэффициенты системы постоянны и ее решение выражается через фундаментальную матрицу. Решение на объединении интервалов обновления выражается через произведение фундаментальных матриц. Асимптотические свойства решения задаются нормой матрицы-произведения. Далее мы ставим задачу о получении количественных показателей роста решения для уравнения Якоби со случайным параметром кривизны.

## 2 Уравнение Якоби и произведение случайных матриц

Рассматривается уравнение Якоби

$$y''(x) + K(x)y(x) = 0, \quad (3.4)$$

где параметр кривизны  $K$  задан в виде обновляющегося случайного процесса на луче  $x > 0$ , с обновлением в целочисленных точках. Это означает, что на полуинтервалах вида  $[n - 1, n)$  полагаем значения  $K$  постоянными и равными  $K_n$ , где  $K_n$  – независимые одинаково распределенные случайные величины. Имеет смысл рассмотреть два случая распределения величин  $K_n$ : в первом случайные величины будут сосредоточены на конечном интервале, симметричном относительно нуля, и распределены равномерно, а во втором могут принимать сколь угодно большие значения и распределены согласно нормальному закону  $N(0, \sigma^2)$  с нулевым средним и некоторой дисперсией  $\sigma^2$ .

Перепишем уравнения Якоби в векторном виде, положив  $z_1(x) = y(x)$ ,  $z_2(x) = y'(x)$  и введя вектор-строку  $z = (z_1, z_2)$ :

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -K(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Пусть  $B(t, x)$  – фундаментальная матрица системы, т.е. такая матрица, что  $z(x) = z(t)B(t, x)$  при  $t < x$ . Внутри интервала обновления кривизна постоянна, поэтому матрица  $B$  имеет вид матричной экспоненты:

$$B(n-1, n) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -K_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Явный вид этой матрицы зависит от знака  $K_n$ . Непосредственное вычисление показывает, что при  $K_n \geq 0$  матричная экспонента имеет вид

$$B(n-1, n) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_n} & -\sqrt{K_n} \sin \sqrt{K_n} \\ \sin \sqrt{K_n} \sqrt{K_n} & \cos \sqrt{K_n} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Если  $K_n < 0$ , то

$$B(n-1, n) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \sqrt{-K_n} & \sqrt{-K_n} \operatorname{sh} \sqrt{-K_n} \\ \operatorname{sh} \sqrt{-K_n} / \sqrt{-K_n} & \operatorname{ch} \sqrt{-K_n} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что фундаментальные матрицы лежат в группе  $SL(2, \mathbb{R})$ , поскольку

$$\det B(n-1, n) = \det \exp \begin{pmatrix} 0 & -K_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \exp \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & -K_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (3.9)$$

Приведем вначале ряд важных свойств инвариантного распределения и показателя Ляпунова. Строгое математическое доказательство этих свойств можно найти, например, в работе [42].

Прежде всего, оказывается, что значение показателя Ляпунова определяет не только среднюю роста (т.е. ту, что стоит в правой части выражения 3.1), но и с такой же скоростью растут почти все реализации нормы матрицы-произведения, т.е. в вероятностью 1 можно утверждать, что

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|B(n)\|. \quad (3.10)$$

Матрицы из произведения  $B(n)$  действуют на единичной окружности  $W$  со склеенными диаметрально противоположными точками по правилу (3.2). Действие матрицы может либо изменять распределение на  $W$ , либо не изменять и тогда распределение является инвариантным. Более того, можно доказать, что если  $\mu$  – распределение на группе матриц  $G$ ,  $m$  – распределение на  $W$ , то каждая предельная точка последовательности  $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu^j * m$  является  $\mu$ -инвариантным распределением на  $W$ .

Вообще говоря, эти распределения могут быть устроены довольно сложным образом, в то время как нам бы хотелось требовать от них некоторых свойств регулярности, например, чтобы они являлись непрерывными. Для этого оказывается достаточным потребовать, чтобы для распределения  $\mu$  не существовало конечного множества одномерных подпространств в  $\mathbb{R}^2$ , инвариантного относительно действия любой матрицы  $B \in G_\mu$ . Здесь через  $G_\mu$  обозначена наименьшая замкнутую подгруппу  $G$ , содержащая носитель меры  $\mu$ . Это свойство называется условием строгой неприводимости группы  $G_\mu$ .

Перечисленные выше свойства подводят нас к пониманию центрального результата работы [54], который мы называем теоремой Ферстенберга. Предположим, что  $\mu$  – это вероятностная мера на группе невырожденных матриц  $SL(2, \mathbb{R})$ , определитель которых равен 1. Пусть  $\{B_n, n \in \mathbb{N}\}$  – последовательность независимых одинаково распределенных матриц с распределением  $\mu$  и с конечным математическим ожиданием положительной части логарифма  $E \log^+ \|B_1\| < \infty$ . Обозначим через  $G_\mu$  наименьшую замкнутую подгруппу группы  $SL(2, \mathbb{R})$ , содержащую носитель меры  $\mu$ . От этой группы  $G_\mu$  потребуем, чтобы она была не компактна и удовлетворяет условию строгой неприводимости. Тогда можно утверждать, что показатель Ляпунова  $\lambda$  **строго положителен**, т.е. норма произведения матриц растет с экспоненциальной скоростью. Вычисляется показатель Ляпунова путем интегрирования по мере  $\mu$  и  $\mu$ -инвариантной мере  $\nu$ , задаваемой на  $W$ :

$$\lambda = \iint \log(w \circ g) d\mu(g) d\nu(w). \quad (3.11)$$

Здесь не возникает неопределенности, какую меру выбрать в качестве  $\mu$ -инвариантной, поскольку в теореме Ферстенберга устанавливается единственность такой меры.

Чтобы применить этот результат к последовательности фундаментальных матриц системы (3.5), нужно проверить некоторые условия на группу  $G_\mu$ .

Нетрудно показать, что если окрестность нуля содержится в носителе распределения случайной величины  $K$ , то группа  $G_\mu$  (наименьшая замкнутая подгруппа, содержащая носитель распределения матриц  $B$ ) не компактна и удовлетворяет условию строгой неприводимости. В этом можно убедиться, рассмотрев явный вид матрицы  $B$ . Из (3.7) следует, что при  $K = 0$  матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G_\mu$ . Тогда в группу  $G_\mu$  входит произведение  $n$  таких матриц. Это произведение имеет вид  $B(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ . Заметим, что норма такой матрицы неограниченно растет при  $n \rightarrow \infty$  в силу оценки

$$\|B(n)\| \geq \|(0, 1)B(n)\| = \sqrt{n^2 + 1} \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Следовательно, группа  $G_\mu$  является неограниченной и потому некомпактной. Покажем, что  $G_\mu$  строго неприводима. По определению это означает, что не существует конечного набора прямых (проходящих через 0), инвариантного относительно действия любой матрицы  $B$  из группы  $G_\mu$ . Пусть такой набор существует. Любая прямая из этого набора однозначно задается тангенсом угла наклона. Заметим, что любая нижнетреугольная матрица, для определенности с положительным элементом в углу, только увеличивает тангенс. В самом деле, если  $(a, b)$  – произвольный направляющий вектор прямой, то  $\operatorname{tg} \varphi = a/b$ . Под действием матрицы  $B$  направляющим вектором для новой прямой будет вектор  $(a, b)B = (a + bn, b)$ , для которого  $\operatorname{tg} \psi = n + \operatorname{tg} \varphi$ . Отсюда видно, что конечный набор, если он есть, может состоять только из одной единственной вертикальной прямой. Однако такая прямая не является инвариантной для матриц, отличных от нижнетреугольных.

Заметим, что на самом деле можно показать, что произведение трех фундаментальных матриц имеет плотность распределения на всей группе  $SL(2, \mathbb{R})$  (см., напр. [27]).

Условие конечности математического ожидания  $E \log^+ \|B\| < \infty$  следует из серии оценок в предположении, что конечным является математическое ожидание самого параметра  $K$ , т.е.  $EK < \infty$ . В этом случае норму матрицы можно ограничить случайной величиной, математическое ожидание от

которой конечно. В самом деле,  $\|B\| \geq 1$  для любой  $B \in SL(2, \mathbb{R})$ , поэтому  $E \log^+ \|B\| = E \log \|B\|$ . Введем единичный вектор  $e = (a, b)$ , обозначим  $\sqrt{|K|}$  через  $\xi$  и распишем норму вектора  $(a, b)B$ , воспользовавшись явным видом матриц (3.7), (3.8). Тогда при отрицательных  $K$  получим:

$$\begin{aligned} \rho^2 \equiv \|(a, b)B\|^2 &= a^2 \operatorname{ch}^2 \xi + ab\xi \operatorname{sh}(2\xi) + b^2\xi^2 \operatorname{sh}^2 \xi + \\ &+ a^2 \operatorname{sh}^2 \xi / \xi^2 + ab \operatorname{sh}(2\xi) / \xi + b^2 \operatorname{ch}^2 \xi. \end{aligned}$$

Аналогичное выражение получится и при положительных  $K$  с заменой гиперболических функций на тригонометрические. Нетрудно видеть, что при малых  $\xi$  величину  $\rho^2$  можно ограничить сверху константой, поэтому интерес представляет поведение величины  $\rho$  при больших значениях  $\xi$ . В случае больших отрицательных значений  $\xi$  норма  $\rho \sim \xi \exp \xi$ , а для положительных порядок роста не превосходит  $\xi$ . Таким образом,  $\log \rho$ , стоящий под знаком математического ожидания, при  $K \rightarrow -\infty$  будет расти как  $\sqrt{|K|}$ , а при  $K \rightarrow +\infty$  как  $\log \sqrt{|K|}$ . В результате мы получаем оценку:

$$E \log \|B\| < c_1 + c_2 \int_{|K|>N} \sqrt{|K|} P(dK) < c_1 + c_3 E|K| < \infty, \quad (3.13)$$

из которой следует нужное свойство.

Проделанные математические выкладки позволяют применять теорему Ферстенберга к рассматриваемой нами задаче модельного уравнения Якоби и вычислять показатель Ляпунова согласно интегральному представлению (3.11). Чтобы воспользоваться этим результатом нужно, однако, сперва найти инвариантную меру. В описании этой процедуры мы будем близко следовать работам [20] и [16], в которых автором диссертации были сформулированы основные результаты.

### 3 Инвариантная мера для уравнения Якоби

Пусть на границе группы матриц  $W$  задана вероятностная мера  $\nu$ , тогда действие матриц из группы  $G$  с распределением  $\mu$  индуцирует на  $W$  новую меру, которая называется сверткой мер  $\nu$  и  $\mu$ . Свертка мер  $\nu * \mu$  определяется как такая мера на  $W$ , что для любой измеримой функции  $f(w)$  выполняется

соотношение

$$\int_W f(w) d\nu * \mu(w) = \int_W \int_G f(w \circ g) d\mu(g) d\nu(w). \quad (3.14)$$

Если мера  $\nu$  инвариантна по отношению к действию группы матриц, то она, очевидно, удовлетворяет условию  $\nu * \mu = \nu$ .

Точку на окружности со склеенными диаметрально противоположными точками удобно параметризовать углом  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2)$ , а ее образ под действием матрицы  $B$  будем обозначать через  $\psi$ . Тогда, как нетрудно проверить, тангенсы этих углов,  $u = \operatorname{tg}\varphi$  и  $v = \operatorname{tg}\psi$ , и случайная величина  $\xi = \sqrt{|K|}$  связаны соотношением

$$v = \frac{u - \xi \operatorname{tg} \xi}{1 + u \operatorname{tg} \xi / \xi} \equiv F_u(\xi), \quad (3.15)$$

при  $K \geq 0$ , и

$$v = \frac{u + \xi \operatorname{th} \xi}{1 + u \operatorname{th} \xi / \xi} \equiv \tilde{F}_u(\xi), \quad (3.16)$$

при  $K < 0$ .

Точку  $v$  можно рассматривать как функцию от  $u$  и случайного параметра  $\xi$ . Последовательность таких точек, которая образуется под действием независимых матриц  $B$ , порождает цепь Маркова на прямой. Обозначим через  $p(u, v)$  плотность распределения  $v$  при фиксированном  $u$ , которая одновременно является и переходной плотностью рассматриваемой цепи Маркова. Возвращаясь обратно от тангенсов к углам, получаем цепь Маркова на пространстве  $W$ , переходную плотность для которой будем обозначать, соответственно,  $p(\varphi, \psi)$ . Стационарная плотность  $\pi$ , удовлетворяющая уравнению

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\varphi, \psi) \pi(\varphi) d\varphi = \pi(\psi), \quad (3.17)$$

является искомой инвариантной мерой. Итак, вопрос упирается в нахождение переходной плотности и разрешение интегрального уравнения (3.17).

Переходную плотность можно найти как образ плотности случайной величины  $\xi$  под действием отображений  $F$  и  $\tilde{F}$ . В самом деле, если обозначить  $x = F_u^{-1}(v)$  и  $\tilde{x} = \tilde{F}_u^{-1}(v)$ , а плотность  $\xi$  через  $p_\xi(\cdot)$ , то



$$p(u, v) = \frac{1}{2} \frac{p_\xi(x)}{|F'_u(x)|} + \frac{1}{2} \frac{p_\xi(\tilde{x})}{|\tilde{F}'_u(\tilde{x})|}. \quad (3.18)$$

Прообраз, вообще говоря, может быть не единственным, поэтому в формуле (3.18) подразумевается суммирование по всем прообразам.

Обратимся к вопросу нахождения обратного отображения в выражениях (3.15), (3.16), который и представляет основную трудность. Нетрудно убедиться, что выписать аналитическое решение не получается и нужно решать задачу численно. С точки зрения численного подхода задача имеет ряд особенностей. Во-первых, в некоторых точках знаменатели в выражениях (3.15) и (3.16) обращаются в ноль и появляется вертикальная асимптота. Таких промежутков, ограниченных с обеих сторон вертикальными асимптотами, может быть достаточно много, и на каждом из них требуется восстановить обратную функцию. Отсюда возникает неединственность прообразов. Во-вторых, присутствует область значений параметров, при которых функции сходятся к асимптотам настолько быстро, что точность их вычисления выходит за пределы точности машинной арифметики, при этом именно в этой области содержится основная доля решений. В-третьих, переходная плотность оказывается быстро меняющейся функцией, поэтому для ее задания требуется вводить большое число узлов численной сетки. Объем необходимых вычислений превышает возможности персональных компьютеров, и разумное время счета удается достичь только с привлечением суперкомпьютера.

Опишем более детально этапы вычислений. Сразу заметим, что выражения (3.15) и (3.16) достаточно просто обращаются относительно  $u$  и  $v$ , и выражение  $u$  через  $v$  получится, если подставить в них  $u = -v$  и  $v = -u$ . Отсюда следует, что  $p(u, v) = p(-v, -u)$ . Это несколько уменьшает набор точек, которые нужно перебрать, чтобы восстановить обратное отображение. Далее нужно выбрать конкретное распределение для параметра кривизны  $K$ . Исходя из условий задачи, мы полагаем, что в среднем  $K$  равно нулю и распределено либо равномерно, либо согласно нормальному закону. Начнем с первого случая, т.е. будем считать, что  $K$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-K_{\max}, K_{\max}]$ , причем пока ограничимся условием  $K_{\max} \leq 1$  и назовем это случаем малых  $K$ .

Рассмотрим качественно поведение функций  $F$  и  $\tilde{F}$  как функций от  $\xi$  при различных фиксированных значениях параметра  $u$ . Заметим, что осо-

бые точки функции тангенс (т.е. точки вида  $\pi/2 + \pi k$ , где  $k$  – целое) не являются особыми для  $F$  при всех  $u \neq 0$ . Случай  $u = 0$  не требует отдельного изучения, поскольку при численном решении задачи всегда можно задать такое расположение узлов, при котором точка ноль не задействуется. Таким образом, особые точки появляются, только когда знаменатель обращается в нуль, т.е.  $\operatorname{tg} \xi / \xi = -1/u$ . В силу периодичности тангенса это уравнение имеет счетное число корней, однако нас интересует лишь наличие корня на отрезке  $[0, \sqrt{K_{\max}}]$ . В зависимости от конкретного значения  $u$  в этот отрезок попадает не более одного корня. Точно также в этот отрезок может попадать не более одного корня решения аналогичного уравнения с гиперболическим тангенсом. Причем, как нетрудно убедиться, оба корня существуют одновременно только при  $u = -1$  и при этом совпадают. На рис. 3.1 схематично показаны графики функций  $F$  и  $\tilde{F}$ , которые возникают при некоторых  $u$ , а в табл. 3.1 собраны все возможные случаи.

Значения параметра $u$	асимптота $F$	асимптота $\tilde{F}$
$(-\infty, u_1)$	нет	нет
$[u_1, -1)$	нет	есть
$-1$	в точке 0	в точке 0
$(-1, u_2]$	есть	нет
$(u_2, +\infty)$	нет	нет

Таблица 3.1. Наличие асимптот функций  $F$  и  $\tilde{F}$  на отрезке  $[0, \sqrt{K_{\max}}]$  при  $K_{\max} \leq 1$  в зависимости от значений параметра  $u$ . Для краткости обозначено  $u_1 = -\sqrt{K_{\max}}/\operatorname{th} \sqrt{K_{\max}}$  и  $u_2 = -\sqrt{K_{\max}}/\operatorname{tg} \sqrt{K_{\max}}$ .

Заметим, что в отсутствие асимптот, функции  $F$  и  $\tilde{F}$  являются монотонными на всем отрезке  $[0, \sqrt{K_{\max}}]$ , поэтому для численного нахождения обратного отображения можно воспользоваться методом деления пополам. При появлении асимптоты отрезок  $[0, \sqrt{K_{\max}}]$  разбивается на две части, левее и правее асимптоты, и на каждом промежутке функции вновь оказываются монотонными. Все найденные прообразы для каждой пары  $u$  и  $v$  подставляются в формулу (3.18), что дает численное выражение для переходной плотности.

Рассмотрим полученную переходную плотность  $p(\varphi, \psi) \equiv p_\psi(\varphi)$  при различных фиксированных значениях  $\psi$ . Для определенности зададим  $K_{\max} = 1$ . Напомним, что  $\psi$  обозначает точку, в которую перешла точка  $\varphi$  под действием матрицы  $B$ , и значения  $\varphi, \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ . На рис. 3.2 построены графики

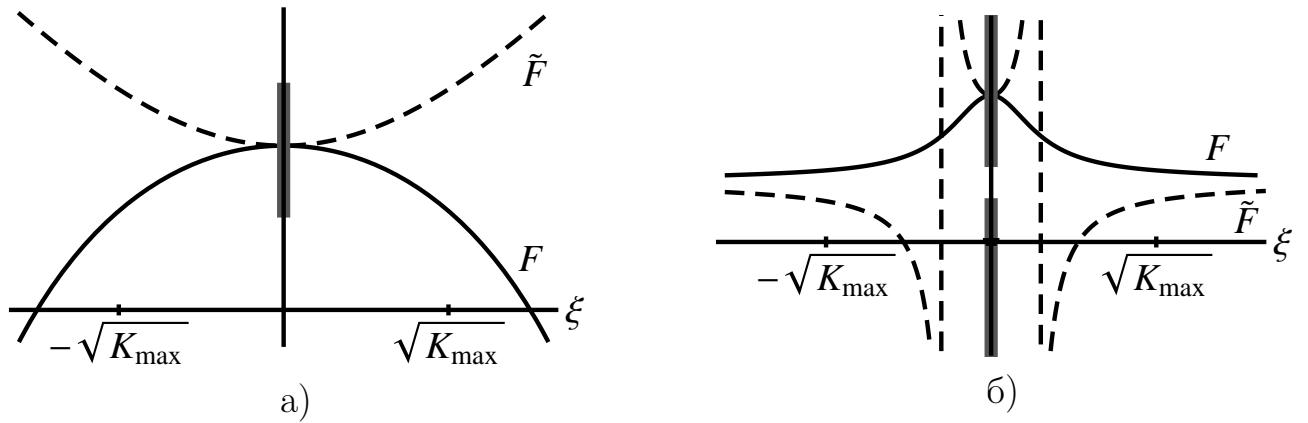


Рисунок 3.1. Графики функций  $F(\xi)$  (сплошная линия) и  $\tilde{F}(\xi)$  (прерывистая линия), возникающие при подсчете переходной плотности: а) параметр  $u \in (-\infty, u_1) \cup (u_2, +\infty)$ , б)  $u \in [u_1, -1)$ . На оси ординат серым цветом отмечены области значений параметра  $v$ , при которых хотя бы одно из уравнений  $v = F_u(\xi)$  или  $v = \tilde{F}_u(\xi)$  имеет решение на отрезке  $[0, \sqrt{K_{\max}}]$ .

$p_\psi(\varphi)$  соответствующие  $\psi = 0.01, \psi = 0.77, \psi = 1.43$ .

Из рис. 3.2а видно, что функция  $p_\psi(\varphi)$  является непрерывной на каждой компоненте области определения. В тех случаях, когда область определения переходной плотности содержит точку  $\pm\pi/2$  (напомним, что на нашем пространстве отождествляются диаметрально противоположные точки), график переходной плотности будет изображен состоящим из двух компонент, что показано для  $\psi = 0.77$ .

Более полное представление о переходной плотности при различных  $\psi$  даст рис. 3.2б, на котором построены графики по 100 точкам  $\psi$ , равномерно разбивающим отрезок  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Значение  $K_{\max}$  для этого рисунка равно 0.1, что немного сузило каждый график. Для упрощения мы не показываем боковых вертикальных линий каждого графика. На рисунке отмечено место, в котором графики соответствуют значениям  $\psi$  близким к  $-\pi/2$ . Далее, при увеличении  $\psi$  графики смещаются вправо и доходят до правого края картинки. В этом месте происходит перескок на левый край, а их носители становятся разрывными. Это соответствует ситуации, когда  $\psi$  близко к  $\pi/4$ . Перескочив на левый край картинки, при дальнейшем увеличении  $\psi$  графики продолжают смещаться вправо, и приходят в тоже место, откуда начинались, когда  $\psi$  приближается к  $\pi/2$ .

Описанный путь нахождения переходной плотности, на самом деле, годится для всех таких распределений, что  $\sqrt{K_{\max}} \leq \pi/2$ . В тех случаях, когда  $K$

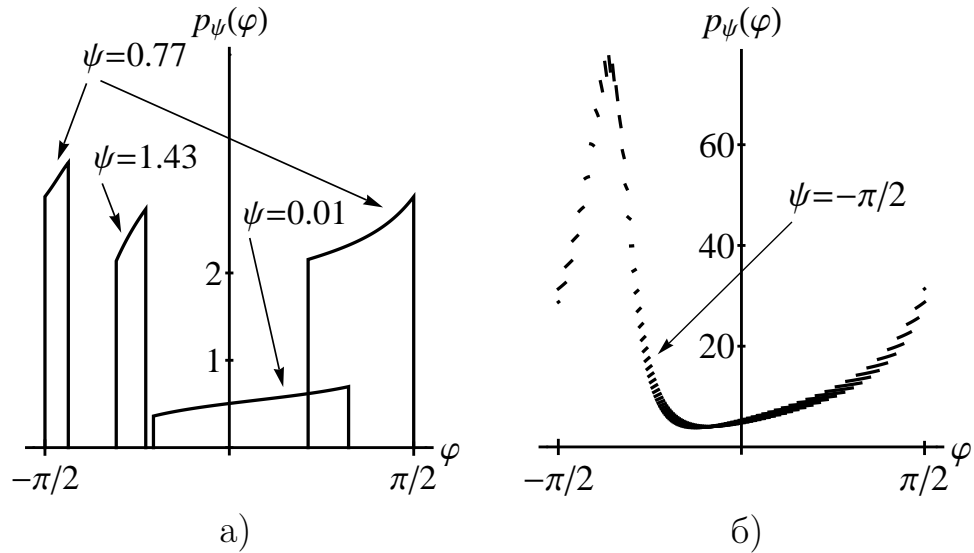


Рисунок 3.2. Вид переходной плотности  $p_\psi(\varphi)$ . В случае (а) показаны графики для некоторых фиксированных значений  $\psi$ , параметр  $K_{\max} = 1$ . В случае (б) для меньшего параметра  $K_{\max} = 0.1$  построены графики по 100 точкам  $\psi$ , равномерно разбивающим отрезок  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Вертикальные линии, возникающие в местах разрывов графиков, не показаны.

распределено на большем интервале, появляются дополнительные асимптоты у функций  $F$  и  $\tilde{F}$  и возникает ряд новых особенностей, которые заставляют рассматривать этот случай отдельно. В эту же группу попадают и распределения  $K$ , заданные на всей прямой (например, нормальное), поскольку, в силу вычислительных ограничений, такие распределение все равно сужаются до конечных областей.

На рис. 3.3 показано возникновение множества асимптот у функции  $F_u(\xi)$ . В этом случае решения уравнения  $v = F_u(\xi)$  ищутся на на каждом из отрезков, разделенных вертикальными асимптотами. При этом на первом отрезке решение есть, только если  $v \leq u/(1+u)$ , на всех последующих отрезках решение есть для всех  $v$ , кроме, быть может, последнего отрезка, ограниченного справа максимальным допустимым значением  $\xi = \sqrt{K_{\max}}$ .

В случае функции  $\tilde{F}$  начинают сказываться особенности, связанные с тем, что с вычислительной точки зрения гиперболический тангенс быстро становится равным единице. В нашей реализации для переменной типа double языка C это происходит уже начиная со значений  $\xi$  порядка 20. Сама функция  $\tilde{F}$  при этом переходит в тождественную. Однако если в этой области значений  $\xi$  непосредственно заменить функцию на тождественную, то, с формальной точки зрения, мы не учитываем возможность попадания в эту область асимп-

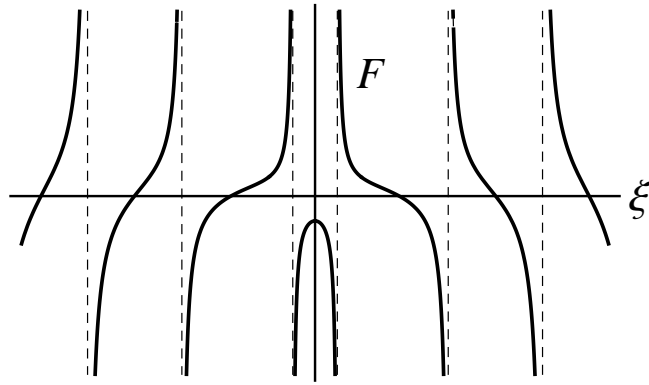


Рисунок 3.3. График функции  $F_u(\xi)$ , качественно иллюстрирующий ее поведение при  $u \neq -1$ . Прерывистой линией показаны вертикальные асимптоты.

тоты, которая возникает при обращении знаменателя в нуль. Действительно, если  $\text{th } \xi$  близок к 1, знаменатель обращается в нуль при значениях параметра  $u$ , близких к  $-\xi$ . Это означает, что при больших значениях параметра  $u$  численно не удастся задавать функцию  $\tilde{F}$  согласно формуле (3.16) и возможна потеря корней при нахождении обратного отображения. Из этой ситуации можно легко выйти, если заметить, что размер области, на которой функция  $\tilde{F}$  значимо отличается от тождественной и, следовательно, на которой не удастся задавать ее численно, крайне мала. Более того, в работе [16] было показано, что размер этой области убывает как  $\exp(-u)$ . Схематично возникающая особенность прказана на рис. 3.4. Ввиду малого размера области, на которой не удастся задавать  $\tilde{F}$ , будем полагать, что все точки, лежащие в образе этой области, имеют прообразом одну точку, которая выбирается произвольно внутри этой области. Точность подобного приближения оказывается не хуже точности нахождения корней уравнений во всех остальных случаях. В остальном алгоритм вычисления переходной плотности не отличается от рассмотренного выше случая малых  $K$ .

Найденная переходная плотность является ядром интегрального уравнения (3.17) на стационарную плотность. По своему виду (3.17) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с нулевой правой частью. Для его решения мы воспользуемся методом итераций [6]. В качестве нулевого приближения положим  $\pi_0(\psi) \equiv 1$ . Затем всякий раз производится

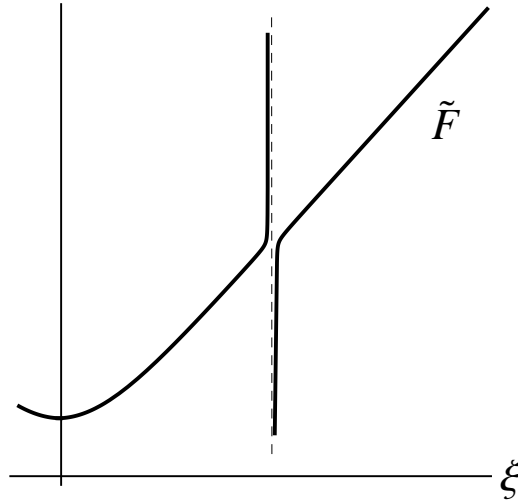


Рисунок 3.4. Локальное возмущение функции  $\tilde{F}$ , вызванное наличием вертикальной асимптоты (показана прерывистой линией), возникающее при больших значениях параметра  $u$ .

нормировка плотности, полученной на предыдущем шаге:

$$\pi_{n-1}(\psi) = \frac{\pi_{n-1}(\psi)}{\|\pi_{n-1}(\psi)\|_{L_1[-\pi/2, \pi/2]}}, \quad (3.19)$$

и новая  $\pi_n(\psi)$  находится как

$$\pi_n(\psi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\varphi, \psi) \pi_{n-1}(\varphi) d\varphi. \quad (3.20)$$

Процесс останавливается, когда  $\|\pi_n - \pi_{n-1}\|_{L_1[-\pi/2, \pi/2]} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - заданная точность. Далее мы полагаем  $\varepsilon = 10^{-4}$  для малых  $K$  и  $\varepsilon = 10^{-6}$  для больших  $K$ .

При подсчете интеграла мы пользуемся составной формулой прямоугольников с разбиением на  $N = 10^4$ ,  $2 \cdot 10^4$  и  $3 \cdot 10^4$  узлов. Затем полученные результаты сравниваются. Необходимость в таком большом разбиении объясняется следующим. При малых  $K_{\max}$  и некоторых значениях параметра  $\psi$  становится малой область определения обратного отображения. Мы ставим условие, что при каждом  $\psi$  в область определения обратного отображения должно попадать хотя бы 10 узлов. В частности, при  $K_{\max} = 0.01$  для выполнения этого условия  $N = 10^4$  оказывается недостаточным, и это, как будет показано ниже, влияет на точность вычисления показателей Ляпунова. В

качестве дополнительного контроля точности решения интегрального уравнения мы рассматриваем максимальную по модулю разницу между левой и правой частью интегрального уравнения (3.17) по всем узлам разбиения, которую будем обозначать через  $\Delta$ . Вычисления при  $N \geq 10^4$  и большом числе итераций оказываются достаточно трудоемкими для обычного компьютера. В то же время, задача может быть легко распараллелена, после чего вычисление переходной плотности будет происходить независимо по отдельным наборам точек  $\varphi$  и  $\psi$ . В качестве платформы для вычислений использовался суперкомпьютер СКИФ МГУ [77].

Последовательные приближения к стационарной плотности для различного числа шагов  $n$  и точек разбиения  $N$  показаны на рис. 3.5 для  $K_{\max} = 1$ . Здесь и далее мы показываем только значения на первом шаге и на последнем шаге, когда норма разности становится меньше заданного  $\varepsilon$ .

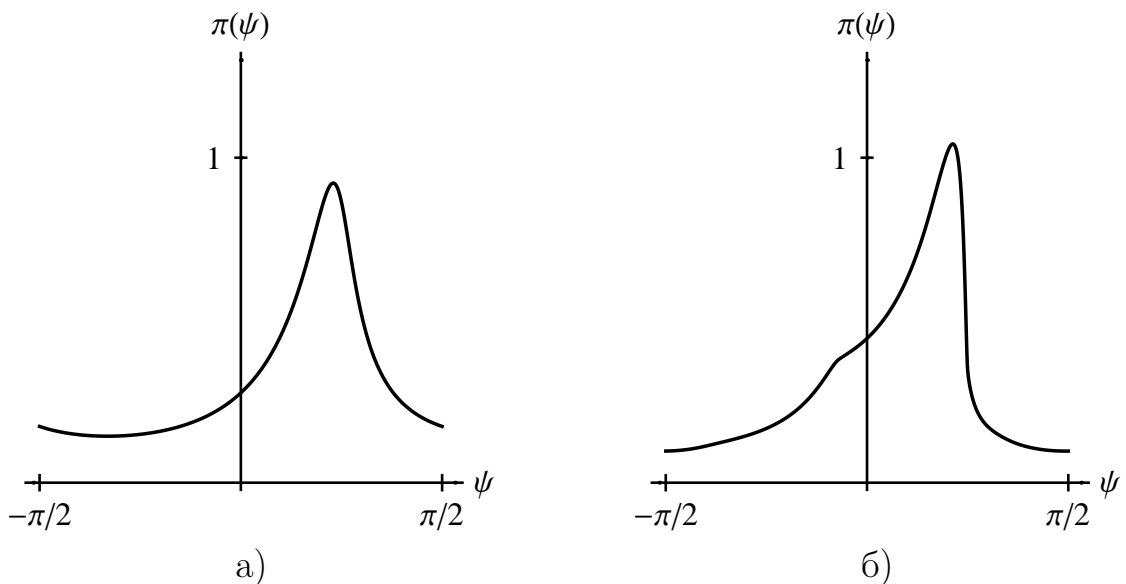


Рисунок 3.5. Последовательные приближения к стационарной плотности в методе итераций,  $K_{\max} = 1$ ,  $N=10^4$ : а) на первом шаге ( $n = 1$ ), б) на последнем шаге ( $n = 15$ ).

Сравним результаты при  $n = 16$  и  $N = 10^4$ ,  $2 \cdot 10^4$  и  $3 \cdot 10^4$ . Во всех трех случаях итерационный процесс заканчивается на 16 шаге, поскольку норма разности двух соседних приближений становится меньше  $10^{-4}$ . Однако величина погрешности решения интегрального уравнения оказывается разной. Значения погрешности решения в зависимости от числа узлов разбиения приведена в табл. 3.2. Из таблицы видно, что увеличение  $N$  повышает точность решения, что, однако, качественно не сказывается на получаемых графиках.

Полученную функцию мы принимаем за решение интегрального уравнения.

Размер сетки	$10^4$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$
Число шагов	15	15	15
Погрешность	$2 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$8.3 \cdot 10^{-5}$
Норма $\ \pi_n\ $	1	0.9999	0.9999

Таблица 3.2. Сходимость метода итераций в задаче с  $K \sim U[-1, 1]$  при различном выборе сетки  $N$ . Приведено число шагов  $n$ , погрешность  $\Delta$  и норма приближения  $\|\pi_n\|$  на последнем шаге.

При  $K_{\max} = 0.1$ , аналогично случаю  $K_{\max} = 1$ , увеличение числа узлов приводит к повышению точности решения, качественно не влияя на вид получаемого графика стационарной плотности. Величина погрешности для различных  $N$  приведена в табл. 3.3. Графики последовательных приближений показаны на рис. 3.6. При  $n = 65$  норма разности между соседними приближениями становится меньше  $10^{-4}$ , и получаемую функцию мы принимаем за решение.

Размер сетки	$10^4$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$
Число шагов	65	65	65
Погрешность	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
Норма $\ \pi_n\ $	0.9998	0.9999	0.9999

Таблица 3.3. Сходимость метода итераций в задаче с  $K \sim U[-0.1, 0.1]$  при различном выборе сетки  $N$ . Приведено число шагов  $n$ , погрешность  $\Delta$  и норма приближения  $\|\pi_n\|$  на последнем шаге.

На рис. 3.7 показано, как уменьшается норма разности между левой и правой частью интегрального уравнения в зависимости от числе шагов в методе итераций для  $K_{\max} = 1$ ,  $K_{\max} = 0.1$  и  $K_{\max} = 0.01$ .

Перейдем к случаю  $K_{\max} = 0.01$ . Как уже отмечалось, при  $K \rightarrow 0$  мера носителя ядра интегрального уравнения при каждом  $\psi$  также стремится к нулю, что налагает дополнительные ограничения на выбор сетки, по которой проводится интегрирование. В отличие от двух предыдущих случаев, при  $N = 10^4$  только в 80% случаев в область определения обратного отображения попадает не менее 10 узлов разбиения. При  $N = 2 \cdot 10^4$  доля таких случаев повышается до 94%, и только при  $N = 3 \cdot 10^4$  это условие полностью выполняется. Погрешность решения интегрального уравнения приведена в табл. 3.4.



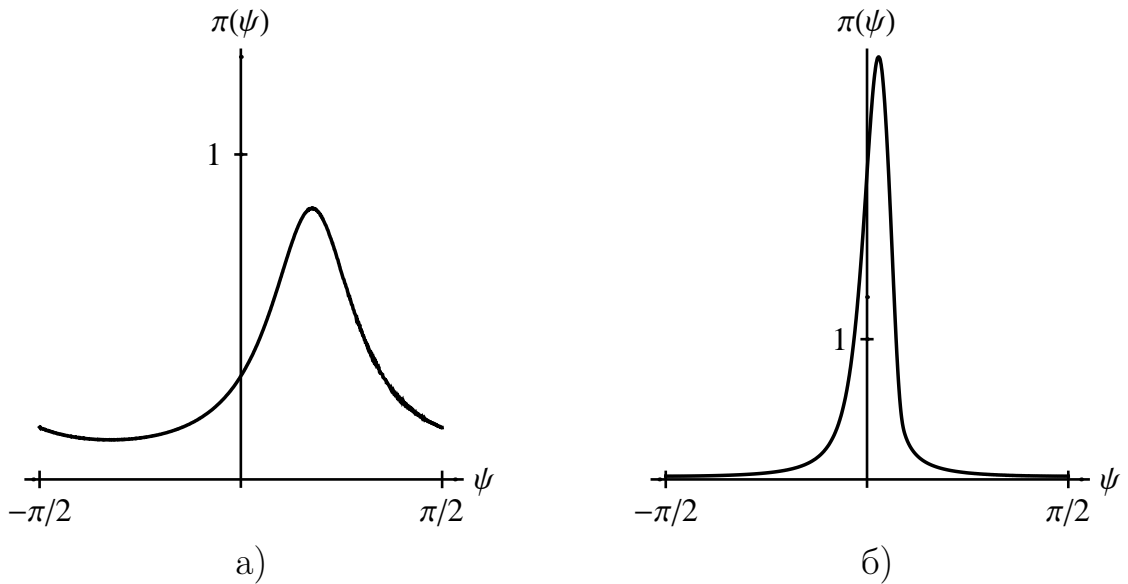


Рисунок 3.6. Последовательные приближения к стационарной плотности в методе итераций,  $K_{\max} = 0.1$ ,  $N=10^4$ : а) на первом шаге ( $n = 1$ ), б) на последнем шаге ( $n = 65$ ).

Размер сетки	$10^4$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$
Число шагов	252	250	249
Погрешность	$9.7 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
Норма $\ \pi_n\ $	0.9992	0.9998	0.9999

Таблица 3.4. Сходимость метода итераций в задаче с  $K \sim U[-0.01, 0.01]$  при различном выборе сетки  $N$ . Приведено число итераций  $n$ , погрешность  $\Delta$  и норма приближения  $\|\pi_n\|$  на последнем шаге.

При детальном рассмотрении в получаемых графиках также видны небольшие изменения, которые в итоге сказываются на точности вычисления показателей Ляпунова. В качестве решения в этом случае естественно положить график, получаемый при  $N = 3 \cdot 10^4$ . На рис. 3.8 приведены последовательные приближения при различных  $n$ . Итерационный процесс завершается при  $n=249$ .

Наряду с плотностью интересна функция распределения, которая вычисляется по найденной плотности согласно формуле

$$F(\varphi) = \int_{-\pi/2}^{\varphi} \pi(\psi) d\psi. \quad (3.21)$$

На рис. 3.21 приведены графики функций распределения для  $K_{\max} = 1, 0.1$

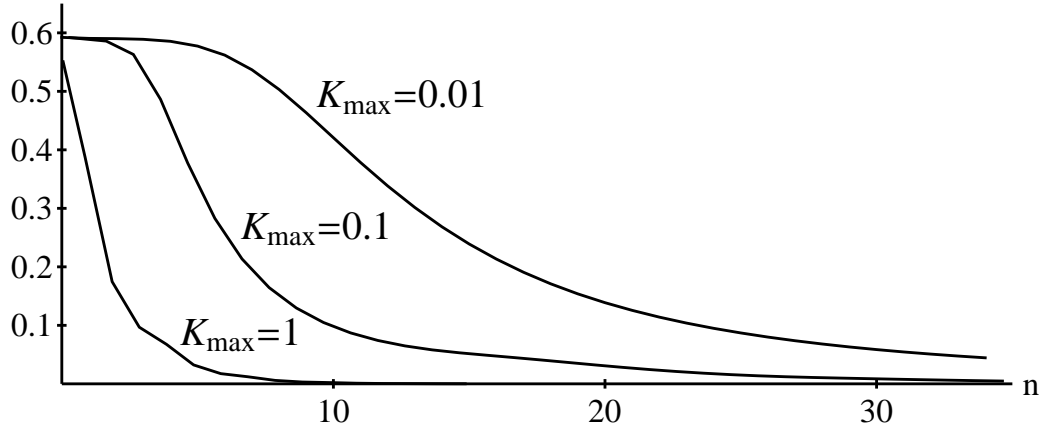


Рисунок 3.7. Норма разности между левой и правой частью интегрального уравнения на стационарную плотность для различных значений  $K_{\max}$  в зависимости от числа итераций  $n$ .

и 0.01.

Далее будет рассматриваться случай, когда  $K$  имеет нормальное распределение с нулевым средним и некоторой дисперсией  $\sigma^2$ . Мы по-прежнему будем сравнивать результаты, получаемые при разбиении отрезка  $[-\pi/2, \pi/2]$  на  $N = 10^4$ ,  $2 \cdot 10^4$  и  $3 \cdot 10^4$  узлов. Для малых  $K$  необходимость в большом разбиении объяснялась тем, что становится малой область определения обратного отображения и в нее попадает недостаточное количество узлов, что затем влияет на точность вычисления показателей Ляпунова. В случае нормального распределения  $K$  необходимо, прежде всего, убедиться в том, что неравномерность расположения узлов на прямой после отображения с помощью функции тангенса равномерной сетки на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$  не вносит искажений в результат.

С точки зрения численного подхода, нормальное распределение величины  $K$  рассматривается как распределение на большом, но конечном отрезке. Покажем, как можно выбирать границы этого отрезка. Заметим, что распределение  $\xi = \sqrt{|K|}$  выражается через распределение  $K$  следующим образом:  $p_{\xi}(x) = 4x p_K(x^2)$  при  $x \geq 0$ . Плотность нормального распределения убывает как  $\exp(-x^2/2\sigma^2)$ , а тогда плотность  $\xi$  убывает еще быстрее – как  $x \exp(-x^4/2\sigma^2)$ . Чтобы не выходить за пределы точности переменной типа `double`, который приблизительно равен  $2.2 \cdot 10^{-308}$  (см., напр., [31]), нужно ограничить значения  $x$  некоторой величиной  $x_{\max}$ . Например, для этого подойдет  $x_{\max} = 6\sqrt{\sigma}$ . Для нормального распределения  $N(0, 1)$  получаем

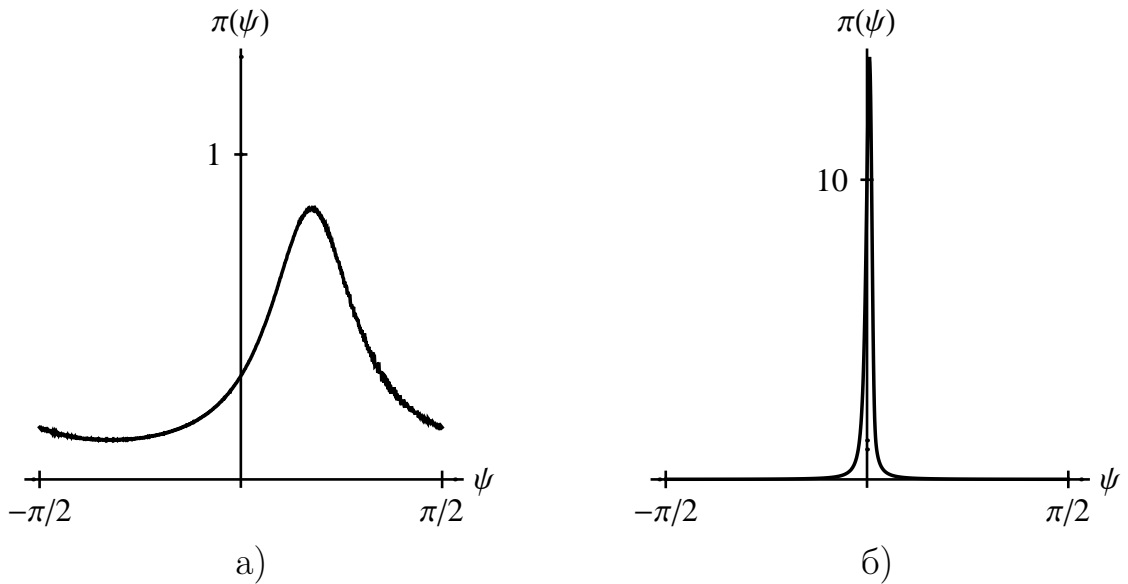


Рисунок 3.8. Последовательные приближения к стационарной плотности в методе итераций,  $K_{\max} = 0.01$ ,  $N=3 \cdot 10^4$ : а)  $n = 1$ , б)  $n = 248$ .

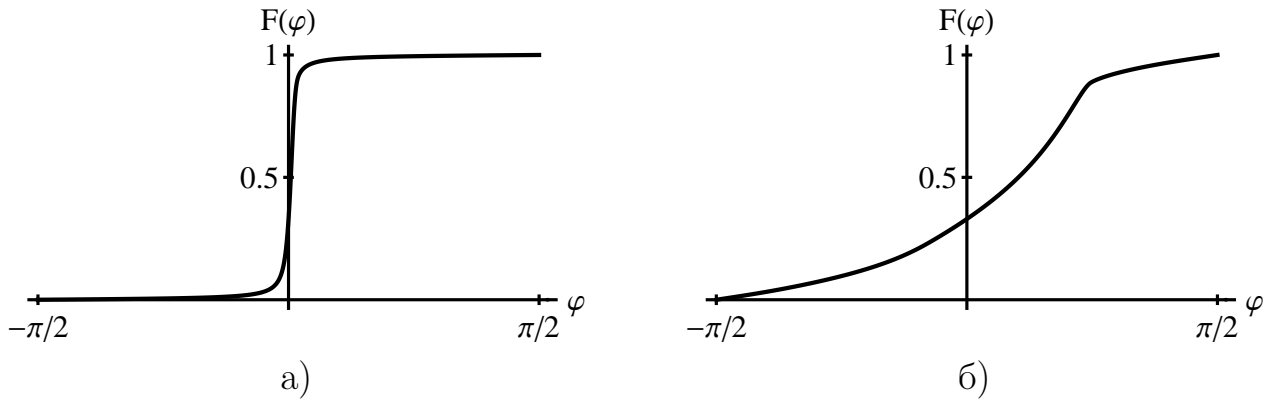


Рисунок 3.9. Функция распределения, соответствующая плотности стационарного распределения: а)  $K_{\max} = 1$ , б)  $K_{\max} = 0.01$

$x_{\max} = 6$ , при  $\sigma^2 = 100$  полагаем  $x_{\max} = 18$ , а при  $\sigma^2 = 100^2$  будем использовать  $x_{\max} = 60$ .

В таблице 3.5 представлены параметры погрешности счета. Для нормального распределения оказалось достаточным рассматривать разбиение на  $N = 10^4$  узлов. Получившиеся при этом графики стационарной плотности показаны на рис. 3.10. Из этого рисунка видно, что, как и в случае равномерного распределения, при небольших  $\sigma^2$  графики имеют максимум, расположенный ближе к нулю, затем при увеличении дисперсии  $\sigma^2$  распределения  $K$  максимум смещается к правой границе, становясь более резкими.

На рис. 3.11 показана функция распределения для  $K \sim N(0, 1)$ , которая получена по формуле (3.21).

Дисперсия $\sigma^2$	1	100	$100^2$
Число шагов	17	5	3
Погрешность	$2 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$
Норма $\ \pi_n\ $	1	1	0.9999

Таблица 3.5. Сходимость метода итераций в задаче с нормальным распределением параметра  $K$  и различной дисперсией  $\sigma^2$ . Приведено число итераций  $n$ , погрешность  $\Delta$  и норма приближения  $\|\pi_n\|$  на последнем шаге.

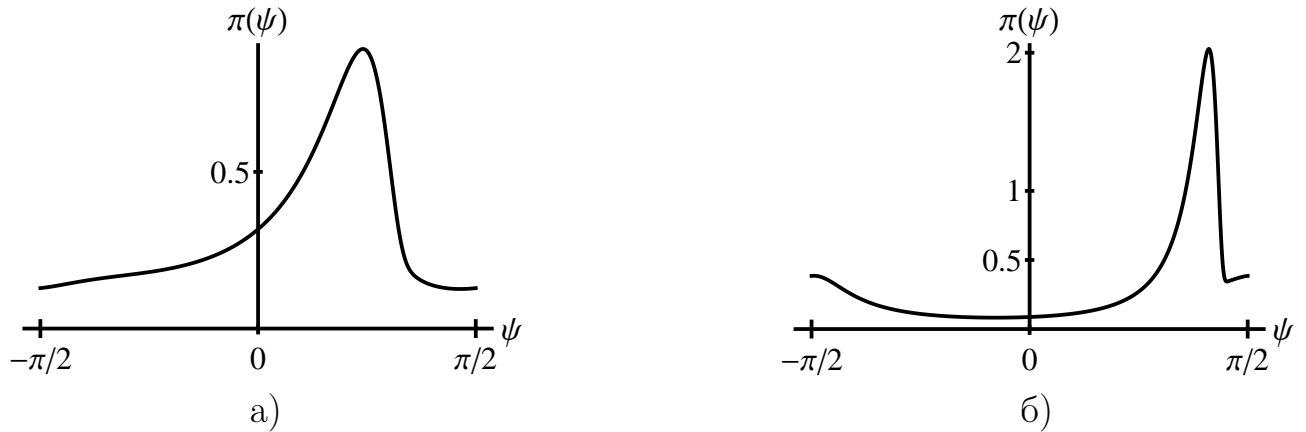


Рисунок 3.10. Графики стационарной плотности для  $K \sim N(0, \sigma^2)$ : а)  $\sigma^2 = 1$   
б)  $\sigma^2 = 100$ .

Подводя итог данного раздела, можно сделать вывод о том, что предложенная методика численного нахождения инвариантной меры, несмотря на довольно трудоемкие вычисления, приводит к устойчивому результату, а сама получаемая плотность распределения хотя и устроена относительно просто, но не задается аналитическим видом. Перейдем теперь к непосредственному вычислению скоростей роста.

## 4 Показатель Ляпунова

Вычислим теперь с помощью стационарной плотности показатель Ляпунова произведения случайных матриц, используя соотношение

$$\lambda = E \log \|wB\|, \quad (3.22)$$

где  $w = (\cos \psi, \sin \psi)$  и  $\psi$  имеет стационарное распределение.

Под действием матрицы  $B$  вектор  $(\cos \psi, \sin \psi)$  переходит в вектор  $(a(K, \psi), b(K, \psi))$ . По теореме Фубини искомое математическое ожидание мо-

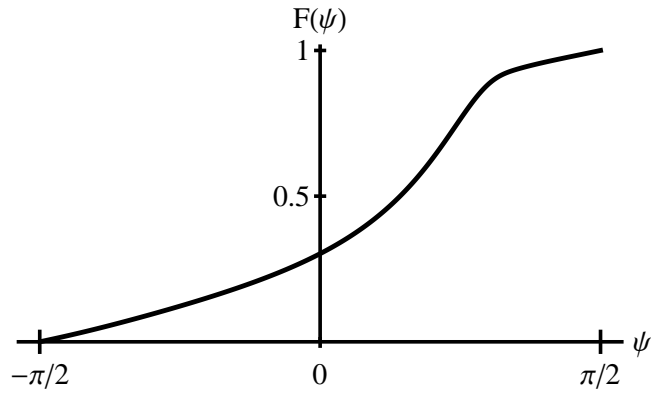


Рисунок 3.11. Функция распределения, соответствующая стационарной плотности при  $K \sim N(0, 1)$ .

жет быть найдено по формуле

$$E \log \|wB\| = \int_{-K_{\max}}^{K_{\max}} \frac{dK}{2K_{\max}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log \|(a(K, \psi), b(K, \psi))\| \pi(\psi) d\psi, \quad (3.23)$$

где  $\|\cdot\|$  – евклидова норма.

Вычисленный таким образом показатель Ляпунова для различных вариантов распределения случайной величины  $K$  приведен в табл. 3.6. Для  $K_{\max} = 1$  и  $0.1$  показатели Ляпунова оказались одинаковыми при всех трех рассмотренных значениях  $N$ . Для  $K_{\max} = 0.01$  показатели Ляпунова равнялись  $0.0097$ ,  $0.0094$  и  $0.0093$  при  $N=10^4$ ,  $2 \cdot 10^4$  и  $3 \cdot 10^4$  соответственно.

В работе [29] показатели Ляпунова вычислялись путем моделирования большого числа реализаций решения уравнения Якоби. Решения находились двумя способами: путем перемножения фундаментальных матриц и методом Рунге–Кутты, при этом для задания случайного процесса использовались различные генераторы случайных чисел (C++ и Basic). В работе [29] исследования проводились для случая, соответствующего нашему значению  $K_{\max} = 1$ . В результате были получены следующие оценки: метод перемножения фундаментальных матриц с использованием генератора, встроенного в Basic, дает  $\lambda = 0.2131$ , для C++ этот показатель равен  $\lambda = 0.2122$ . Метод Рунге–Кутты с использованием Basic дает  $\lambda = 0.2133$ , с использованием C++ получаем  $\lambda = 0.2124$ . Можно видеть, что эти оценки достаточно близки к полученному нами значению  $0.2132$ .

Значение $K_{\max}$	0.01	0.1	1	$10^2$	$10^4$
Показатель Ляпунова	0.0093	0.0441	0.2132	3.2459	33.2358

Таблица 3.6. Показатели Ляпунова в случае равномерного распределения параметра кривизны  $K$  на интервалах различной ширины.

Вычисления показателей Ляпунова, отвечающих нормальному распределению параметра  $K$ , представлены в табл. 3.7.

Распределение $K$	$N(0, 0.01)$	$N(0, 1)$	$N(0, 10^2)$	$N(0, 10^4)$
Показатель Ляпунова	0.0645	0.3137	1.2184	4.0317

Таблица 3.7. Показатели Ляпунова в случае нормального распределения параметра кривизны  $K$  с нулевым средним и различной дисперсией.

По аналогии с [29] были проведены оценки показателя Ляпунова для остальных вариантов распределения параметра кривизны  $K$ , и во всех случаях наблюдалась высокая степень совпадения результатов с приведенными в табл. 3.6 и 3.7 значениями.

Заметим однако, что моделирование позволяет не только приближенно вычислять показатели Ляпунова, но и получать приближение к стационарной плотности. Для этого нужно использовать эмпирическую плотность распределения угла  $\psi = \arctg(y'(n)/y(n))$ . Из рис. 3.12 можно видеть, что при моделировании  $10^4$  реализаций поля Якоби и производной в точке  $n = 10^3$  или  $n = 10^4$ , получаемые графики оказываются близки к графику стационарной плотности, приведенному на рис. 3.5.

Результат вычисления показателей Ляпунова по построенной эмпирической плотности представлены в табл. 3.8. Можно видеть, что таким способом получается хорошее приближение к точным значениям в табл. 3.6.

Число шагов	$10^3$	$10^4$
Показатель Ляпунова	0.2158	0.2129

Таблица 3.8. Показатели Ляпунова, посчитанные по эмпирической плотности распределения, в зависимости от длины рассматриваемых реализаций поля Якоби.

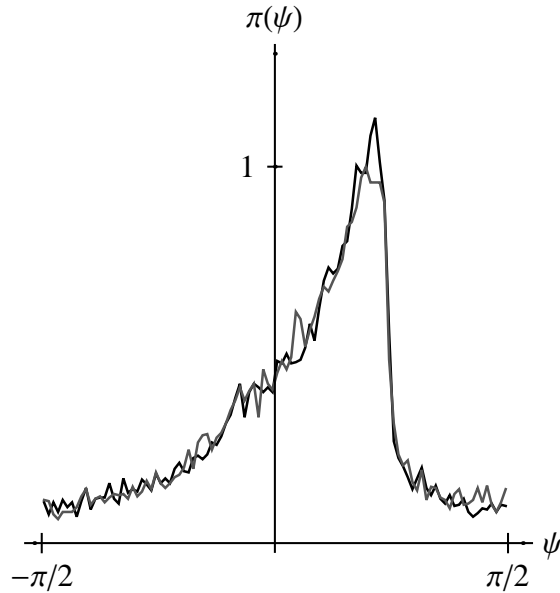


Рисунок 3.12. График эмпирической плотности распределения, аппроксимирующей стационарную плотность, вычисленный по значениям поля Якоби в точке  $n = 10^3$  (черный) и  $n = 10^4$  (серый). Объем выборки составил  $10^4$  реализаций, распределение параметра кривизны  $K$  задано равномерным на отрезке  $[-1, 1]$ .

## 5 Моменты старших порядков

Формула для вычисления показателя Ляпунова, основанная на интегрировании инвариантной меры, вообще говоря, не обобщается на вычисление старших моментов. Исключение из этого правила составляет случай, когда распределение матриц обладает определенной вращательной симметрией. Для таких матриц, как показано нами в работе [80], удается выразить явную формулу для моменты старшего порядка, там же обсуждается, трудности какого плана возникают в общей ситуации.

В самом деле, обозначим  $\xi_n = \|\hat{B}(n)\mathbf{x}\|^p$  и  $\eta_n = \log \|\hat{B}(n)\mathbf{x}\|/n$ , где  $\hat{B}(n) = \hat{B}_n \hat{B}_{n-1} \hat{B}_1$ . Напомним, как определяются моменты старших порядков:

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np} \log \mathbb{E} \xi_n. \quad (3.24)$$

Заметим, что это выражение можно переписать в терминах характеристической функции величины  $\eta_n$ , которая в свою очередь есть  $\chi_n(t) = \mathbb{E} \exp(it\eta_n)$ .

Действительно,  $\chi_n(t) = \mathbb{E} \exp(it \log \xi_n/np) = \mathbb{E} \xi_n^{it/np}$ , следовательно,

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np} \log \chi_n(-inp). \quad (3.25)$$

Представим  $\eta_n$  в виде суммы:

$$\eta_n = \frac{1}{n} \left( \log \frac{\|\hat{B}_n \hat{B}_{n-1} \dots \hat{B}_1 \mathbf{x}\|}{\|\hat{B}_{n-1} \dots \hat{B}_1 \mathbf{x}\|} + \log \frac{\|\hat{B}_{n-1} \hat{B}_{n-2} \dots \hat{B}_1 \mathbf{x}\|}{\|\hat{B}_{n-2} \dots \hat{B}_1 \mathbf{x}\|} + \dots + \log \|\hat{B}_1 \mathbf{x}\| \right). \quad (3.26)$$

Предположим, что распределение величины  $\log \|\hat{B} \mathbf{x}\|$  не зависит от выбора единичного вектора  $\mathbf{x}$  (здесь распределение матрицы  $\hat{B}$  совпадает с распределением матриц  $\hat{B}_n$ ). В таком случае  $\eta_n$  будет суммой независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение которых совпадает с  $\eta_1 = \log \|\hat{B} \mathbf{x}\|$ . Тогда характеристическая функция  $\eta_n$  будет произведением характеристических функций слагаемых, т.е.  $\chi_n(t) = (\chi_1(t/n))^n$ . Отсюда получаем искомое выражение:

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{np} \log \chi_1(-ip) = \frac{1}{p} \log \mathbb{E} \|\hat{B} \mathbf{x}\|^p. \quad (3.27)$$

Конечно, независимость распределение  $\log \|\hat{B} \mathbf{x}\|$  от выбора единичного вектора  $\mathbf{x}$  является достаточно вырожденным случаем. В общей ситуации, если положить единичный вектор  $\mathbf{x}$  случайным и по распределению совпадающим со стационарным распределением, то (3.26) предстанет в виде суммы одинаково распределенных слагаемых, однако они уже могут быть зависимыми. В то же время, при  $n \rightarrow \infty$  выполняется аналог закона больших чисел, т.н. эргодическая теорема, и величина  $\eta_n$  сходится почти наверно к неслучайному числу  $\lambda = \mathbb{E} \log \|\hat{B} \mathbf{x}\|$ . Основным результатом Ферстенберга [54] состоит в том, что при достаточно общих предположениях на закон распределения матриц показатель Ляпунова  $\lambda$  оказывается строго положительным, что влечет экспоненциальный рост матрицы-произведения.

Вычисление  $\gamma_p$ , как показано, сводится к определению скорости роста



функции

$$\chi_n(-inp) = 1 + npE\eta_n + \frac{(np)^2}{2!}E\eta_n^2 + \dots + \frac{(np)^k}{k!}E\eta_n^k + \dots \quad (3.28)$$

С одной стороны, для любых  $k$  с вероятностью 1 последовательность  $\eta_n^k$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится к  $\lambda^k$ , и кажется возможным оценить скорость сходимости по центральной предельной теореме (ЦПТ) или ее обобщениям, т.е. аппроксимировать  $\eta_n$  нормальным распределением  $N(\lambda, \sigma^2/n)$  с некоторой величиной дисперсии. Например, если распределение матриц  $\hat{B}_i$  инвариантно по отношению к вращениям, то для (3.26) выполнены условия классической ЦПТ. Подстановка характеристической функции нормального закона, т.е.  $\chi_n(t) = \exp(-it\lambda - \sigma^2 t^2/2n)$ , немедленно приводит к заключению, что

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np} \left( \lambda np + \frac{\sigma^2 n^2 p^2}{2n} \right) = \lambda + \frac{\sigma^2 p}{2}. \quad (3.29)$$

Сравнивая (3.29) с (3.27), получаем

$$\frac{1}{p} \log E \|\hat{B}\mathbf{x}\|^p = \lambda + \frac{\sigma^2 p}{2}. \quad (3.30)$$

Отсюда следует, что

$$E \|\hat{B}\mathbf{x}\|^p = \exp\left(\lambda p + \frac{\sigma^2 p^2}{2}\right) \quad (3.31)$$

и норма  $\|\hat{B}\mathbf{x}\|$  распределена согласно лог-нормальному закону  $\text{LogN}(\lambda, \sigma^2)$ . Логарифм этой величины,  $\log \|\hat{B}\mathbf{x}\|$ , должен иметь нормальное распределение  $N(\lambda, \sigma^2)$ . Этот вывод не согласуется с предположением о произвольном характере распределения матриц  $\hat{B}$ . Дело в том, что прямая подстановка нормального закона в (3.26) является достаточно грубым приближением для нашей задачи и не обеспечивает нужной точности вычисления моментов  $\gamma_p$ .

Чтобы прояснить принципиальное различие в вычислении  $\lambda$  и старших моментов  $\gamma_p$ , следует переписать определение показателя Ляпунова,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} E\eta_n, \quad (3.32)$$

в терминах характеристических функций:

$$\lambda = -i \lim_{n \rightarrow \infty} \chi'_n(0). \quad (3.33)$$

Следствием эргодической теоремы является сходимость последовательности функций  $\chi_n$  к характеристической функции дельта-меры, сосредоточенной в точке  $\lambda$ . Не вызывает вопросов переход к пределу  $\chi_n$  в выражении (3.33), поскольку аргументы функций не изменяются, однако это не так, если рассматривать выражение (3.25), поскольку в общем случае нельзя переходить к пределу функций и аргументов независимо, иными словами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np} \log \chi_n(-inp) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} \log \chi_m \right) (-inp). \quad (3.34)$$

Можно сделать вывод, что изучение роста старших моментов представляет собой отдельную задачу. Один из возможных подходов был намечен в работе [8]. Он состоит в построении последовательности дифференциальных или разностных уравнений с постоянными коэффициентами, в которые входят старшие моменты. Отметим, что успех такого подхода во многом зависит от умения найти нужное преобразование. Наличие вращательной симметрии, как было показано выше, дает пример еще одного класса задач, в которых вычисление старших моментов удастся свести к выражению конечного вида. Замечательным образом, в этот класс попадает задача о росте магнитного поля в статистически однородном и изотропном поле скоростей.

## 6 Магнитное поле в случайном потоке

В предположении, что магнитной диффузией можно пренебречь, эволюция магнитного поля в лагранжевой системе координат описывается уравнением (2.3). Как показано далее, наличие определенной степени симметрии в задаче позволяет избежать трудностей вычисления инвариантной меры, а показатели роста старших моментов поля  $\mathbf{H}$  удастся выразить в конечной формуле. Данный раздел близко следует результатам, полученным автором в цикле работ [19], [80].

Итак, пусть корреляционный тензор  $V_{ij}$  поля скоростей задан в однородной, изотропной и зеркально-симметричной форме

$$V_{ij} = \langle v_i(\mathbf{x}), v_j(\mathbf{y}) \rangle = \frac{v^2}{3} (F(r^2)\delta_{ij} + \frac{r}{2}F'(r^2)(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2})), \quad (3.35)$$

где  $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ . Для определенности положим  $\langle v_i(\mathbf{x}), v_i(\mathbf{y}) \rangle = v^2 f(r^2)$  и  $f(r^2) = \exp(-r^2)$ . Тогда продольная корреляционная функция  $F(r^2) = \exp(-3r^2/5l^2)$ , т.е. мы принимаем  $l$  в качестве характерного масштаба и единицы длины, а время обновления  $\tau$  определяется характерным временем  $l/v$ . Пусть на разных интервалах времени памяти вектора  $\mathbf{v}$  независимы, а независимые матрицы частных производных  $\hat{A}_n$  имеют гауссовское распределение с нулевым средним.

Рассмотрим, как устроены корреляции между элементами матрицы  $\hat{A}_n$ . Исходя из наших предположений, они не должны зависеть от  $n$ . Поскольку матрица  $\hat{A}_n$  имеет размерность  $3 \times 3$ , то ее ковариационная матрица  $B$  будет иметь размерность  $9 \times 9$ , а нумерацию элементов выберем так, что  $\text{corr}(A_{ik}, A_{jp}) = B_{3(i-1)+k, 3(j-1)+p}$ .

Беря частные производные  $V_{ij}$  по  $x_k$  и  $y_p$  и устремляя  $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$  мы получим (опуская общий множитель  $v^2/5l^2$ )

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Можно ожидать, что в рассматриваемом примере инвариантная мера устроена относительно просто. Более того, верна следующая теорема:

**Теорема 1.** *Мера на сфере  $S^2$  со склеенными диаметрально противоположными точками, инвариантная по отношению к действию матриц  $\exp \hat{A}$ , задается мерой Хаара.*

*Доказательство.* Доказательство сводится к непосредственной проверке того, что распределение матрицы  $\hat{A}$  инвариантно по отношению к преобразо-

ваниям вида  $\hat{Q}\hat{A}\hat{Q}^T$ , где  $\hat{Q}$  – ортогональная матрица. Отсюда уже нетрудно вывести, что мерой на двумерной сфере со склеенными диаметрально противоположными точками, инвариантной по отношению к действию матриц  $\exp \hat{A}$ , будет мера Хаара.  $\square$

Наличие подобной симметрии распределения по отношению к вращениям формирует один из тех исключительных случаев, когда инвариантную меру удастся выписать явно.

Показатель Ляпунова может быть вычислен как математическое ожидание

$$\lambda = \frac{1}{2\tau} \mathbb{E} \log \|\mathbf{w} \exp \hat{A}\tau\|, \quad (3.37)$$

где вектор  $\mathbf{w} = (x, y, z)$  распределен согласно инвариантной мере на двумерной сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками, а  $\tau$  – время обновления (которое есть удвоенное время памяти).

Вычисление математического ожидания (3.37) представляет собой задачу, которую следует изучать отдельно. С физической точки зрения более актуальным является вопрос о том, насколько оправдано предположение о гауссовском распределении для матриц  $\hat{A}$  в лагранжевом подходе. Наиболее естественным здесь представляется путь, использующий разложение матричной экспоненты в правой части (3.37) в ряд по степеням малого параметра  $\tau$ . Ограничившись степенью  $\tau^2$ , будем иметь

$$\lambda = \frac{1}{2\tau} \mathbb{E} \log \|\mathbf{w}(\hat{I} + \hat{A}\tau + \frac{1}{2}\hat{A}^2\tau^2)\|, \quad (3.38)$$

где  $\hat{I}$  обозначает единичную матрицу.

Как уже было отмечено, наличие вращательной симметрии для распределения  $\hat{A}$  позволяет выписать явное выражение для скоростей роста старших моментов с произвольным номером  $p$ :

$$\lambda_p = \frac{1}{2p\tau} \log(\mathbb{E}\|\mathbf{w} \exp \hat{A}\tau\|^p), \quad (3.39)$$

или, ограничившись первыми членами ряда:

$$\lambda_p = \frac{1}{2p\tau} \log(\mathbb{E} \|\mathbf{w}(\hat{I} + \hat{A}\tau + \frac{1}{2}\hat{A}^2\tau^2)\|^p). \quad (3.40)$$

Отметим лишь, что в общем случае соотношение (3.39) не выполняется и формулу для скоростей роста старших моментов не удастся вывести из тех же соображений, что используются при вычислении показателя Ляпунова.

Дальнейшее вычисление  $\lambda_p$  требует лишь аккуратного приведения слагаемых. Пусть  $\|\mathbf{w}(\hat{I} + \hat{A}\tau + \hat{A}^2\tau^2/2)\|^2 = 1 + \alpha\tau + \beta\tau^2$ , где мы вновь ограничиваемся точностью  $\tau^2$ ,  $\alpha$  состоит из различных линейных комбинаций элементов матрицы  $\hat{A}$ ,  $\beta$  составлено из попарных произведений элементов той же матрицы, а 1 возникает из условия  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Приведем явное выражения для  $\alpha$ :

$$\alpha = 2(A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{21}xy + A_{13}xz + A_{31}xz + \quad (3.41)$$

$$+ A_{22}y^2 + A_{23}yz + A_{32}yz + A_{33}z^2)$$

и опустим более длинное представление для  $\beta$ . Теперь можно сформулировать и доказать теорему о явном виде показателя Ляпунова и старших моментов:

**Теорема 2.** *В однородном изотропном полу скоростей с корреляционной функцией вида (3.35) и при отсутствии магнитной диффузии показатель Ляпунова определяется выражением*

$$\lambda = \frac{3}{10} \frac{v}{l}, \quad (3.42)$$

*а моменты старшего порядка выражением*

$$\lambda_p = \frac{(3+p)v}{10} \frac{1}{l}. \quad (3.43)$$

*Доказательство.* В самом деле, прямой подсчет с использованием известных ковариаций (3.36) даст  $\mathbb{E}\alpha^2 = 8v^2/5l^2$  (в то время как  $\mathbb{E}\alpha = 0$ ) и  $\mathbb{E}\beta = 2v^2/l^2$ . Интегрирование по мере Хаара не представляет затруднений, поэтому мы сразу получаем

$$\lambda = \frac{1}{4\tau} \mathbb{E} \log(1 + \alpha\tau + \beta\tau^2) = \frac{1}{4\tau} \mathbb{E}(\alpha\tau + \beta\tau^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\tau^2) = \frac{3}{10} \frac{v}{l}. \quad (3.44)$$

И аналогичным образом

$$\lambda_p = \frac{1}{2p\tau} \log \mathbb{E}(1 + \alpha\tau + \beta\tau^2)^{p/2} = \frac{1}{2p\tau} \log(1 + (3p + p^2)\tau^2) = \frac{(3 + p)v}{10} \frac{v}{l}. \quad (3.45)$$

□

Мы видим, что моменты растут прогрессивным образом с увеличением порядка  $p$ , что характерно для явления перемежаемости. Заметим также, что (3.45) дает ту же оценку  $\lambda$ , что и (3.44), если положить  $p = 0$ .

Отдельно отметим полученную оценку для второго момента:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{v}{l}, \quad (3.46)$$

которая оказывается немного меньше, чем выражение  $3v/4l$ , которое получается при выводе уравнения Казанцева для короткокоррелированного приближения [92]. На наш взгляд, такое расхождение может быть следствием различия евклидова и лагранжева подхода, в рамках которых выводится уравнение Казанцева и записывается уравнение (2.3). Однако этот вопрос требует дальнейшего прояснения.

Зная все моменты случайной величины  $\xi = \|\mathbf{w}\hat{A}\|$ , можно восстановить ее характеристическую функцию:

$$\chi_\xi(t) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(it)^p}{p!} \mathbb{E}\xi^p. \quad (3.47)$$

Из (3.45) следует, что  $\mathbb{E}\xi^p = 1 + (3 + p)p\tau^2/5$  с точностью до членов порядка  $\tau^2$ . Подставляя это в (3.47), получим:

$$\chi_\xi(t) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(it)^p}{p!} (1 + (p^2 + 3p)\tilde{\tau}^2) = e^{it} (1 + 4i\tilde{\tau}^2 t - \tilde{\tau}^2 t^2), \quad (3.48)$$

где мы обозначили  $\tilde{\tau} = \tau/\sqrt{5}$ . Полученная характеристическая функция не совпадает с характеристической функцией ни нормального, ни логнормального распределения. Обратное преобразование Фурье функции  $\chi_\xi(t)$  также дает плотность распределения весьма непривычного вида, составленную из дельта-функции и ее производных:

$$\rho_\xi(x) = \delta(1-x) - 4\tilde{\tau}^2\delta'(1-x) + \tilde{\tau}^2\delta''(1-x). \quad (3.49)$$

Вычисляя показатель Ляпунова  $\lambda = \mathbb{E} \log \xi / 2\tau$  согласно найденному распределению, получаем:

$$\frac{1}{2\tau} \mathbb{E} \log \xi = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \log(x) \rho_\xi(x) dx = \frac{3\tilde{\tau}^2}{2\tau} = \frac{3\tau}{10}, \quad (3.50)$$

что ожидаемо совпадает с оценкой (3.44).

Приведенные здесь выкладки показывают, что в условиях короткокоррелированного приближения удастся не просто оценивать статистические моменты поля, но и восстанавливать более сложные объекты, такие как характеристические функции и плотности распределения. В свою очередь это выявляет дополнительный потенциал предложенного подхода и дает более полное представление о поведении решений на малых временах корреляции. Конечно, применимость данного уравнения весьма ограничена, и поведение реальных физических систем оказывается значительно многообразнее. По этой причине, наряду с аналитическим подходом, изучение статистики по наблюдательным данным представляет собой сравнимый интерес. Этому вопросу будет посвящен следующий раздел диссертации.

## Глава 4

# Магнитное поле в цикле солнечной активности

### 1 Солнечный цикл в свете наблюдательных данных

В данном разделе будет изучен вопрос о том, в какой степени может быть получена количественная информация о параметрах работы механизма солнечного динамо на основе наблюдательных данных. Ввиду того, что основным объектом изучения динамо-теории является феномен солнечной цикличности, представляется разумным начать с прояснения самого понятия цикла активности и его возможной формализации. Это означает выработку некоего алгоритма, который бы в процессе своей работы обучался находить характерные структуры в массиве данных и замерять параметры этих структур. Предлагаемый далее подход основывается на результатах, полученных автором в работах [60] и [17].

Наиболее ярким проявлением солнечной цикличности служат квазипериодические колебания числа солнечных пятен и ряда близких индексов, построенных на их основе. Примерами таких индексов являются ряд чисел Вольфа [91] и групповой индекс, предложенный в работе [59]. Однако нужно отметить, что на сегодняшний день нет единого представления о том, как замерять индекс солнечной активности, и высказываются различные точки зрения. Наибольшее разногласие вызывает вопрос о том, как следует учитывать



индивидуальные особенности, свойственные различным сериям наблюдений. Периодически возникают попытки ревизии как отдельных коэффициентов, так и методики в целом (см., напр., обзор [58] или [47]). Дискуссионным является и вопрос о наличии «пропущенного» цикла в конце 18 века ([90], [95], [38]). Подобные неопределенности, безусловно, негативно влияют на возможности построения прогнозов солнечной активности и на ее количественную оценку в историческом периоде. В связи с этим большое внимание уделяется работам, в которых предпринимаются попытки решить данные вопросы единым алгоритмическим путем.

Конечно, в рамках одной диссертации мы не можем охватить все методологические особенности наблюдения и обработки солнечных данных, поэтому будем ориентироваться только на часть из них, представленную координатами и временем наблюдения солнечных пятен. При таком выборе мы теряем значительную часть информации, доступную по современным данным, например, направление магнитного поля в пятне или структурные особенности формы пятна ([21]), однако получаем возможность включать в анализ данные из архивных источников.

Распределение пятен удобно изучать с помощью широтно-временных (баттерфляй) диаграмм, на которые наносятся широта и время появления групп солнечных пятен. Метод впервые был предложен Маундером в 1904 году, он же впервые подметил особые структуры, которые выделялись на построенной картинке. Эти структуры, из-за характерной формы получившие название «бабочек Маундера», представляют собой единый 11-летний цикл активности, а два крыла составляют волны противоположной полярности, распространяющиеся от средних широт к экватору. Кажется естественным поставить задачу о подтверждении этого зрительного восприятия алгоритмическими методами, не апеллирующими непосредственно к полярности пятен. Данное условие важно для анализа исторических баттерфляй-диаграмм, когда полярность пятен была неизвестна.

Суть предлагаемого метода состоит в последовательном применении двух известных алгоритмов кластерного анализа, при этом результаты работы первого алгоритма являются одновременно входными параметрами для второго. Это позволяет на первом шаге использовать методы, не требующие указания конкретного числа кластеров, их формы или расположения, и вводить

эти параметры только на втором шаге процедуры, повышая тем самым качество разделения на кластеры. Отметим, что сама идея применения методов кластерного анализа использовалась ранее в работе [75], в которой изучался более частный вопрос о распределении групп солнечных пятен внутри одного солнечного цикла.

На роль процедуры, осуществляющей первоначальное разделение на кластеры, хорошо подходят методы, основанные на поиске областей повышенной плотности. Мы используем популярную реализацию, получившую название Density-based spatial clustering of applications with noise (DBSCAN, [53]), которая объединяет две точки в один кластер, если они могут быть соединены последовательностью кружков заданного радиуса, в каждом из которых содержится достаточное число точек. Данный метод намечает формы о положения будущих кластеров, но при этом значительное число точек остается вне кластеров. Последующее применение другого популярного алгоритма, *C*-means, позволяет отнести подавляющее большинство оставшихся точек к одному из кластеров путем минимизации некоторой целевой функции, составленной из сумм внутрикластерных расстояний. Это позволяет распределить оставшиеся точки по кластерам, за исключением тех, которые лежат на сравнимых расстояниях до двух ближайших кластеров.

На примере современных и исторических данных мы проверяем, насколько устойчиво работает предложенная процедура и в какой мере выделенные структуры на баттерфляй-диаграмме согласуются со зрительным впечатлением от диаграммы.

## 2 Данные о пятенной активности

Современные данные о наблюдении солнечных пятен за период 1874–2010 гг. (циклы 14–22) представлены в открытом доступе в совместном каталоге<sup>1</sup> Гринвеческой обсерватории, службы US Air Force (USAF) и US National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA). Исторические данные о пятнах в циклах 1–4 основываются на каталоге немецкого астронома-наблюдателя Й. Штаудахера, сделавшего порядка тысячи зарисовок диска Солнца в период 1749–1797 гг. В результате многолетней работы, проделан-

---

<sup>1</sup><http://solarscience.msfc.nasa.gov/greenwch.shtml>

ной Р. Арльтом, каталог был оцифрован и восстановлены координаты пятен [37].

Современные данные позволяют использовать в качестве координат время и широту отдельных пятен и групп пятен, начиная от момента их первого наблюдения. Исторические данные гораздо менее информативны и пятна не разделены по группам. Поэтому для этой части выборки мы использовали координаты всех доступных наблюдений. В качестве дополнительной меры контроля устойчивости метода, мы применили тот же подход к современным данным, включив положения всех пятен, и убедились, что это не приводит к каким-либо значимым изменениям.

### 3 Методы кластерного анализа

Следуя целям нашего исследования, мы должны ассоциировать циклы с областями повышенной плотности пятен на баттерфляй-диаграмме. Мы не делаем заранее предположений о форме этих областей, поскольку результатом работы алгоритма должно стать разделение не только циклов, но и отдельных волн активности.

На предварительном шаге нужно привести координаты, широту и время, к одной размерности и задать метрику, в соответствии с которой будут измеряться расстояния и площади областей на баттерфляй-диаграмме. В качестве безразмерных величин разумно взять типичную продолжительность цикла (11 лет) и максимальную широту, на которых формируются пятна (порядка  $40^\circ$ ).

Выделение кластеров будем проводить в два этапа. На первом шаге с помощью алгоритма DBSCAN выделим области повышенной плотности пятен и положим их за основу будущих кластеров. Второй шаг будет состоять в уточнении результатов и отнесении оставшихся точек к наиболее подходящим кластерам с помощью алгоритма *C*-means.

#### 3.1 Алгоритм DBSCAN

Идею работы алгоритма DBSCAN можно описать следующим образом: две точки на баттерфляй-диаграмме принадлежат к одному кластеру, если их

можно соединить последовательностью кружков заданного радиуса  $r$  и содержащих не менее  $m$  точек. Под точками понимаются группы пятен из каталога современных наблюдений и отдельные пятна для исторических данных.

Опишем более детально процедуру работы алгоритма. Пусть  $B_r(p)$  обозначает кружок с центром в точке  $p$  и радиуса  $r$ . Точка  $q$ , лежащая внутри круга  $B_r(p)$ , называется *соседней* для точки  $p$ , если в круге  $B_r(p)$  содержится не менее  $m$  точек. Точка  $q$  называется *достижимой* из точки  $p$ , если существует последовательность точек  $p_1 = p, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n = q$ , таких, что каждая последующая является соседней для предыдущей. Две точки  $p$  и  $q$  называются *связанными*, если обе являются достижимыми из некоторой точки  $w$ . *Кластер* представляет собой набор связанных точек, в который входят все точки, достижимые из некоторой точки, принадлежащей кластеру. Корректность этого определение и единственность разбиения множества на кластеры доказывается в той же работе [53]. Точки, не вошедшие ни в один кластер, называются *шумом*. Важная особенность метода состоит в том, что он позволяет выделять кластера достаточно произвольной формы.

Выбор параметров  $r$  и  $m$  влияет на результат следующим образом. Уменьшая  $r$  (при постоянном  $m$ ) мы воспроизводим больше деталей в форме кластера, но если  $r$  слишком мало, то кластеры начнут распадаться на более мелкие подмножества и увеличиваться доля шума. Увеличивая  $r$  мы, напротив, снижаем количество не отнесенных к кластерам точек (шум), но теряем информацию о форме кластеров. При этом возникает вероятность, что некоторые кластеры будут сливаться в один больший. В частности, могут перекрываться отдельные волны активности в северном и южном полушарии.

Увеличивая параметр  $m$  (при постоянном  $r$ ), мы увеличиваем минимальную плотность точек внутри кластера. Это уменьшает его размер и увеличивает долю шума, возможно разделение кластера на отдельные фрагменты. Варьируя параметры  $m$  и  $r$  вместе, можно тем самым добиться совпадение формы кластеров с визуальным впечатлением.

Алгоритм DBSCAN может использоваться в разнообразных задачах, где форма кластера не предписана заранее. При этом зачастую оптимальные значения  $r$  и  $m$  заранее бывают неизвестны. Для их определения в работе [53] предлагается использовать некую функцию, основанную на измерении расстояний между точками. На основе данных 22 цикла рекомендованные

значения параметров составили  $r = 0.03$  и  $m = 4$ . При этих значениях действительно происходит разделение соседних циклов, однако плотности точек оказывается недостаточно для разделение волн активности в северном и южном полушариях.

Выбор  $r$  и  $m$  мы основываем, исходя из типичной формы наблюдаемых волн активности. Мы предполагаем, что диаметр кружка должен составлять порядка 0.1 от размеров области, т.е. около 1.1 года по времени и  $4^\circ$  по широте, а число точек порядка 1% от общего числа групп в области, т.е. около 40. Затем эти параметры немного варьировались вблизи этих оценочных значений, чтобы добиться разделения циклов и волн активности и их согласования с визуальным восприятием картинки. Заметим, что предварительная оценка  $r$  и  $m$  ( $r = 0.05$  и  $m = 40$ ) приблизительно соответствует средней плотности групп пятен в пределах цикла, тем самым их выбор является достаточно естественным.

В результате перебора различных вариантов наиболее оптимальными оказались чуть большие значения параметров, а именно  $r = 0.07$  и  $m = 80$ , при этом, однако, плотность внутри кружка осталась на прежнем уровне. Меньшие значения  $r$  и  $m$  приводят к избыточному фрагментированию групп.

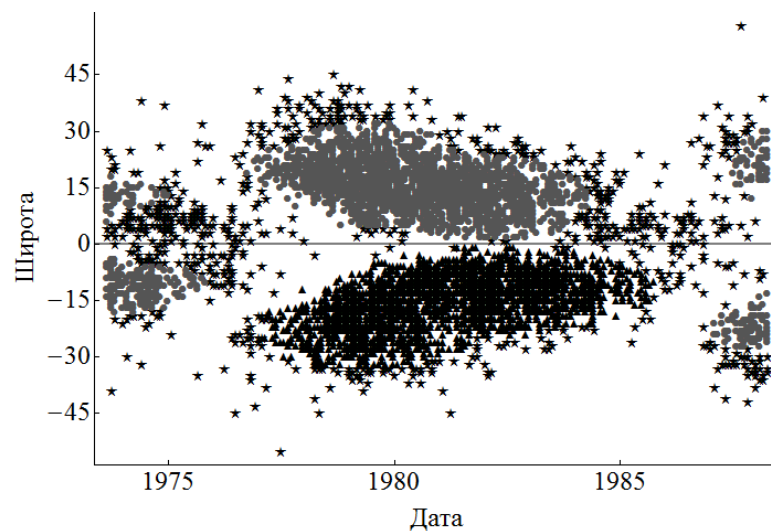


Рисунок 4.1. Кластеры, полученные применением алгоритма DBSCAN для цикла 21 ( $r = 0.07$ ,  $m = 80$ ). Серыми кружками и черными треугольниками выделены точки из различных кластеров, звездочками отмечены точки, отнесенные к шуму.

Рис. 4.1 в целом соответствует зрительному восприятию волн активности в северном и южном полушарии. Число точек, не отнесенных ни к одной из

групп, относительно невелико и составляет около 5% от общего числа точек.

Мы проверили, как влияет на качество разделения вариации параметров  $r$  или  $m$ . В частности, увеличение  $r$  до значения  $r = 0.12$  при постоянном  $m$  не позволяет разделить северную и южную волны активности (рис. 4.2). С другой стороны, увеличение  $m$  при данном  $r$  до  $m = 160$  уменьшает размеры кластеров и оставляет много точек со значением шума, что не согласуется с визуальным восприятием (рис. 4.3).

Указанные значения параметров, как мы убедились, позволяют успешно работать с циклами современного периода (циклы 14–22) и выделять как сами циклы, так и отдельные волны активности.

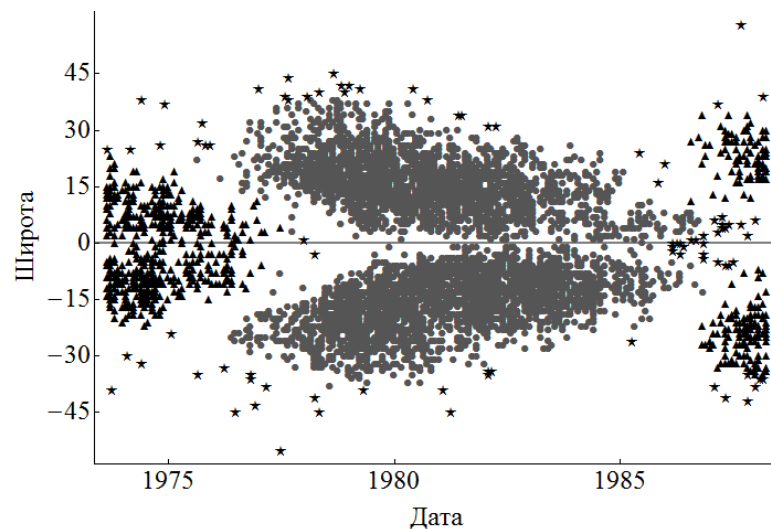


Рисунок 4.2. При больших значениях параметра  $r$  ( $r = 0.12$ ,  $m = 80$ ) алгоритм DBSCAN перестает различать две волны активности в цикле 21. Цветовая нотация повторяет предыдущий рисунок.

В то же время получаемый результат применения алгоритма DBSCAN еще нуждается в улучшении. Было бы желательно отнести красные точки, окружающие каждый кластер, к самим кластерам насколько это возможно. Это делается на следующем шаге.

### 3.2 Алгоритм кластеризации $C$ -means

Для улучшения результатов работы алгоритма DBSCAN на современных данных и разделения по кластерам возможно большего числа точек, мы применяем другой популярный метод, называемый методом  $C$ -means [41].

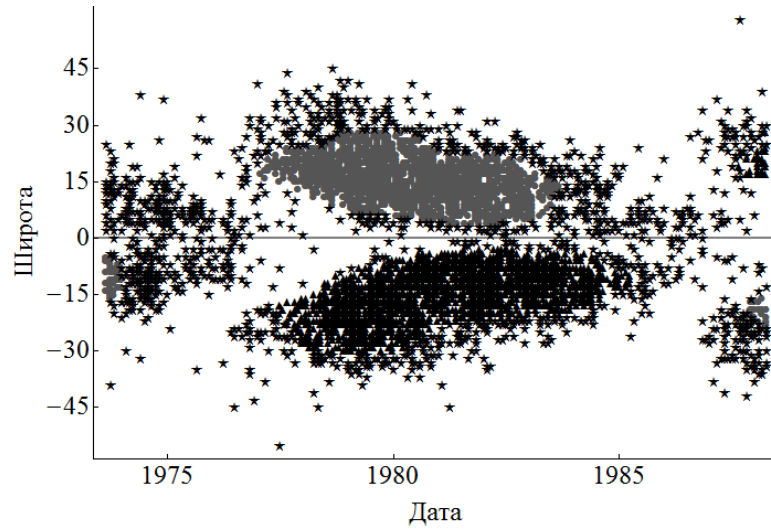


Рисунок 4.3. При больших значениях параметра  $m$  ( $r = 0.07$ ,  $m = 160$ ) существенно возрастает доля точек, не отнесенных алгоритмом DBSCAN ни к одному из кластеров.

Алгоритм  $C$ -means разработан для выделения кластеров эллиптической формы (что актуально для видимых волн активности на баттерфляй-диаграммах), при условии, что заранее задано число кластеров и их предположительные центры. В условиях нашей задачи эти данные формируются как результат работы метода DBSCAN, а центры кластеров определяются как центры масс уже имеющихся кластеров.

Идея метода  $C$ -means состоит в следующем. Предполагается, что кластеры, выделенные методом DBSCAN, есть выборка из некоторого двумерного гауссовского распределения. Координаты точек в кластере выступают в роли независимой выборки из соответствующего распределения. Двумерное гауссовское распределение задается вектором средних  $\mu_i^c$  и ковариационной матрицей  $a_{ij}^c$  ( $i, j = 1, 2$ , индекс  $c$  отвечает номеру кластера). Эти параметры легко получить как соответствующие выборочные характеристики. Напомним, что при этом на диагонали ковариационной матрицы окажутся выборочные дисперсии обеих координат.

Ковариационная матрица задает новую метрику, в которой расстояние между произвольной точкой  $x^p$  и центром кластера  $\mu^c$  выражается по формуле:

$$r(x^p, \mu^c) = a_{ij}^{-1}(x_i^p - \mu_i^c)(x_j^p - \mu_j^c), \quad (4.1)$$

где  $a_{ij}^{-1}$  – элементы обратной матрицы для матрицы  $a_{ij}$  и по повторяющимся

индексам предполагается суммирование.

Шаг алгоритма состоит в перераспределении точек между кластерами (при сохранении общего числа кластеров и текущих параметров распределений) так, чтобы минимизировать функцию

$$S = \sum \sum r(x^h, \mu^k), \quad (4.2)$$

где первое суммирование идет по номерам кластеров ( $k = 1 \dots K$ ), а второе по всем точкам, отнесенным к  $k$ -му кластеру.

В соответствии с новым распределением точек по кластерам пересчитываются значения вектора средних  $\mu_i^c$  и элементы ковариационной матрицы  $a_{ij}^c$ , после чего заново повторяется предыдущий шаг. Итерации происходят до тех пор, пока параметры распределений кластеров (центры  $\mu_i^c$  и матрица  $a_{ij}^c$ ) не перестанут значимо изменяться. Обычно на это уходит порядка 10–15 итераций.

В процессе перераспределения точек по кластерам мы учитываем, что некоторые точки могут быть далеко от всех кластеров и их следует относить к шуму. Более точно, мы относим к кластеру с номером  $c$  только те точки  $x^p$ , для которых

$$r(x^p, \mu^c) < u, \quad (4.3)$$

где  $u$  выражает количество стандартных отклонений, на котором точка еще может быть отнесена к данному кластеру. Если точка оказывается приблизительно одинаково удалена от нескольких кластеров, мы пользуемся взвешенной величиной  $r(x^p, \mu^c) \sum_k r(x^p, \mu^k)^{-1}$ . Количество точек, относимых к шуму, уменьшается при увеличении  $u$ . Оптимальное соотношение для современных данным достигается при  $u = 2.5$ , в этом случае уровень шума составляет порядка 2%. Примерно такой же оказывается оценка числа групп-нарушителей правила полярности Хейла [35].

Кластеры, выделенные алгоритмом  $C$ -means для циклов 21 и 22 представлены на рис. 4.4 и 4.5. Эти рисунки показывают, что, с одной стороны, почти все точки оказались распределенными по кластерам: один из кластеров располагается почти полностью в северном полушарии, другой – в южном в соответствии с распространением волн активности. С другой стороны, алгоритм оставил некоторое число точек на концах циклов не отнесенными ни к



одной группе, что может быть следствием наложения встречных волн активности.

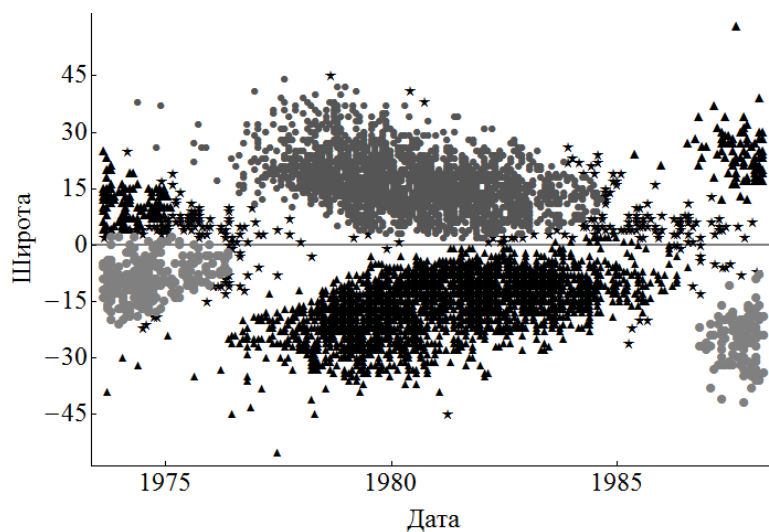


Рисунок 4.4. Кластеры, выделенные алгоритмом  $C$ -means в цикле 21.

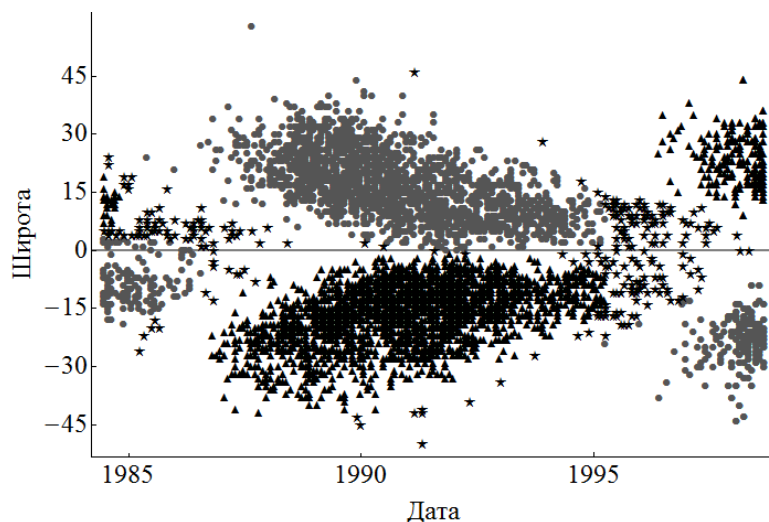


Рисунок 4.5. Результат разделения на кластеры методом  $C$ -means в 22 цикле.

В работе [17] представлены результаты работы алгоритма на большом промежутке времени, начиная с 1879 года (циклы 14–22).

### 3.3 Устойчивость разделения на кластеры

Предполагая использовать алгоритмы кластеризации для работы с архивными данными, необходимо проверить, что результат разделения на кластеры устойчив к определенным модификациям в данных.

Прежде всего, на рис. 4.6 показано, что мы получаем близкие результаты, если в качестве точек рассматриваем не группы пятен, а отдельные пятна. Два набора точек формируют кластеры схожих форм, за исключением некоторых деталей, преимущественно на границах кластеров.

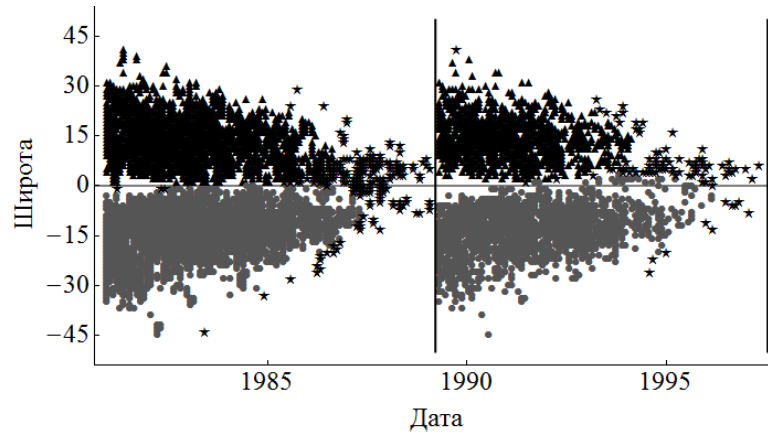


Рисунок 4.6. Сопоставление результатов выделения кластеров в 21 цикле на основе положений отдельных пятен (слева) и моментов первого наблюдения групп пятен (справа).

Во-вторых, мы проверяем, насколько устойчив метод к потере значительной части информации, что актуально в контексте исторических данных. Мы исключили случайным образом две трети точек из набора, отвечающего циклу 21, и применили к оставшимся процедуру кластеризации. Как следует из рис. 4.7, форма кластеров и положения точек, отнесенных к шуму, поменялись незначительно.

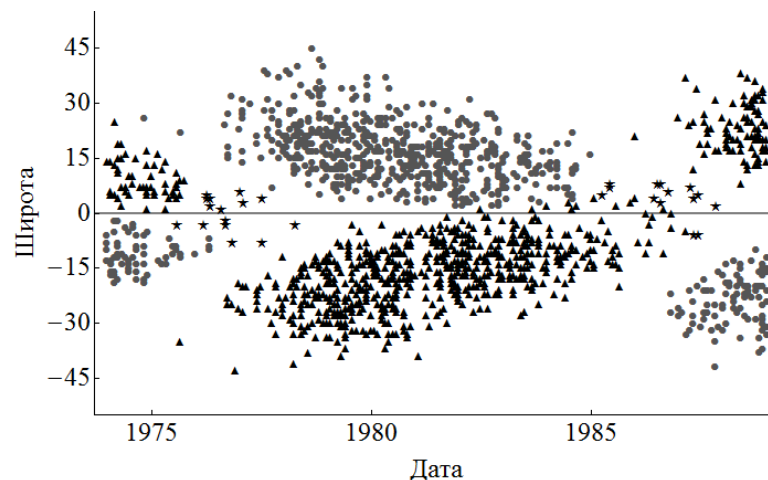


Рисунок 4.7. Кластеры, выделенные в 21 цикле после удаления случайным образом двух третей точек.

Конечно, *C-means* является не единственным алгоритмом, пригодным для решения нашей задачи. Другим, не менее популярным подходом, служит так называемый EM-алгоритм [35]. На рис. 4.7 мы видим, что после определенного согласования параметров между двумя алгоритмами удается добиться близких результатов.

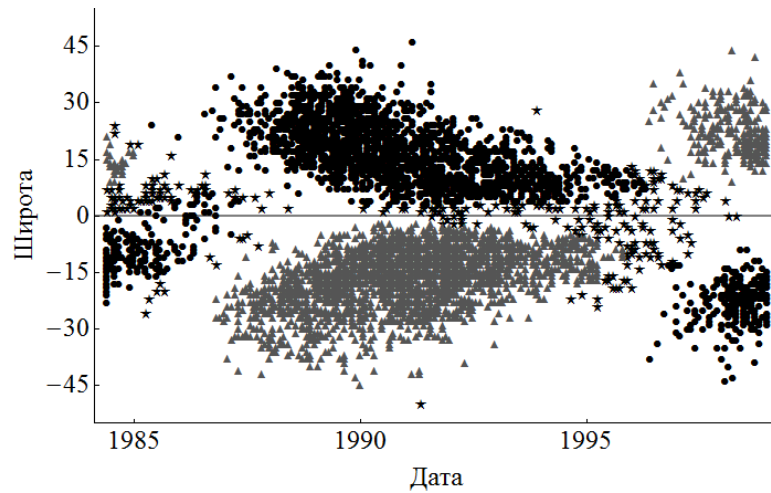


Рисунок 4.8. Результат применения EM-алгоритма к циклу 22. Звездочками обозначены точки, для которых вероятность принадлежать какому-либо циклу меньше 85%.

## 4 Приложения методов кластерного анализа

Естественным развитием идей кластеризации дискретного набора точек служит адаптация данных методов для выделения структур на изображениях. Подобная задача возникает, например, при определении границ солнечных пятен на изображениях диска Солнца или выделении активных областей на магнитограммах. В работе [17] автором диссертации было предложено обобщение некоторых алгоритмов кластерного анализа для работы с непрерывным трассером. Этот подход мы рассмотрим на примере сглаженной баттерфляй-диаграммы, которая строится следующим образом. Исходная баттерфляй-диаграмма, составленная из отдельных точек, соответствующих наблюдениям пятен в 21 цикле, разбивается на пиксели шириной 1 месяц по оси времени и 1 градус по широте. Каждый пиксель закрашивается в определенный цвет (отенок серого), соответствующий числу попавших в него точек: белый соответствует нулевой плотности, последующие градации

серого обозначают области с плотностью до 5 точек, от 5 до 70 точек, от 70 до 140 и более 140 точек на пиксель. Полученное изображение дополнительно сглаживается гауссовским фильтром с параметром интенсивности  $\sigma = 1$  и радиусом  $r = 3\sigma$  (единицей измерения служит пиксель) для получения непрерывного изображения (рис. 4.9, левая панель).

Небольшая модификация алгоритма DBSCAN позволяет воспользоваться им и в этом случае (рис. 4.9, правая панель). А именно, мы считаем, что два пикселя принадлежат одному кластеру, если их можно соединить последовательностью кружков данного радиуса  $r$ , каждый из которых лежит в области, в которой каждый пиксель имеет яркость, не меньшую  $m$ . Варьируя эти параметры, мы убедились, что при  $r = 0.08$  и  $m = 5$  алгоритм дает кластеры, соответствующие зрительному впечатлению от распределения яркости.

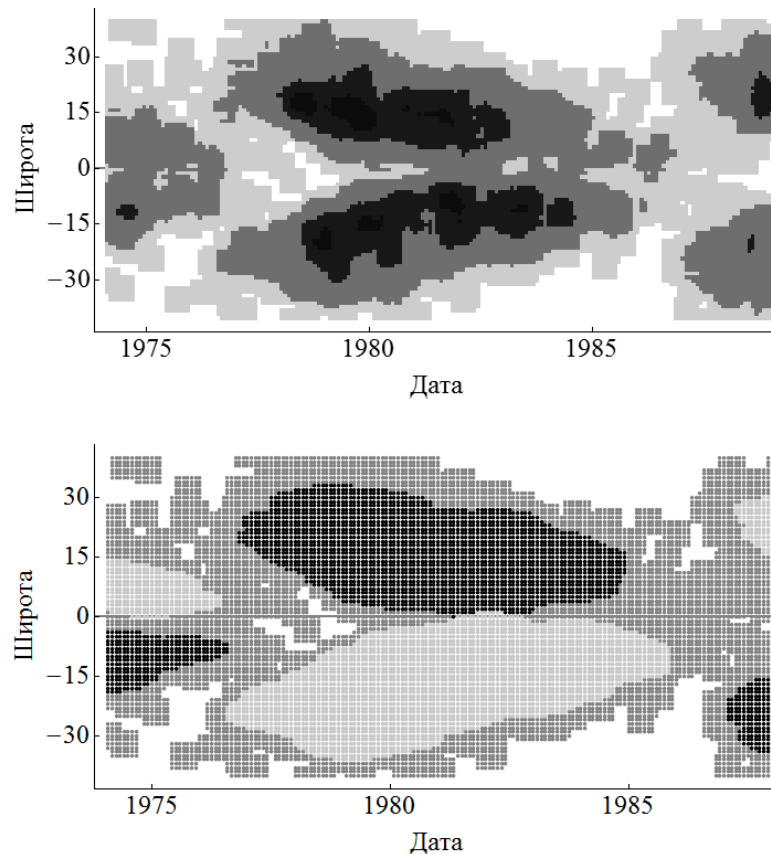


Рисунок 4.9. Алгоритм DBSCAN выделяет крылья бабочек-диаграммы для цикла 21: сверху – диаграмма, сглаженная гауссовским фильтром, снизу – кластеры, выделенные алгоритмом.

Сформированные кластеры позволяют не только отвечать на вопрос о принадлежности того или иного пятна к определенному циклу, но и вычислять метрики, характеризующие группу (цикл) в целом. Это особенно важно

Цикл	Северное полушарие	Южное полушарие
12	3.6	5.4
13	4.4	6.5
14	6.3	7.6
15	4.9	4.5
16	4.7	3.5
17	5.6	4.2
18	4.2	4.3
19	3.3	2.3
20	5.7	6.0
21	3.8	3.4
22	4.7	4.0

Таблица 4.1. Скорость миграции волны активности в  $^{\circ}$  год $^{-1}$  ветвей баттерфляй-диаграмм.

в контексте получения количественной информации об интенсивности цикла. В нашем случае алгоритм *C-means* на одном из своих этапов аппроксимирует получаемый кластер эллипсом, что дает возможность вычислить по наклону этого эллипса скорость распространения волны активности. Мы приводим соответствующие результаты для циклов (табл. 4.1).

## 5 Архивные данные

Ежедневные инструментальные наблюдения солнечных пятен показывают относительно регулярное распределение пятен на баттерфляй-диаграмме и устойчивую структуру циклов на протяжении всего 20 века. В тоже время приходит все больше свидетельств о том, что эта картина могла претерпевать серьезные изменения в прошлом. Основой для таких предположений являются как архивные записи наблюдений солнечных пятен, так и данные о температурных и климатических катаклизмах, описанные очевидцами. Наиболее примечательные явления нашли отражение даже в художественной литературе и искусстве [33].

В рамках теории динамо присутствие аномалий в характере пятнообразовательной деятельности Солнца представляет большой интерес, поскольку они служат указанием на наличие особых режимов работы солнечного

динамо. Большие надежды возлагаются на то, что своевременное обнаружение переходных состояний между различными режимами может помочь при прогнозировании развития неблагоприятных событий в структуре солнечно-земных связей.

С учетом возможностей наблюдателей в 18 и 19 веках, наиболее показательными являются данные по количеству пятен и структуре циклов. Ввиду того, что часть данных до сих пор остается в неоцифрованном виде, а имеющиеся не всегда являются полными и содержат значительное число неточностей, их интерпретация оказывается далеко не однозначной, подчас субъективной. Отсюда представляет интерес применить алгоритмические процедуры анализа и посмотреть, в какой степени они могут помочь выбрать ту или иную точку зрения.

В качестве материала для изучения мы используем данные о наблюдении солнечной активности в 18 веке из каталога Штаудахера. В этой книге содержится порядка тысячи зарисовок диска Солнца и текстовых комментариев за почти полувековой период с 1749 по 1799 год. Недавно завершилась большая работа по оцифровке этих рисунков и измерению гелиографических координат пятен (см. [37] и [38]). Отличие этих данных от современных состоит в том, что по ним недоступна информация о знаке полярности пятен и нет возможности применить правило полярности Хейла для разделения циклов.

Небольшая плотность точек, характерная для ранних наблюдений Солнца, требует определенных корректировок параметров алгоритма DBSCAN. Путем подстановки различных вариантов мы пришли к выводу, что для цикла номер 2 следует использовать значения  $r = 0.2$  и  $m = 200$ , а для циклов 3 и 4 лучше подходят  $r = 0.18$  и  $m = 100$ . Плотность точек в кружке при этом оказывается в 3 раза выше средней плотности точек на диаграмме. Такой выбор параметров позволил разделить северную и южную волну активности в указанных циклах (рис. 4.10). При этом нам не удалось найти такие значения параметров, при которых разделяется цикл номер 1. Мы склонны рассматривать цикл 1 как единый кластер. Соответствующие значения  $r = 0.18$  и  $m = 100$  отвечают такой интерпретации. Отметим, что с точки зрения динамо-теории подобная необычная структура цикла может свидетельствовать о конфигурации поля квадрупольного типа, в отличие от регулярной дипольной [79].

Следуя введенной процедуре, мы уточняем результаты работы DBSCAN, применяя метод *C*-means. На рис. 4.11 и 4.12 представлен окончательный вариант расположения кластеров.

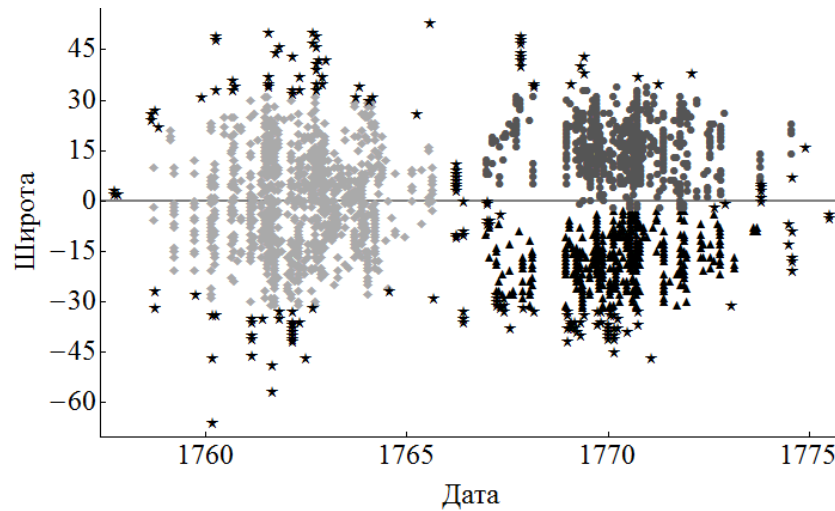


Рисунок 4.10. Кластеры, выделенные алгоритмом DBSCAN для циклов номер 1 и 2. Серыми кружками и черными треугольниками показаны кластеры, которые интерпретируются как волны активности в цикле 2. Цикл 1 представляет собой единый кластер и показан светло-серым цветом. Точки в форме звездочек относятся алгоритмом DBSCAN к шуму.

Сформулируем промежуточный итог данной главы. Прежде всего, удалось показать, что методы кластерного анализа применимы к задаче разделения волн и циклов активности и выдают устойчивый результат на всем массиве современных данных. Результат разделения согласуется со зрительным восприятием баттерфляй-диаграммы и ожидаем с точки зрения динамотеории. Полученные границы могут быть использованы для оценки интенсивности циклов и скорости миграции пятен внутри цикла, конкретные значения приведены в табл. 4.1. Небольшая модификация алгоритмов позволяет использовать их не только для работы с набором дискретных точек (пятен), но и для обработки сглаженных изображений. Методика выделения структур на баттерфляй-диаграммах не требует знания о полярности пятен, что позволяет применять ее для анализа архивных наблюдений. Показано, что циклы 2–4 удастся разделить между собой и выделить волны активности в северном и южном полушарии, в то время как цикл 1 представляет собой единый кластер. Это результат может свидетельствовать об особой конфигурации крупномасштабного магнитного поля Солнца в середине 18 века.

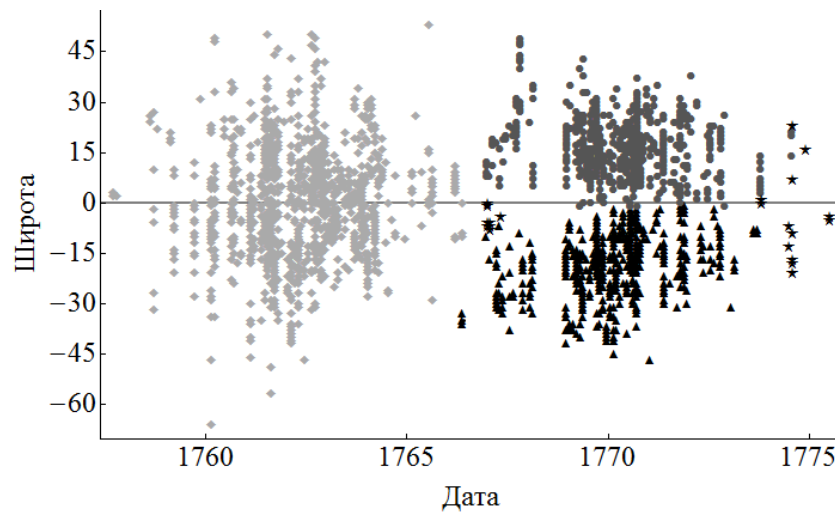


Рисунок 4.11. Уточнение границ кластеров для циклов 1 и 2 с помощью алгоритма *C-means*. Обозначения соответствуют предыдущему рисунку.

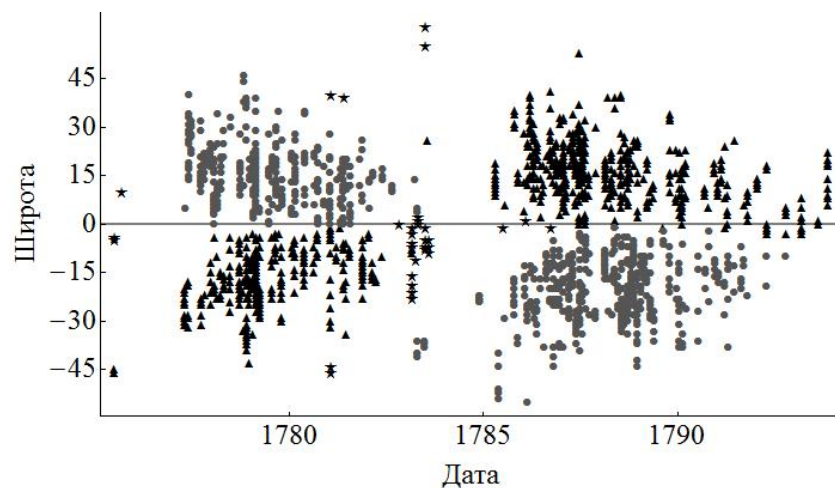


Рисунок 4.12. Результат разделения на кластеры для циклов 3 и 4. Серыми кружками и черными треугольниками показаны кластеры, которые интерпретируются как волны активности. Точки в форме звездочек не приписаны ни к одному из кластеров.



Образование структур на солнечных баттерфляй диаграммах традиционно связывают с деятельностью тороидальной компоненты магнитного поля. Далее встает естественный вопрос о том, в какой степени из наблюдательных данных может быть получена количественная информация о генерации второй компоненты – полоидального поля. Этому будет посвящен следующий раздел диссертации.

## Глава 5

# Генерация магнитного поля в цикле солнечной активности

### 1 Теория динамо и альфа-эффект

В данном разделе будет рассмотрена статистика распределения тилт-угла биполярных областей на Солнце и ее связь с теорией динамо. Основные результаты были получены автором в работах [86] и [61], их изложению мы предпошлим краткое введение в суть вопроса.

Согласно распространенной точке зрения, солнечная магнитная активность, проявляющая себя, например, в квазипериодических вариациях числа солнечных пятен, возбуждается распространяющимися динамо-волнами, источник которых находится внутри Солнца. Дифференциальное вращение, которое закручивает линии полоидального поля, является одним из двигателей этого процесса. В то же время одного этого механизма еще недостаточно для поддержания работы динамо. Требуется обратный способ генерации полоидального поля. Идея такого механизма была предложена Паркером [74]. В нем полоидальная компонента создается спиральными потоками плазмы в конвективной зоне Солнца. В математической форме эта идея была сформулирована Штебеком, Краузе и Рэдлером в работе [83]. Сегодня понятие альфа-эффекта существенно расширилось и включает в себя несколько

альтернативных точек зрения. Например, в транспортной модели Бэбкока-Лейтона участвует нелокальный альфа-эффект, которые создается действием кориолисовых сил на всплывающую трубку в конвективной зоне (см. напр., [46], [51]). Более широкий взгляд на проблему допускает совместное участие динамо Паркера и Бэбкока-Лейтона, а различное соотношение между ними проявляется в периодах нормальной работы динамо и периодах глобальных минимумов [52]. В любом случае, вопрос о связи между тороидальным полем и полоидальным является одним из наиболее актуальных для современной теории динамо.

Методами современной гелиосейсмологии удастся подробно изучать структуру дифференциального вращения на поверхности и во внутренних областях Солнца, тем самым проясняя механизм генерации тороидального поля. В сравнении с этим источник генерации полоидального поля изучен гораздо меньше. Исходя из теоретических оценок, этот эффект является относительно слабым, в связи с чем поиск возможных его проявлений, доступных для изучения по наблюдательным данным, представляет особый интерес. Основным трассером, отражающим связь между тороидальной и полоидальной компонентой, принято считать тилт-угол биполярных областей.

Тилт-угол определяется как величина угла наклона биполярной области по отношению к солнечному экватору. Если этот угол систематически отличен от нуля, то это может указывать на присутствие физические процессов, участвующих в генерации полоидальной компоненты.

Изучение свойств тилт-угла восходит к работам Хейла и Джоя [57], [56]. Первым фундаментальным фактом стала формулировка закона Джоя, согласно которому знак тилт-угла противоположен в северном и южном полушарии, а величина тилт-угла возрастает с широтой как  $\sin \theta$  ( $\theta$  – гелиографическая широта). Такое поведение согласуется с ожиданиями современной динамо теории, и возникает интерес восстановить информацию о параметрах динамо процессов из распределения тилт-угла.

На деле такая работа существенно затрудняется тем обстоятельством, что в абсолютном выражении величина тилт-угла оказывается достаточно малой (порядка нескольких градусов), в связи с чем ее измерение сопровождается большой долей шума. Кроме того, сама процедура выделения биполярных структур на магнитограммах представляется далеко не однозначной.

Использование алгоритмических методов позволило бы сопоставлять различные подходы, однако этот путь долгое время упирался в несовершенство технических возможностей и программ обработки изображений.

Ситуация, однако, стала стремительно изменяться в последнее время: существенно возросло качество как наблюдательных данных, так и методов их обработки. Отправной точкой, открывшей путь для таких исследований, по нашему мнению, является работа Стенфло и Косовичева [85]. В этой работе убедительно продемонстрировано выполнение закона Джоя на большой выборке биполярных областей, указана полученная зависимость тилт-угла от широты и отмечено, что эта зависимость сохраняется по ходу цикла.

В нашей работе мы продолжим эти исследования, однако в качестве базы будем использовать выборку, полученную несколько другим алгоритмом, ключевой особенностью которого является существенно больший диапазон размеров представленных биполярных областей, преимущественно за счет включения в рассмотрение малых биполей, соответствующих эфемерным областям. Основной задачей нашей работы, по сравнению с предшествующей работой [85], будет построение баттерфляй-диаграммы распределения тилт-угла.

## 2 Выделение биполярных структур на магнитограммах

Выборка биполей будет проводиться согласно алгоритму, предложенному в работе [87]. Существенным преимуществом метода является возможность выделения биполярных структур с малой площадью и потоком. Работа [85] была адаптирована под выделение крупных активных областей, в итоге объем выборки составил порядка  $1.6 \times 10^5$  биполей по  $7.4 \times 10^4$  магнитограммам, т.е. использовалось около 14 магнитограмм за каждый день и в среднем удалось выделить порядка 2 биполей в день. Поскольку время жизни крупных областей обычно существенно превышает один день, то при измерении тилт-угла многократно учитывались углы от одних и тех же объектов.

Выборка за тот же период времени 1996–2011 год по данным орбитального магнитографа Michelson Doppler Imager (MDI), полученная согласно методу [87], содержит уже порядка  $6.8 \times 10^4$ , но при этом используется лишь  $4.5 \times 10^3$

магнитограмм, т.е. 1 магнитограмма в день. Тем самым в среднем получается около 15 биполей в день. За период продолжительностью 3 цикла с 1975 по 2003 на основе данных с наземного телескопа обсерватории Кит-Пик (KPVT) получено  $2.45 \times 10^5$  биполей. Чтобы убедиться, что результат выделения не оказывают принципиального воздействия шумы и прочие технические особенности аппаратов [69], мы дополнительно задействовали данные с новейшего магнитометра Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) за период 2010–2012 годов, по которым удалось получить из  $9.7 \times 10^3$  биполей при использовании одного снимка в день. Все выборки содержат помимо биполей, соответствующих крупным активным областям (пятнам), биполи, отвечающие эфемерным областям.

Опишем основные шаги работы алгоритма [87]. Подготовительный этап включает удаление дефектных пикселей и сглаживание снимков гауссовским фильтром радиуса 1. После этого отбираются области с магнитным потоком превышающим пороговый уровень  $B_{\min}$  отдельно для положительных и отрицательных областей. Значительной части негативных последствий, связанных с проективными эффектами, удается избежать благодаря ограничению рассматриваемой области центральной частью диска в пределах  $\pm 60^\circ$ . Для каждой выделенной магнитной области вычисляются следующие параметры: гелиографические координаты центра области, площадь, выраженная в миллионных долях солнечной полусферы (м.д.п.<sup>1</sup>), и магнитный поток области. Следующий шаг состоит в поиске для данной области (область 1) подходящей области (область 2) противоположной полярности. Подходящая область ищется в круге и центром в области 1 и радиусом  $7^\circ + dL/2$ , где  $dL$  характеризует линейный размер области 1. Радиус в  $7^\circ$  выбран в соответствии со средним расстоянием между порами в биполярной группе пятен класса В по Цюрихской классификации [5]. Далее предполагается, что подходящая пара должна иметь более менее схожий магнитный поток, поэтому в круге рассматриваются только те области, для которых  $||F_1| - |F_2|| / (|F_1| + |F_2|) < \varepsilon$ , и среди них выбирается ближайшая к области 1. Затем поиск повторяется, только в качестве начальной области берется область 2 и к ней ищется подходящая пара. Если в результате ею окажется та же область 1, то эти две области объявляются биполярной парой.

---

<sup>1</sup>1 м.д.п. =  $3.044 \times 10^6$  км<sup>2</sup>. Пятно круглой формы площадью  $S$ , измеренной м.д.п., имеет диаметр  $d = 1969\sqrt{S}$  км =  $(0.1621\sqrt{S})^\circ$  (см. [5]).

Тилт-угол биполярной группы определяется как угол между линией, соединяющей центры масс областей положительной и отрицательной полярности и солнечным экватором. Выбор между дополняющими углами определяется в соответствии со знаком ведущей полярности. Если ведущая полярность положительна, то берется угол ближе к  $0^\circ$ , а если отрицательна, то берется дополняющий угол, который ближе к  $180^\circ$ .

Работа алгоритма тестировалась в той же статье [87], и была показана его устойчивость по отношению к ключевым параметрам. Конечно, некоторые результаты работы алгоритма, особенно в части малых биполей, могут не отвечать визуальному восприятию, однако мы прежде всего интересуемся средними характеристиками, и их удастся получать с приемлемым уровнем значимости.

В отличие от работы [85], мы использовали существенно меньший уровень размытия изображения и меньший пороговый уровень для напряженности поля. При этом удастся работать не с комплексами областей, полученных при слиянии в результате размытия, а с отдельными физическими областями напрямую. Тем самым достигается включение в выборку малых областей. Также есть небольшое отличие в измерении тилт-угла. Мы измеряем угол относительно пары областей, а в работе [85] он определяется как угол относительно геометрических центров областей положительной и отрицательной полярности, в которые могут входить несколько изначально несвязанных кусков.

Информация о площадях биполярных областей, получаемая в ходе работы алгоритма, позволяет исследовать статистические свойства тилт-угла отдельно в каждом диапазоне площадей.

Конечно, крайне интересно включить в рассмотрение максимально широкую выборку биполей, в том числе малых биполей. В то же время при уменьшении размеров биполей распределение тилт-угла становится все более однородным и труднее просматриваются статистические значимые свойства. Тем самым мы вынуждены ограничить снизу размер выделяемых областей. Пороговое значение в нашем анализе составило 50 м.д.п. Ясно, что малые биполи требуют отдельного рассмотрения, поэтому мы разделяем все полученную выборку на две части, одну из которых составляют биполи 50–300 м.д.п., а вторую – биполи превышающие 300 м.д.п. Количество представите-

Площади	KPVT	MDI	HMI
$50 < S < 300$ MHS	201 221	50 195	6754
$S > 300$ MHS	44 821	18 096	2911

Таблица 5.1. Количество больших и малых биполей в выборке по данным KPVT, MDI и HMI.

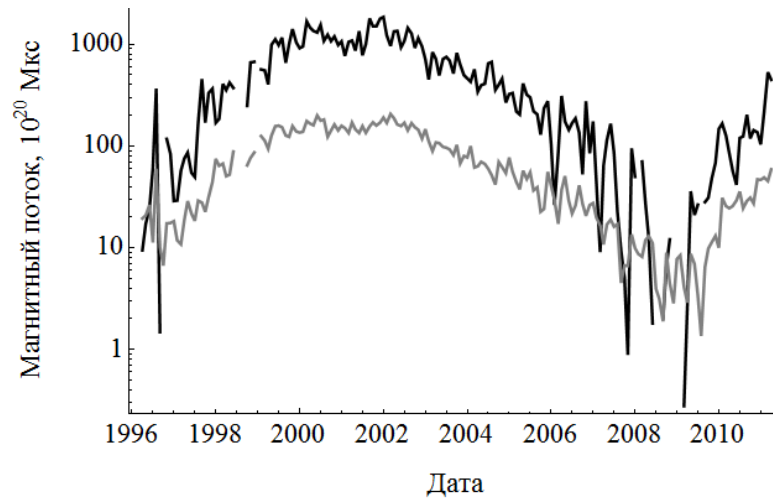


Рисунок 5.1. Магнитный поток, подсчитанный по данным MDI. Черная линия отвечает площадям  $S > 300$  м.д.п., серая показывает поток по биполям с площадью  $50 < S < 300$  м.д.п.

лей каждой группы приведено в табл. 5.1

На рис. 5.1 показан магнитный поток по данным MDI для малых ( $50 < S < 300$  MSH) и больших ( $S > 300$  MSH) биполярных групп. Выбор разделяющей границы  $S = 300$  MSH обусловлен тем, что свойства больших биполей оказываются достаточно устойчивы во всем диапазоне площадей. Помимо этого, данная граница приблизительно соответствует масштабам супергранул на Солнце. Из рис. 5.1 видно, что малые и большие биполи вовлечены в солнечный цикл, хотя вклад малых биполей в общий поток существенно меньше вклада от больших биполей.

Важным указанием на вовлеченность и больших и малых биполей в солнечный цикл служит определенное чередование знаков ведущей полярности биполярной группы. Согласно закону полярности Хейла, знак ведущей полярности в рамках цикла должен быть противоположным для северного и южного полушарий и иметь противоположную конфигурацию в следующем цикле. Рис. 5.2 демонстрирует проявление такой симметрии для малых биполей, причем области одного знака для малых и больших биполей практически

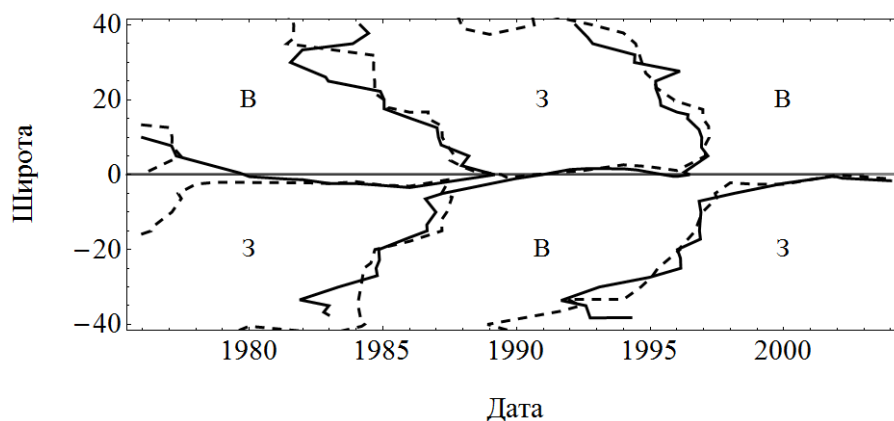


Рисунок 5.2. Границы областей с преобладанием биполей в направлении восток (В) и запад (З). Прерывистая линия для малых биполей с площадью  $50 < S < 300$  м.д.п., сплошная для больших групп ( $S > 300$  м.д.п.).

Учитываются только области максимальным значением поля больше  $B_{\min} = 10$  Гс.

совпадают: черные линии отделяют области преобладающей ориентации биполей в направлении запад-восток для больших групп ( $S > 300$  м.д.п.), а синие линии разделяют области, соответствующие биполям  $50 < S < 300$  м.д.п. На наш взгляд, такое поведение выборки малых биполей может служить подтверждением ее физической релевантности.

### 3 Средний тилт-угол

Изучая тилт-угол, нас прежде всего интересуют его средние характеристики. Это связано с тем, что альфа-эффект предполагает, что эти величины систематически отличны от нуля, т.е. существенной становится картина явления после усреднения по подходящим широтным и временным масштабам.

Мы использовали ячейки размером 2 года по оси времени и  $5^\circ$  по широте. Проводя усреднение, мы должны принимать во внимание, что в ряде случаев распределение может получаться существенно не гауссовским или состоять из смеси распределений. Например, биполярные группы с обратной полярностью, нарушающие правило полярности Хейла, по определению формируют бимодальное распределение, центры которого разнесены на  $180^\circ$ . Хотя согласно некоторым оценкам (напр., [81]) доля нарушителей составляет лишь 5% от числа пятен, можно предположить, что для малых биполей, распределение которых сходится к однородному, при уменьшении размеров, доля



нарушителей будет существенно больше. На основании нашей выборки мы оцениваем их долю в 10–20%, и такое количество формирует уже вполне различимый второй максимум распределения, смещенный от основного на  $180^\circ$ . Примеры таких распределений были представлены в работе [87].

Усреднение будет проводиться по следующей схеме. Вначале, для каждой ячейки выбирается ориентация, восточная для тилт-углов  $-90^\circ < \mu < +90^\circ$ , или западая с углами  $90^\circ < \mu < 270^\circ$ , согласно которой будут отбираться углы для усреднения. Распределение тилт-углов с заданной ориентацией аппроксимируется гауссовским распределением  $(A/\sigma) \exp(-(x-a)^2/\sigma^2)$  с амплитудой  $A$ , средним значением  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Выбор преобладающей ориентации определяется согласно наибольшей амплитуды для обоих направлений. Как правило, этому также соответствует наибольшее число биполей с данной ориентацией. Для больших биполей мы используем взвешенные величины, где в качестве веса берется площадь биполя, чтобы уменьшить вклад биполей с меньшими площадями и усилить вклад самых больших.

На втором шаге при вычисляем медиану выборки в качестве робастной оценки среднего значения и определяем доверительный интервал. Для этого тилт-углы упорядочиваются по возрастанию, т.е.  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ ,  $i = 1 \dots n$ , и берется  $\mu_{((n+1)/2)}$  в качестве медианной оценки  $m$ , если  $n$  нечетно, и  $\frac{1}{2}(\mu_{(n/2)} + \mu_{(n/2+1)})$ , если  $n$  четно. При больших  $n$  оценка сходится к гауссовскому распределению со средним  $m$  и дисперсией  $\sqrt{\pi \frac{1}{n-1} \sum (\mu_i - m)^2}$ , поэтому мы можем применить критерий Стьюдента для оценки величины доверительного интервала [2].

Напомним, что поскольку число биполей резко уменьшается для больших площадей, включающих пятна, мы используем взвешенные величины, чтобы увеличить их вклад. Для малых биполей взвешивание не применяется. Кроме того, мы называем тилт-угол положительным, если вращение происходит по часовой стрелке, и отрицательным, если против часовой стрелки, без учета полушария.

Помимо знака и величины тилт-угла нас интересует связь этих величин и некоторых параметров, характеризующих биполярную область. Так, зависимость ориентации биполя от цикла выражается в законе полярности Хейла, а зависимость от величины угла от широты – в законе Джоя. Устойчивость этих свойств подтверждается методами алгоритмического выделения бипо-

лярных структур ([85], [67], [86]).

На этом фоне достаточно выделяются результаты работы [86], в которой обнаружены существенная зависимость знака тилт-угла от размеров областей. Из нее следует, что знак тилт-угла для малых биполей оказывается противоположным знаку больших. Этот тренд оказывается хорошо различим на рис 5.3, на котором показана двумерная плотность распределения величины тилт-угла в координатах площадь-угол. На рисунке выделяются две группы, разделенные площадью приблизительно 300 м.д.п. В группе больших биполей наибольшая плотность отвечает областям положительного тилт-угла, а для малых биполей эта область определенно смещается в область отрицательного тилт-угла. Линия регрессии подтверждает такую интерпретацию. Линия проходит через ноль вблизи 300 м.д.п. Значимость наблюдаемого эффекта подтверждается статистическими тестами, такими как  $t$ -тест Стьюдента. Гипотеза об одинаковом среднем угле для больших и малых биполей дает  $t_{eq} = 22.9$ , в то время как гипотеза об противоположных по знаку средних значениях получает  $t_{op} = 0.98$ . При этом, конечно, возможности применения таких тестов ограничивается высоким уровнем шума в выборке из малых биполей.

Далее мы переходим к детальному изучению зависимости тилт-угла от параметров биполей с целью выявления особенностей в свойствах малых и больших биполей.

## 4 Закон Джоя

Покажем прежде всего, что полученная выборка в части больших биполей согласуется с результатами работы Стенфло и Косовичева [85] и тилт растет с широтой как  $k \sin \theta$ .

На рис. 5.4 показан усредненный тилт-угол для по данным MDI за 1996–2011 года, при построении которого объединялись распределения из северного и южного полушария. Для построения использовались биполи с магнитным потоком, превосходящим  $B_{\min} = 10$  Гаусс, и площадями более 300 м.д.п., при этом площадь использовалась в качестве веса. Рис. 5.4 во многом воспроизводит соответствующий рисунок из работы Стенфло и Косовичева [85], за исключением заметного загиба в законе Джоя на широтах  $30^\circ - 40^\circ$ .

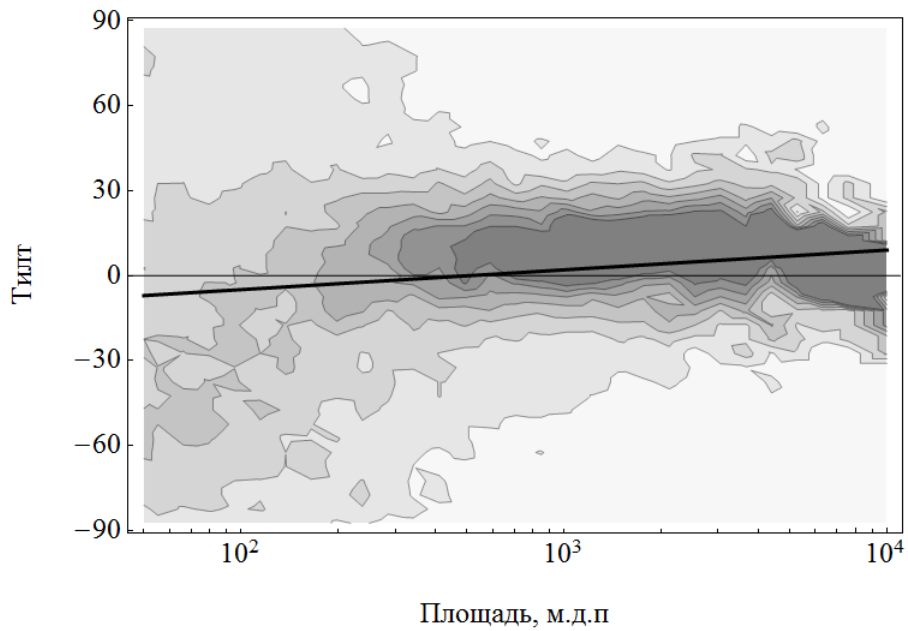


Рисунок 5.3. Распределение биполей в координатах тилт-угол, интенсивность цвета соответствует доле биполей в общей выборке биполей с той же площадью. Использовались данные MDI за период 1998–2007 г., биполи брались из области с широтой  $|\theta| \geq 10^\circ$ . Красная линия соответствует прямой, вписанной методом наименьших квадратов.

Изменение характера закона Джоя на высоких широтах еще нуждается в пояснении, но, по-видимому, он влияет на полученную нами меньшую оценку коэффициента наклона кривой  $\mu = a \sin \pi\theta/180^\circ$ , выражающей закон Джоя. Наша оценка составила  $a = 27 \pm 4$  (на уровне значимости  $2\sigma$ ), в то время как в [85] было получено  $a = 32$ . На наш взгляд, такое расхождение может быть следствием влияния малых областей, которые в нашей выборке представлены в значительно большем объеме, чем в работе [85].

Существенным образом корреляция изменится при рассмотрении малых биполей. Из рис. 5.5 следует, что биполи с площадями 50–300 м.д.п. демонстрируют обратный знак тилт-угла. Вновь заметен небольшой наклон кривой закона Джоя, который происходит на широтах  $30^\circ - 40^\circ$ .

Подобная картина, связанная с поведением малых биполей, просматривается и по данным NMI. Хотя короткий промежуток, за который доступны эти данные (2010–2012), не позволяет проводить столь детального изучения, однако на качественном уровне по рис. 5.5 также наблюдается обратный закон Джоя для малых площадей.

Такие же выводы можно сделать из анализа более продолжительной серии

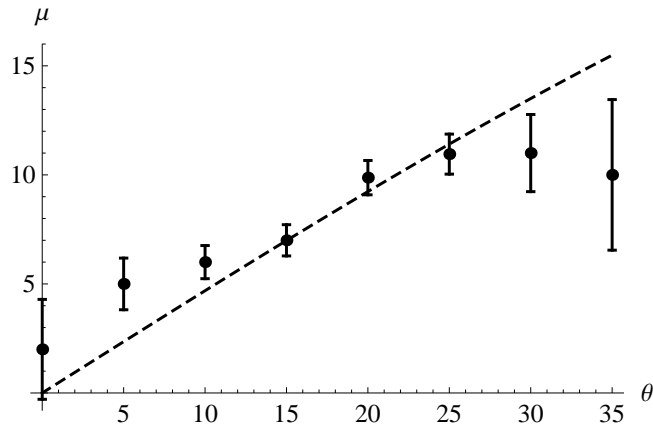


Рисунок 5.4. График закона Джоя, построенный по данным MDI. В выборку включаются биполи с напряженностью поля более  $B_{\min} = 10$  Гс и площадью  $S > 300$  м.д.п. Показаны доверительные интервалы уровня 95%, прерывистой линией отмечена кривая  $\mu = 27 \sin \pi\theta/180^\circ$ , полученная методом наименьших квадратов.

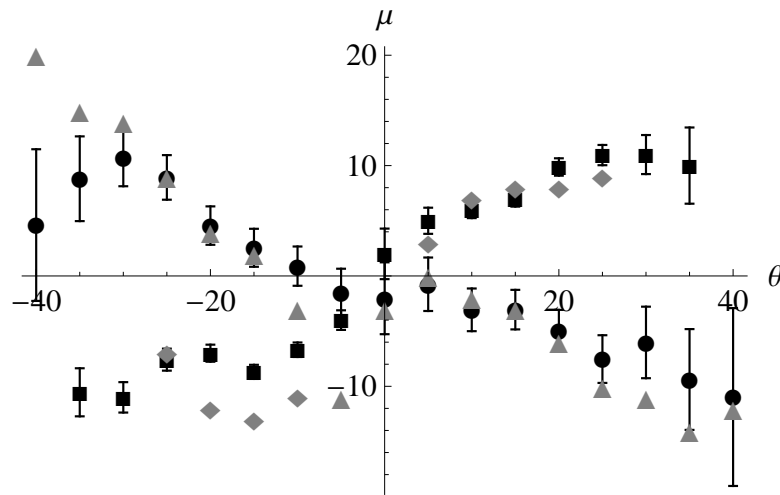


Рисунок 5.5. График закона Джоя согласно данным MDI и HMI. Квадратики черного цвета отвечают площадям  $S > 300$  м.д.п. для MDI, ромбы серого цвета – площадям  $S > 300$  м.д.п. для HMI. Черные кружки соответствуют малым биполям с площадью  $50 < S < 300$  м.д.п. для MDI, а серые треугольники площадям  $20 < S < 100$  м.д.п. для HMI. Минимальная напряженность поля составляет  $B_{\min} = 10$  Гс для MDI и 15 Гс для HMI.

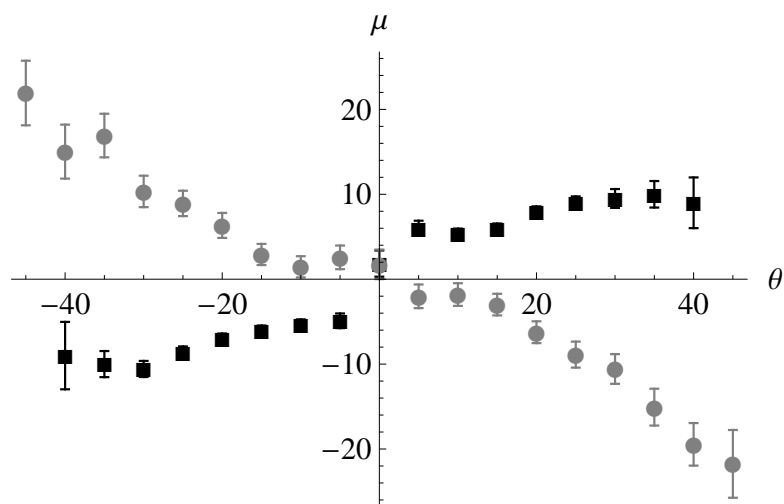


Рисунок 5.6. График закона Джоя по данным KPVТ, значение  $B_{\min} = 10$  Гс. Квадраты черного цвета отвечают площадям  $S > 300$  м.д.п., серые кружки – площадям  $50 < S < 300$  м.д.п.

наблюдения с телескопа KPVТ за 1975–2003 года, что примерно соответствуют трем полным циклам. Из рис. 5.6 и 5.5 видно, что величина тилт-угла увеличивается к высоким широтам с обратным знаком для малых площадей.

Большой период наблюдений KPVТ позволяет сравнить между собой циклы 21, 22 и 23. Из рис. 5.7 следует, что коэффициент наклона  $k$  не изменяется существенным образом от цикла к циклу. Также этих изменений не прослеживается на примере циклов 23 и 24 (рис. 5.5).

Конечно, зависимость тилта от площади не единственно возможная, представляет интерес изучение связи тилта и напряженности магнитного поля. Пока мы ограничимся тем замечанием, что установка порогового уровня  $B_{\min} = 100$  Гаусс принципиальным образом не устраняет различия больших и малых биполей (рис. 5.8).

## 5 Циклические изменения тилт-угла

В этом разделе будет рассмотрен наиболее простой тип зависимости тилт-угла – зависимость от фазы цикла, т.е. будут прослеживаться изменения тилт-угла, усредненного за определенные промежутки времени, в данном случае брались промежутки продолжительностью 2 года. Зависимость отдельно для больших и малых биполей показана на рис. 5.9. Из этого рисунка можно сделать два основных вывода. Первый состоит в том, что KPVТ, MDI и NMI

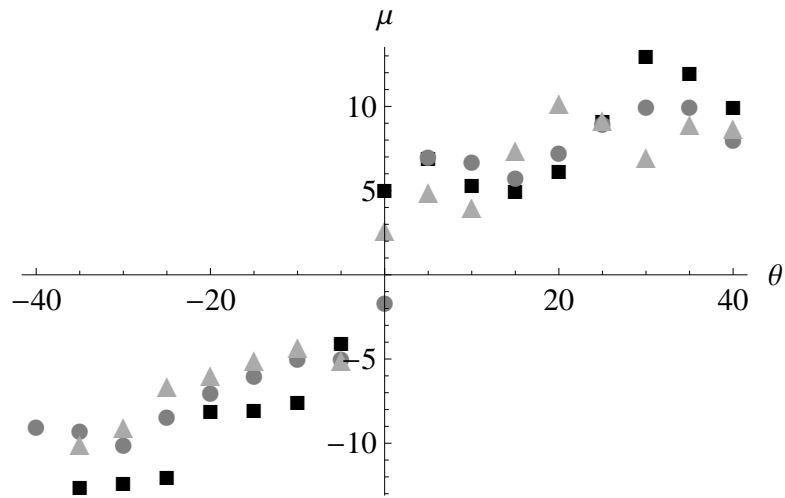


Рисунок 5.7. Закон Джоя, построенный для цикла 21 (черные квадратики), 22 (серые кружки), 23 (светло-серые треугольники) по наблюдениям КРVT для крупных биполей с площадью  $S > 300$  м.д.п. и полем  $B_{\min} > 10$  Гс.

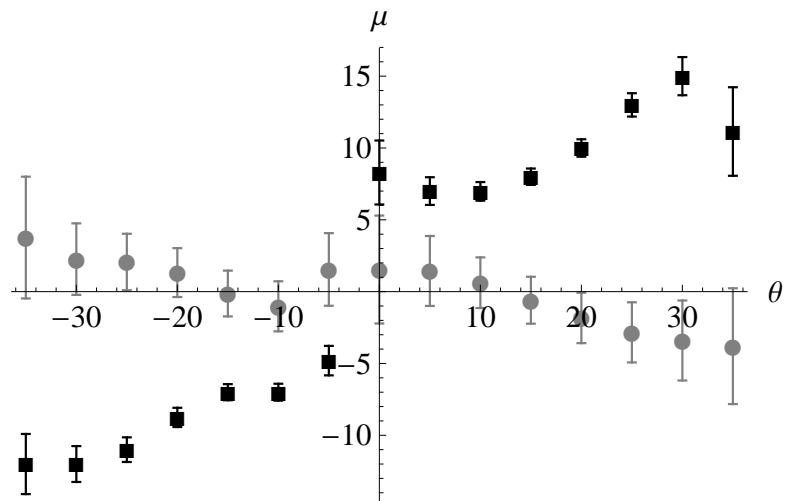


Рисунок 5.8. Закон Джоя для биполей с напряженностью поля  $B_{\min} > 100$  Гс (данные КРVT). Серые точки для малых биполей с площадью  $S < 100$  м.д.п., черные квадраты для крупных с площадью  $S > 100$  м.д.п.

дают согласованные результаты в тех периодах, когда эти данные перекрываются. Это подтверждает состоятельность получаемых результатов. В то же время, большие биполи демонстрируют обратное поведение по отношению к малым на каждой из представленных серий наблюдений.

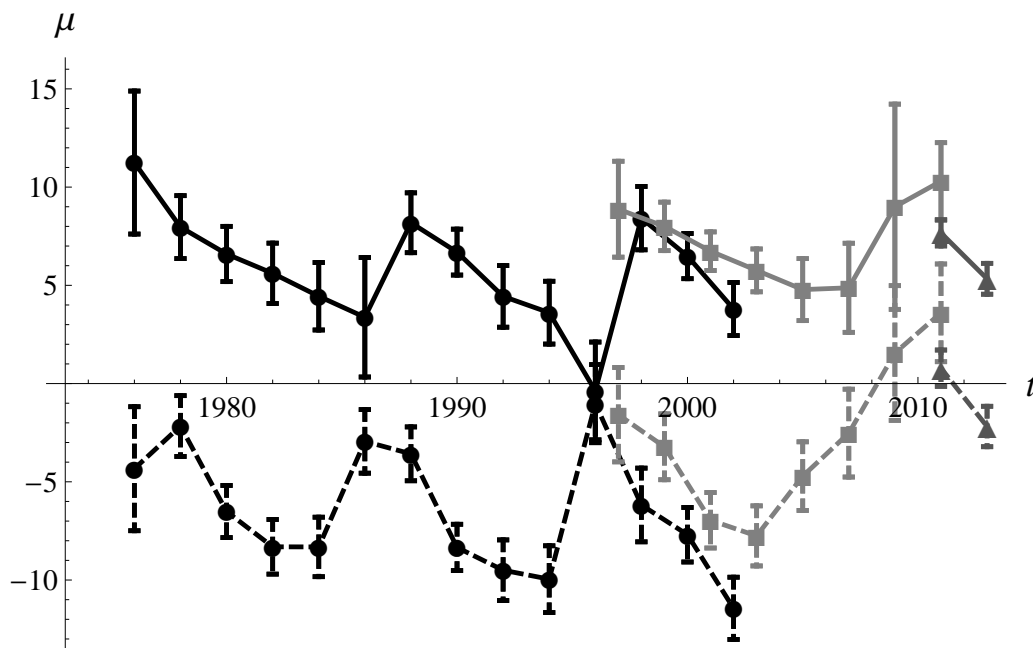


Рисунок 5.9. Тилт-угол, усредненный за 2 года. Сплошная линия для крупных биполей площадью  $S > 300$  м.д.п., прерывистая для малых с площадью  $50 < S < 300$  м.д.п. Фигуры обозначают источник данных: треугольники – HMI, квадраты – MDI, кружки – KPVT.

Второй вывод состоит в том, что тилт-угол проявляет заметные циклические вариации, видимые для биполей обеих групп. Примечательно, что по ходу цикла величина тилт-угла для крупных биполей уменьшается, в то время как для малых биполей наблюдается рост. Строго говоря, следует различать цикл для малых биполей и больших, и далее будут приведены дополнительные аргументы в пользу такого подхода.

Интерпретация поведения больших биполей достаточно прозрачна и согласуется с выводом о независимости наклона кривой закона Джоя от фазы цикла, сделанным в [85]. В самом деле, согласно закону Джоя  $\mu \propto \sin \theta$ , где  $\theta$  обозначает широту, которая уменьшается по ходу цикла, что выражается и в уменьшении  $\langle \mu \rangle$ .

Однако такая интерпретация не объясняет поведения малых биполей. Чтобы прояснить ситуацию, мы рассмотрели отдельно поведение тилт-угла

малых биполей в разных широтных зонах и сравнили его с поведением крупных (рис. 5.10). Здесь выделяются циклические изменения тилта, которые не свойственны большим биполям. На широтно-временной диаграмме просматриваются одновременно как нисходящие к экватору волны, так и волны, распространяющиеся к высоким широтам. Цикл для малых биполей также выглядит смещенным по отношению к циклу больших, что подтверждает концепцию введения расширенного солнечного цикла. Волны баттерфляй-диаграммы начинаются на высоких широтах, опережая на 1–2 года основную волну активности, порожденную пятнами. Наибольшие значения тилт, как и ожидалось, получает на средних широтах. Альтернативная интерпретация состоит в том, что малые биполи отражают другую компоненту магнитного поля, нежели большие.

## 6 Распределение тилт-угла на широтно-временной диаграмме

Рассмотрим более детально распределение тилт-угла на фоне цикла пятенной активности на баттерфляй диаграмме. Предыдущие результаты подсказывают, что такую работу нужно проводить отдельно для больших и малых биполей.

Рис. 5.11 показывает распределение тилт-угла для MDI данных в цикле 23. Можно сделать вывод, что в среднем положительные значения тилт-угла наблюдаются в северном полушарии, а отрицательные в южном. Некоторые исключения из этого правила полярности заметны лишь на концах циклов и вблизи экватора. Такие локальные нарушения наблюдались ранее по данным токовой спиральности, например в работе [94].

Рис. 5.12 показывает выполнение обратного закона полярности для выборки исключительно из малых биполей.

На следующих рисунках в цветовой схеме представлены широтно-временные диаграммы распределения величины тилт-угла: синий цвет отвечает отрицательному знаку, красный положительному, серые области отвечают тилт-углу, который значимо не отличается от нуля. Из рис. 5.13 видно, что положительный тилт-угол характерен для северного полушария, отрицательный – для южного. Отдельные исключения из этого правила наблюдаются в



областях между циклами. Волны активности, идущие к экватору с высоких широт, достаточно слабые, но различимы внутри циклов. В некоторых местах формируется бимодальное распределение с максимумами, расположенными в начале цикла на высоких широтах и в конце циклов на низких.

При повышении порогового уровня  $B_{\min}$  до 100 Гаусс волны активности практически исчезают, что означает, что тилт-угол остается практически постоянным в каждом широтном диапазоне (рис. 5.14).

Картинка, отвечающая малым биполям, как и ожидалось, имеет обратное расположение цветов. На рис. 5.15 хорошо различимы распространяющиеся волны активности, что означает, что малые биполи вовлечены в цикл активности и дают баттерфляй-диаграмму схожую с распределением пятен. При этом, однако, волны активности начинаются на более высоких широтах, чем пятна, что может указывать на так называемый расширенный солнечный цикл.

## 7 Нарушения правила полярности Хейла

Изучим, как выполняется правило полярности Хейла большими и малыми биполями, представленными в выборке. Прежде всего интересно оценить долю групп нарушителей правила полярности и сравнить ее с оценками для групп пятен, которая, согласно [81], составляет порядка 5 – 7%.

Доля биполей, которые *следуют* правилу полярности, показана на рис. 5.16 в зависимости от размеров областей. График построен следующим образом. Все биполи были разделены в несколько групп с близкими площадями. Затем в каждой группе вычислялось отношение числа биполей, которые следуют правилу полярности, к общему числу биполей в данной группе и результат наносился на график. Выборка бралась за период максимума 23 цикла (1998–2007 года). Такие временные рамки брались с целью исключить наложение разно ориентированных биполей на концах циклов ([87]).

Для самых крупных биполей доля ориентированных по правилу полярности превосходит 90%. Такие биполи преимущественно формируются группами пятен, и полученная оценка согласуется с оценкой [81].

Доля биполей, которые следуют правилу полярности, существенно уменьшается при движении к малым площадям. Это кажется естественным в виду

того, что уровень шума значительно возрастает для малых биполей. В то же время на рис. 5.16 просматриваются характерные углы наклона для больших,  $S^{0.05}$ , и для малых,  $S^{0.2}$ , биполей. Это указывает на особенности малых биполей, которые начинают проявляться при площадях меньше  $S = 500$  м.д.п. На рис. 5.16 эти группы представлены синим и красным цветом. На площадях порядка  $S = 50$  м.д.п. доля нарушителей приближается к 50%, видимо это указывает, что меньшие биполи уже ориентированы произвольным образом.

Оценка доли нарушителей в 5 – 7% свойственна биполям с площадями больше 1000 м.д.п.

## 8 Оценка альфа-эффекта

Рассмотрим связь магнитного потока  $F$  биполя и величиной тилт-угла. Магнитный поток будем измерять в единицах  $10^{20}$  Мкс. Конечно, магнитный поток близко связан с площадью, и как видно из рис.  $F(S) \sim S^{1.25}$  (синий график). Основной вклад в полный поток вносится крупными областями, мы оценили этот вклад, построив график функции  $\Phi(S)$ , которая показывает вклад в общий поток от биполей с площадями больше, чем  $S$ . График этой функции хорошо аппроксимируется как  $\Phi(S) = \exp[-S/(2 \times 10^3)]$ .

Рис. 5.17 показывает, что порядка 90% от полного потока приносится биполями с площадями  $S > 300$  м.д.п. Нужно однако заметить, что эта оценка никак не учитывает различное время жизни биполярных структур, которое мало для малых биполей (порядка 1 дня) и относительно продолжительно для крупных структур (недели и месяцы) Тем самым мы можем систематически недооценивать вклад от малых биполей, и вопрос требует отдельного изучения, в частности, оценка скорости регенерации потока может быть более информативным показателем.

Рис. 5.18 показывает разделение биполей на две группы. В первой, с потоком  $F < 10$ , тилт отрицателен. Для  $F > 30$  тилт становится положительным. Сравнивая результат с рис. 5.17 получаем оценку для площадей, которым соответствует граница между группами вблизи значений  $F = 20$ . Вновь получается оценка  $S = 300$  м.д.п., которая не раз возникала ранее по другим графикам. Заметим, что прослеживается тенденция увеличения тилт-угла при увеличении  $F$ .

Связь между тилт-углом и магнитным потоком интересна прежде всего в аспекте оценки вклада величины магнитного момента в формирование полоидальной компоненты магнитного поля [84]. Напомним, что биполярный момент определяется как  $B_m = F \cdot d$ , где  $F$  магнитный поток и  $d$  есть расстояние между униполярными областями в биполе. Заметим, что величину  $d$  можно использовать как еще одну характеристику размеров биполя.

Расстояние  $d$  определяется как угловое расстояние между геометрическими центрами монополей, составляющих биполь. Такое определение неявно включает вклад от размеров самих монополей, поскольку часть расстояния  $d$  складывается из радиусов монополей, и может сильно зависеть от геометрической формы областей (нетрудно построить пример биполярной области, для которой введенное определение  $d$  даст ноль). В самом деле, если в первом приближении считать биполь составленным из двух круглых областей, то  $d$  должно расти как  $\sqrt{S}$ , где  $S$  – размер области.

В действительности на рис. 5.19 мы наблюдаем наклон величины  $d$  как функции от  $\sqrt{S}$  значительно меньший, чем 1. Это означает, что площади областей растут быстрее, чем расстояние между их центрами. Вновь наблюдается различие больших и малых биполей, причем разделяющая граница отвечает площадям  $S = 300$  м.д.п. (обратим внимание, что на графике представлена зависимость от  $\sqrt{S}$ , а не от  $S$ , как ранее).

Рассмотрим, как меняется биполярным момент  $Bm$  в зависимости от размеров области  $S$ . Из рис. 5.20 мы заключаем, что биполярный момент растет как  $S^{1.5}$ . Зависимость тилт-угла от биполярного момента приведена на рис. 5.21. Вновь тилт малых биполей оказывается по знаку противоположным большим, а разделение двух групп происходит вблизи точки  $Bm = 90$ , что отвечает 200–300 м.д.п. (рис. 5.20).

Рис. 5.21 показывает умеренный рост величины тилт-угла с увеличением биполярного момента. Заметим, что в работе [85] не было выявлено существенной зависимости тилт-угла от потока или биполярного момента.

Оценим вклад тилт-угла в формирование полоидальной компоненты. В начальном приближении порядок величины  $\alpha$  можно оценить следующим образом. Типичные значения тилт-угла не превосходят  $\mu = 10^\circ$ , что составляет около 10% от прямого угла,  $0^\circ < \mu < 90^\circ$ , в пределах которого тилт в принципе может изменяться. Если время жизни биполя отождествить с вре-

менем оборота конвективной ячейки, то получим оценку  $\alpha \approx 0.1v$ , где  $v$  – среднеквадратичная скорость оборота конвективных ячеек.

В то же время, доступная нам выборка биполей позволяет провести эту оценку более тонким образом. Рассмотрим биполи, которые следуют правилу полярности Хейла, умножим величину тилт-угла на знак ведущей полярности  $p = \pm 1$  и просуммируем величину  $F \sin(p\mu)$  по всем биполям (ограничимся периодом 1998–2007 г., данные MDI). Полученная в результате величина составляет 10% от полного потока и тем самым показывает, какая часть тороидального поля может переходить в полоидальное по такому механизму. Иными словами, это та же оценка величины  $\alpha/v$ , что была рассмотрена выше. Такая оценка оказывается устойчивой в том смысле, что можно учитывать вклад только больших биполей (вкладом малых биполей можно пренебречь) или вместо магнитного потока использовать величину биполярного момента.

Более детальная оценка требует проведения моделирования и предполагает выбор конкретного сценария, однако ожидается, что порядок величины будет в согласии с данной оценкой.

## 9 Распределение тилт-угла в свете теорий динамо

С точки зрения теории динамо, тилт-угол может рассматриваться как связующий механизм между тороидальным и полоидальным полями. Процессы, которые приводят к появлению систематически отличного от нуля угла наклона биполярных областей, трактуются по-разному. В теории динамо Паркера [74] тилт-угол появляется вследствие действия альфа-эффекта, который создается ненулевой средней спиральностью конвективных течений. В модели Бэбкока-Лейтона ([39], [65], [64]) движущей силой выступает сила Кориолиса, т.е. альфа-эффект становится нелокальным механизмом. Эти идеи находят подтверждение в теоретических расчетах (напр., [76]) и результатах численного моделирования ([63], [62]), которые показывают, что для конвективной зоны  $\alpha$  положительно в северном полушарии, а смена знака происходит у ее основания. Другой сценарий был продемонстрирован в численном моделировании в работе [43]. В ней предполагается, что вблизи фотосферы альфа-эффект перекрывается приповерхностными течениями и тилт созда-

ется дифференциальным вращением. Упомянутые механизмы не исключают присутствия дополнительных механизмов генерации полоидального поля из тороидального и наоборот.

Различные сценарии работы динамо будут приводить к изменениям в деталях широтно-временных диаграмм распределения тилт-угла. Вполне вероятно, что изучение наблюдательных данных позволит сделать выбор в пользу того или иного механизма солнечной активности (например, в работе [48] утверждается, что наблюдаемый тилт-угол свидетельствует в пользу механизма Бэбкока-Лейтона). По нашему мнению, для таких выводы требуется еще много работы по согласованию результатов численного моделирования и наблюдаемой картины. В нашей работе мы не предполагаем заранее конкретной реализации, а используем общее понятие альфа-эффекта как механизма генерации полоидальной компоненты поля.

Результаты проведенного анализа подтверждают основные свойства, ожидаемые относительно величины тилт-угла. Распределение оказывается антисимметричным по отношению к экватору, величина тилт-угла возрастает с широтой. Некоторые отклонения от этих свойств при их общем сохранении от цикла к циклу могут интерпретироваться как проявления нелинейных динамо процессов.

Относительно распределения тилт-угла для малых биполей, мы обнаруживаем, что оно имеет противоположный знак относительно больших областей. Сопоставление распределений тилт-угла малых биполей на рисунках 5.22 и 5.23 говорит о том, что происхождение обратного знака может быть различным для низких и высоких широт.

На низких широтах ( $< 30^\circ$ ) отрицательный тилт формируется за счет более тяжелого хвоста распределения, который перетягивает среднее значение в отрицательную сторону. По-видимому, речь идет о смеси нескольких распределений. Одно из них может быть сосредоточено в положительной области (т.е. представлено биполями, ориентированными как пятна), а вторая компонента сосредоточена в области отрицательного знака и вызывает смещение среднего значения. На высоких широтах ( $> 30^\circ$ ) количество положительно ориентированных биполей резко уменьшается и мы наблюдаем преимущественно отрицательную компоненту.

Если связать наблюдаемое поведение тидт-угла для малых биполей с иде-

ями работы А. Бранденбурга [43], то можно предположить, что на высоких широтах мы наблюдаем трассеры полоидальной компоненты магнитного поля, которая под действием  $\alpha^2$  механизма переходит в тороидальную. Такие биполи изначально ориентированы вдоль меридианов и получают наклон отрицательного знака под действием кориолисовых сил.

Нужно принимать во внимание, что определение понятия биполя и методы усреднения могут немного различаться. Это может приводить к изменению распределения тилт-угла малых биполей в значительно большей степени, чем больших. Однако, нам не удалось подобрать такой метод, который бы давал положительный угол для малых биполей. Тот же вывод мы делаем после рассмотрения новейших наблюдательных данным НМІ.

Мы наблюдаем различие свойств больших и малых биполей также и в отношении ряда других свойств: разделение просматривается при изучении зависимости тилт-угла от биполярного момента и магнитного потока, различной оказывается и доля хейловских биполей для обеих групп. При этом разделение больших биполей, составленных в основном из групп пятен, и малых, в которые входят эфемерные области, эффективно происходит на площадях порядка  $S = 300$  м.д.п.

Разделение биполей на большие и малые с противоположными свойствами свидетельствует в поддержку идей [45] о том, что режимы работы динамо в присутствии пятен (т.е. больших биполей) и в их отсутствие существенно различаются. Такое различие могло проявляться в эпоху глобального минимума Маундера. Другая интерпретация может состоять в том, что большие и малые биполи формируются на различных глубинах, где свойства самих полей различаются.

Консервативный подход предлагает рассматривать вклад в альфа-эффект только от больших биполей и пренебрегать малыми. В то же время для понимания процессов динамо необходимо предложить интерпретацию полученного различия больших и малых биполей.

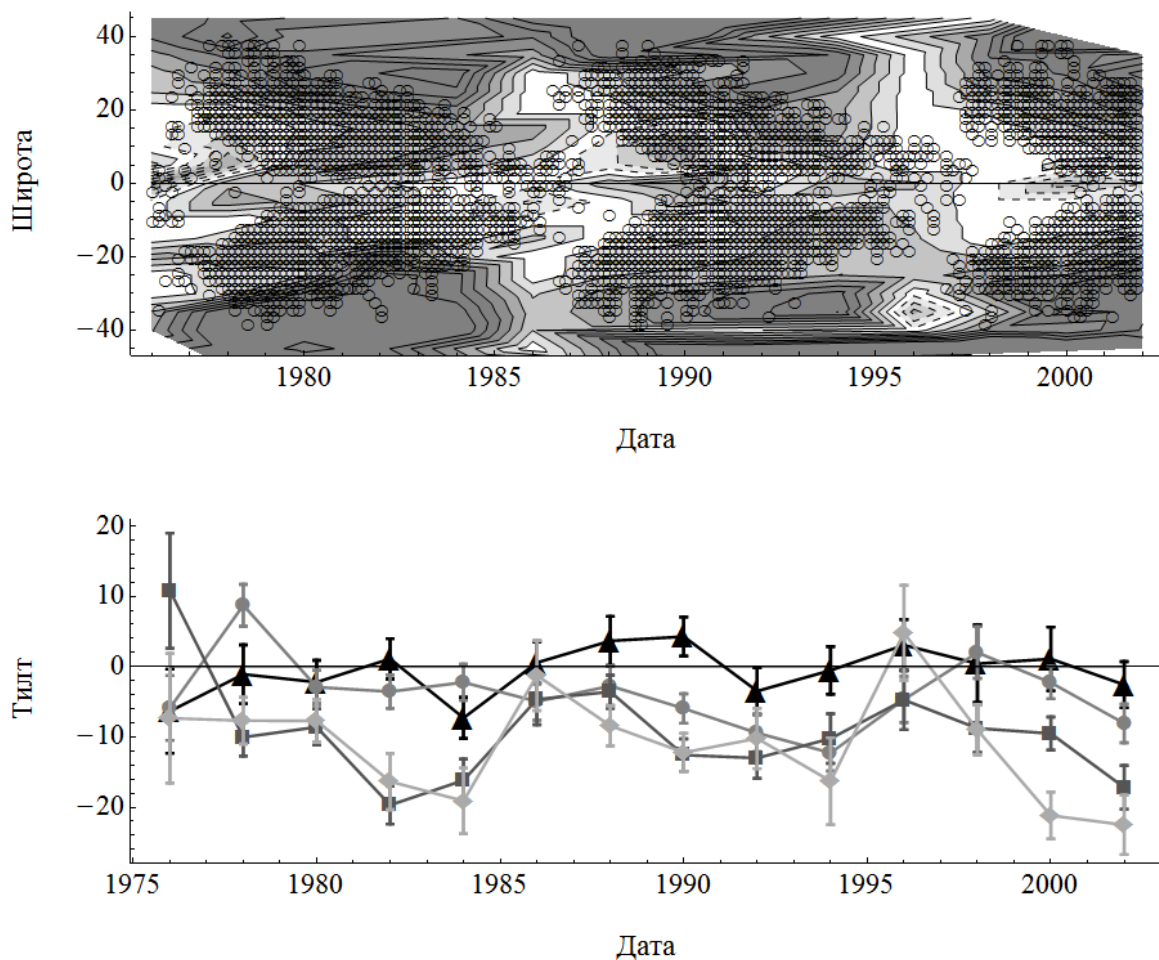


Рисунок 5.10. Верхняя панель: широтно-временная диаграмма распределения тилт угла (данные KPVT) для малых биполей ( $50 < S < 300$  м.д.п.). Сплошными контурами показаны области отрицательного тилта, прерывистыми – положительного. Кружочками для сравнения показано распределение солнечных пятен. Нижняя панель: вариация тилт-угла в различных широтных зонах. Треугольниками показана выборка биполей из области  $|\theta| < 10^\circ$ , кружками – из области  $10^\circ \leq |\theta| < 20^\circ$ , квадратами – из области  $20^\circ \leq |\theta| < 30^\circ$ , ромбиками – из широтной области  $30^\circ \leq |\theta| < 40^\circ$ .

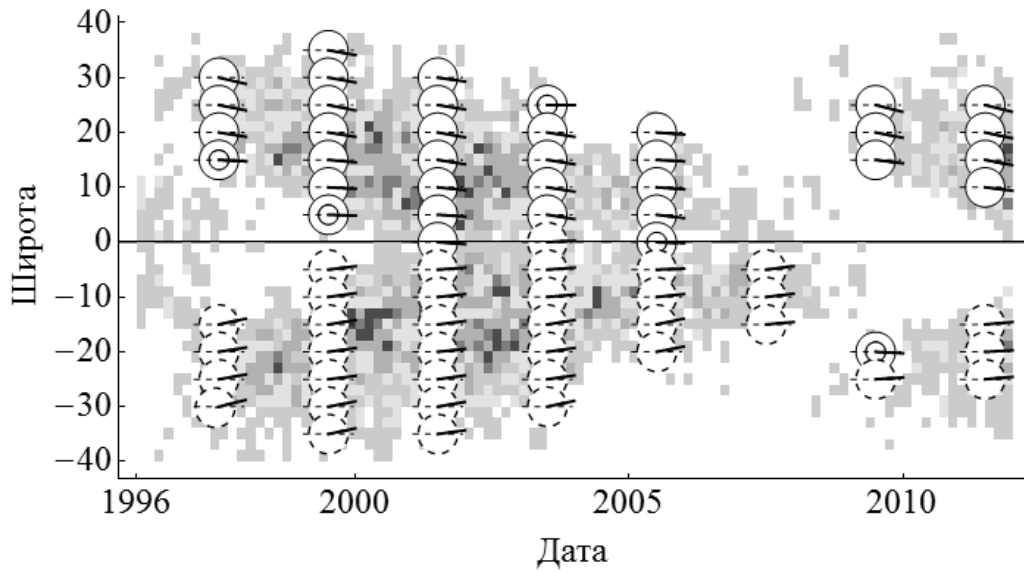


Рисунок 5.11. Баттерфляй-диаграмма распределения тилт-угла, наложенная на распределения плотности солнечных пятен в цикле 23, согласно данным MDI (значение  $B_{\min} = 10$  Гс, площади  $S > 300$  м.д.п.). Кружки со сплошной границей отмечают области, в которых средний тилт-угол положителен (вращение по часовой стрелке), с пунктирной – отрицательный (вращение против часовой стрелки). Двойные кружки обозначают области, в которых нулевое значение тилт-угла попадает в доверительный интервал (средний угол значимо не отличается от нуля).

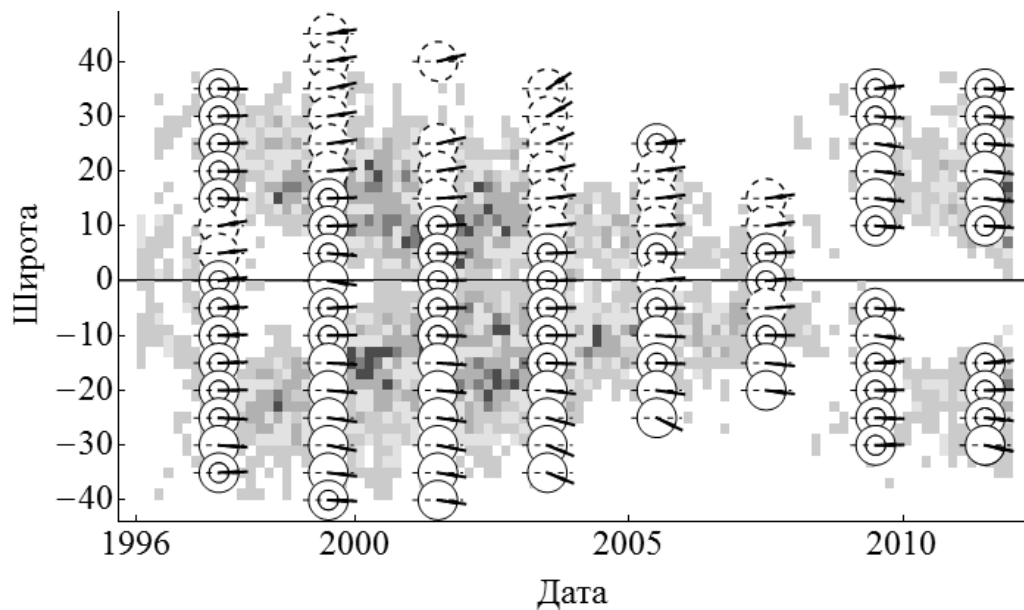


Рисунок 5.12. Баттерфляй-диаграмма распределения тилт-угла, наложенная на распределения плотности солнечных пятен в цикле 23, согласно данным MDI (значение  $B_{\min} = 10$  Гс, площади  $50 < S < 300$  м.д.п.).



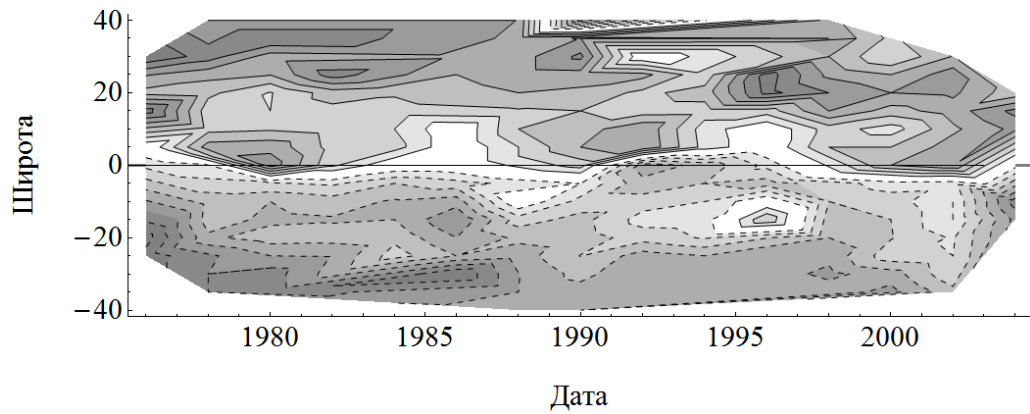


Рисунок 5.13. Баттерфляй-диаграмма для тилт-угла по выборке биполей с  $B_{\min} = 10$  Гс и площадью  $S > 300$  м.д.п.(данные КРVT). Синий цвет отвечает областям положительного тилт-угла, красный – отрицательного, серый отмечает области, в которых угол значимо не отличается от нуля.

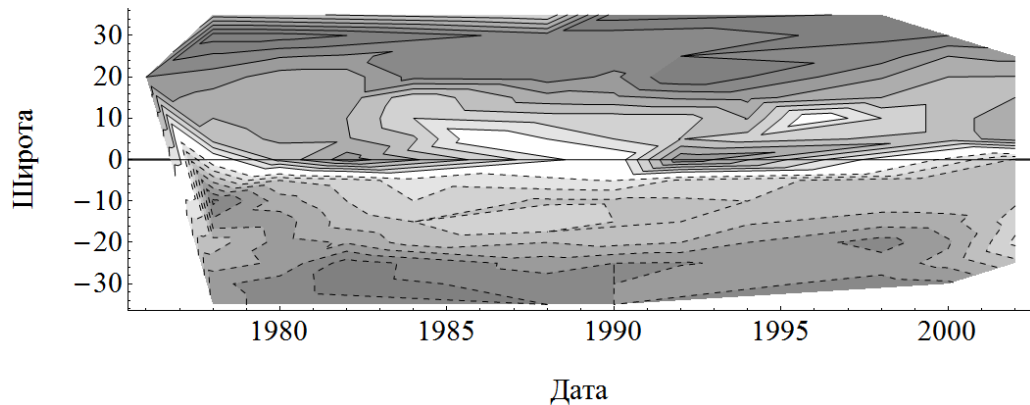


Рисунок 5.14. Баттерфляй-диаграмма для тилт-угла по выборке биполей с  $B_{\min} = 100$  Гс и площадью  $S > 100$  м.д.п.(данные КРVT). Цветовая схема как на предыдущем рисунке.

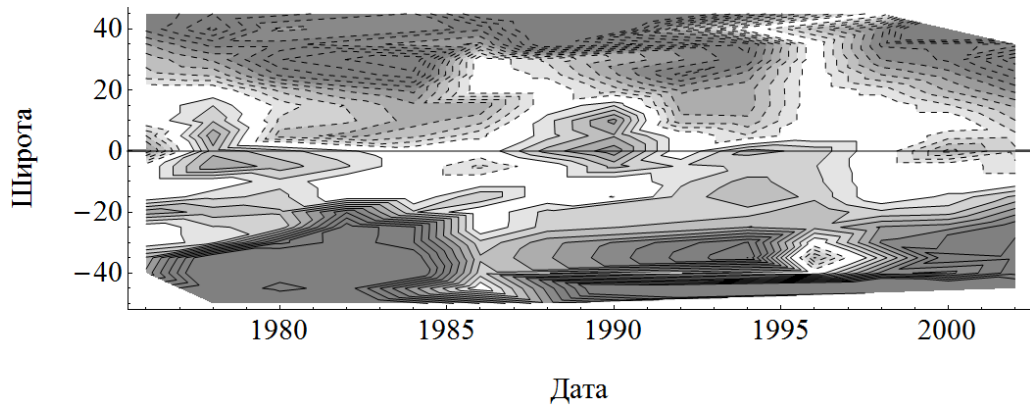


Рисунок 5.15. Баттерфляй-диаграмма для тилт-угла по выборке биполей с  $B_{\min} = 10$  Гс и площадью  $50 < S < 300$  м.д.п.(данные КРVT). Цветовая схема как на рис. 5.13.

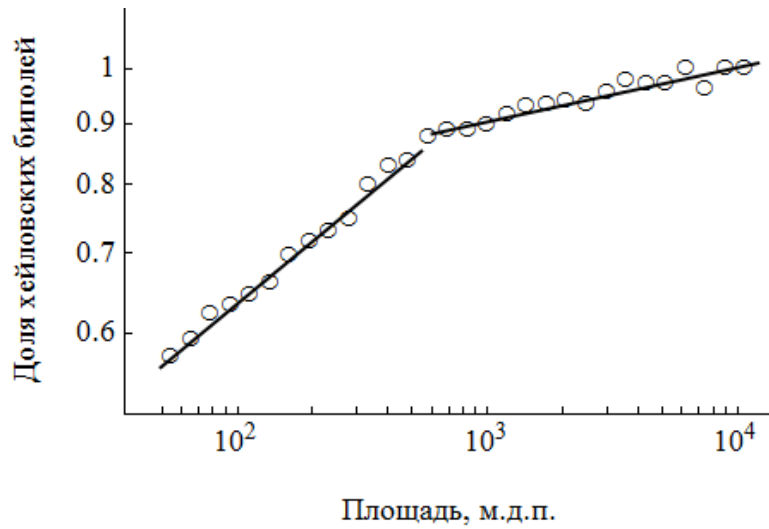


Рисунок 5.16. Доля биполей, которые следуют правилу полярности Хейла (данные MDI). Прямыми линиями отмечены участки, имеющие наклон 0.2 и 0.05.

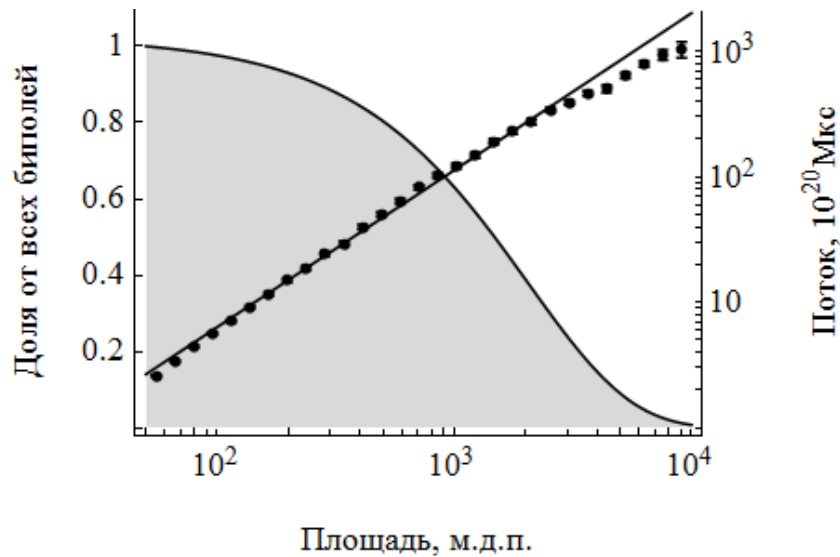


Рисунок 5.17. Кривая черного цвета показывает суммарный вклад биполей в общий поток в зависимости от площади согласно данным MDI (график функции  $\Phi(S)$ ). Синий график показывает величину среднего потока в зависимости от размеров биполей; линия, списанная методом наименьших квадратов, имеет наклон 1.25.

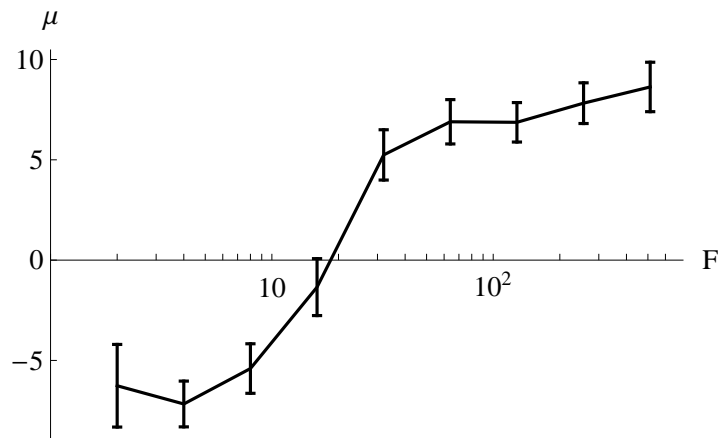


Рисунок 5.18. Зависимость величины тилт-угла от магнитного потока  $F$  [ $10^{20}$  Мкс] по данным MDI.

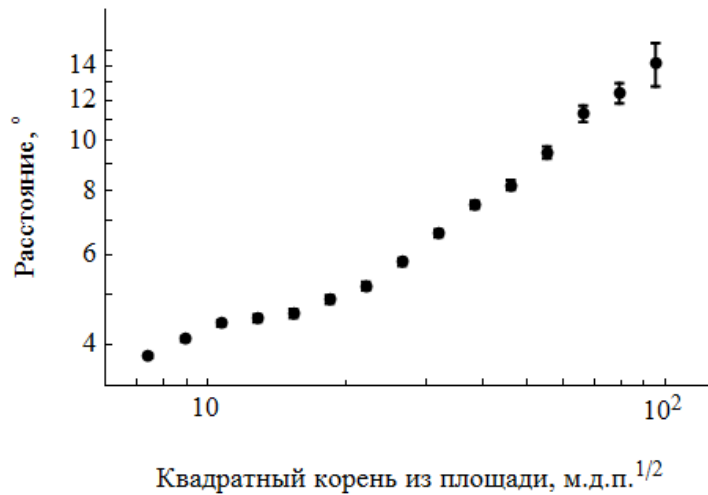


Рисунок 5.19. Среднее расстояние между центрами областей противоположного знака в биполе по отношению к размеру биполя, выраженного как  $\sqrt{S}$ .

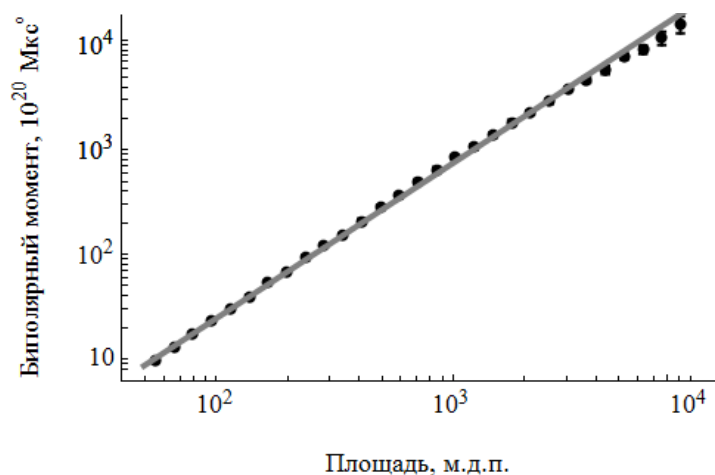


Рисунок 5.20. График зависимости биполярного момента от площади биполей (данные MDI). Линия, вписанная методом наименьших квадратов, имеет наклон 1.5.

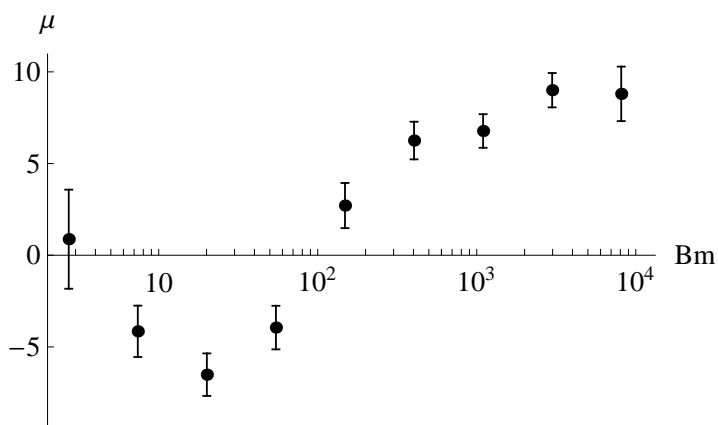


Рисунок 5.21. Зависимость тилт-угла по отношению к величине биполярного момента  $Vm$  [ $10^{20}$  Мкс $^\circ$ ], полученная по данным MDI.

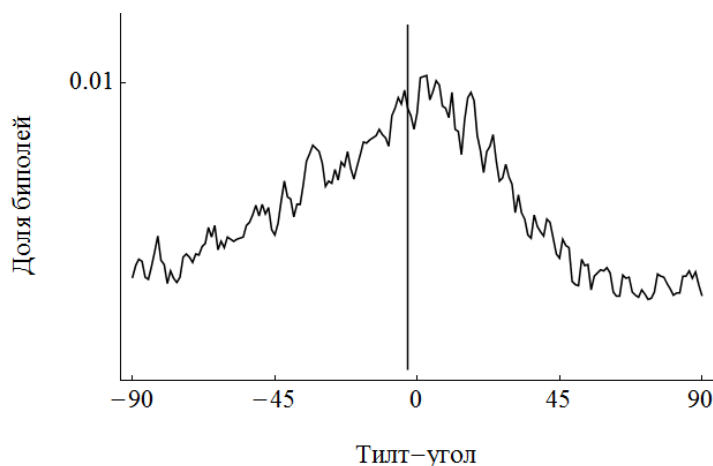


Рисунок 5.22. Распределение тилт-угла по данным MDI за 1996–2011 гг. в области широт  $12.5^\circ \leq \theta \leq 17.5^\circ$  и площадей  $50 < S < 300$  м.д.п. Вертикальной линией обозначена медиана выборки.

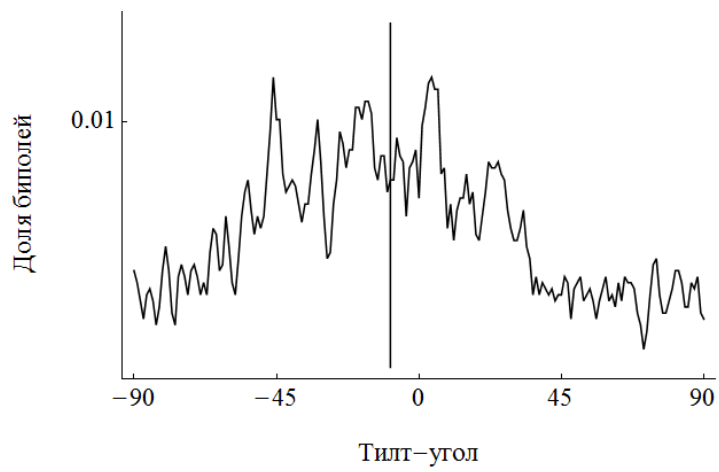


Рисунок 5.23. Распределение тилт-угла по данным MDI за 1996–2011 гг. в области широт  $32.5^\circ \leq \theta \leq 37.5^\circ$  и площадей  $50 < S < 300$  м.д.п.

## Глава 6

# Заключение

В работе были рассмотрены различные аспекты проблемы получения количественных показателей, характеризующих эволюцию магнитных полей на Солнце. Обзор предшествующей литературы показывает, что актуальность данной темы становится все нагляднее по мере накопления наблюдательных данных и развития методов их массовой обработки. На смену вопросам о качественном поведении магнитного поля приходят вопросы о его выражении в терминах количественных величин. Этот интерес во многом связан с задачами построения прогнозов космической погоды и оценки вклада различных механизмов в работу солнечного динамо.

Постановка задачи предполагает рассмотрение нескольких аспектов. С одной стороны – это развитие методов изучения модельных уравнений. Ключевую роль в процессах солнечного динамо играет случайный характер сред, в которых происходит перенос магнитного поля. Работа по изучению таких сред была инициирована, в частности, Я.Б. Зельдовичем и активно развивалась его учениками. Была установлена тесная связь между показателями роста векторных полей, переносимых случайной средой, и задачей о произведении большого числа случайных величин или матриц. На основе предложенного вероятностного подхода к задаче был разработан новый метод по вычислению показателей Ляпунова и старших моментов и проведен ряд численных экспериментов, показывающих признаки присутствия в системе характерных явлений, таких как, например, явление перемежаемости.

Однако все это оставался невыясненным вопрос о том, насколько численное моделирование, в основе которого лежали методы типа Монте-

Карло, в состоянии точно оценивать скорость роста среднего поля и тем более старших моментов, которые характеризуют энергию поля. Чтобы на него ответить, нужно было получить эти же оценки принципиально иным способом, нежели генерацией большой последовательности случайных величин.

Такой подход существует и описан в математических работах Г. Ферстенберга, но для его воплощения требуется решение серии довольно трудных интегральных уравнений, решать которые представляется возможным только численно. Вполне естественно, что большая сложность вычислений и нерегулярный вид функций, участвующих в промежуточных расчетах, не привлекали исследователей в эту область. Следующий результат, представленный в диссертации, является ответом на этот давно назревший вопрос.

**1. Получена плотность распределения инвариантной меры для модельного уравнения Якоби со случайным параметром кривизны, на основе найденной меры получены оценки скорости роста поля Якоби.** В работе впервые была численно получена инвариантная мера – ключевой элемент теорем Ферстенберга, лежащий в основе вычисления показателей Ляпунова. Как показало исследование, на пути вычисления инвариантной меры возникают как трудности технического плана, преодолеваемые за счет привлечения суперкомпьютера, так и ряд особенностей в построении численных схем, связанных с нерегулярным поведением и вырождением промежуточных функций. Учет этих обстоятельств позволяет, в конечном итоге, находить искомую меру для широкого класса распределений параметра кривизны в уравнении Якоби, из которых мы выбрали и привели результаты для двух основных представителей – равномерного и гауссовского.

В рамках нашей задачи нахождение инвариантной меры интересно с той точки зрения, что на ее основе простым интегрированием вычисляется показатель Ляпунова для поля Якоби. В работе приведены рассчитанные значения показателей Ляпунова для различных вариантов распределения параметра кривизны в уравнении Якоби. Как показало сравнение с результатами предыдущих исследований, оценки показателя Ляпунова, полученные усреднением большого числа отдельных реализаций поля Якоби, с высокой степенью точности приближают значение, полученное интегрированием по инвариантной мере. Таким образом было впервые продемонстрировано, что численный подход приводит к согласованным ответам в данной задаче.

Было предложено развить метод случайных матриц и применить его к исследованию уравнения эволюции магнитного поля в потоке проводящей жидкости. Мы рассмотрели специальный случай однородного и изотропного поля скоростей, который позволил аналитическим путем вывести закон распределения инвариантной меры и получить выражения для скорости роста магнитного поля. Тем самым был получен новый результат, сформулированный ниже.

**2. Найдены оценки скорости роста магнитного поля и старших статистических моментов в однородном и изотропном поле скоростей путем сведения к задаче о росте произведения случайных матриц.** Демонстрация результативности предложенного подхода позволяет рассчитывать, что он окажется эффективным и в более сложных задачах, в которых нарушается условие изотропии. Их изучение выходит за рамки диссертации, однако представляется перспективным в плане постановки новых направлений для исследования.

Конечно, следует признать, что реально наблюдаемые процессы, связанные с солнечными магнитными полями, устроены значительно сложнее и многообразнее, чем рассмотренные нами модельные примеры. Для их описания требуется включение в уравнения ряда дополнительных механизмов и определение управляющих коэффициентов, получить которые можно только из наблюдений. Поэтому анализ наблюдательных данных является неотъемлемой частью нашего исследования.

Подобный анализ обычно осложняется неоднозначностью трактовок, которую допускают изучаемые объекты. Показательным примером служит понятие солнечного цикла. Его представление на широтно-временной диаграмме было получено Маундером в начале 20 века. Вместе с тем, определение границ циклов до сих пор преимущественно велось путем визуального разделения характерных структур на диаграмме или на основе знака ведущей полярности в пятенных группах. Положение, безусловно, требовало улучшения и формализации подхода. Этого удалось достичь, применив идеи кластерного анализа. К этому относится следующий результат диссертации.

**3. Определены характеристики циклов и волн активности по современным и архивным данным на основе алгоритмической процедуры выделения структур на солнечных баттерфляй-диаграммах.**



Нами было показано, что ключевое понятие солнечной активности – солнечный цикл – может быть формализовано в рамках алгоритмической процедуры средствами кластерного анализа. Данный подход позволяет разрешать неопределенности, связанные с определением границ циклов, неизбежно возникающие при визуальном рассмотрении солнечных баттерфляй-диаграмм. Предложенная методика состоит в поэтапном уточнении формы и положении кластеров, представляющих собой отдельные волны и циклы активности. Метод основывается только на фактических координатах пятен на диске и не требует знаний о знаке магнитного поля в пятне.

То обстоятельство, что заранее не предполагается знание полярности пятен, позволяет использовать алгоритм для анализа исторических данных. Исторические данные, к которым мы относим наблюдения за 18-19 века, интересны, в частности, тем, что на этот период, предположительно, выпадали моменты существенной перестройки режимов работы солнечного динамо. Выводы нашей работы отчасти подтверждают эту гипотезу и свидетельствуют о необычной структуре одного из солнечных циклов. В этом единственном случае программе не удалось выделить волны активности в северном и южном полушарии, характерные для всех остальных рассмотренных циклов. Такое возможно, например, если магнитное поле было представлено квадруполем [79], в отличие от дипольной конфигурации, свойственной для всех последующих циклов. Заметим, что теория динамо допускает возможность образования подобной квадрупольной симметрии [72].

В качестве приложения представленный алгоритм позволяет оценить скорость распространения волн активности на баттерфляй-диаграмме. С точки зрения теории динамо, эту величину можно рассматривать как оценку скорости миграции тороидальной компоненты крупномасштабного поля Солнца. Количественные значения были получены для всех современных и части исторических циклов, за исключением упомянутого особого цикла.

Тороидальное магнитное поле представляет собой одну из компонент, участвующих в работе солнечного динамо. Вторая компонента – полоидальное поле – генерируется из первой в результате действия т.н. альфа-эффекта. Следуя современному представлению об альфа-эффекте, оценку скорости генерации полоидальной компоненты поля можно проводить на основе данных о тилт-угле биполярных областей на Солнце. Трудность состоит в том, что

эффект наклона биполярных областей выражен достаточно слабо и данные о его измерении крайне зашумлены. Для получения устойчивых результатов требуется выборка большого размера и специальные статистические методы обработки. Используемая в работе выборка была получена применением алгоритма выделения биполярных структур, предложенного в статье [87]. Объем выборки позволяет проводить детальное изучение широтно-временного распределения тилт-угла, тем самым обобщая и расширяя результаты основополагающей в данном разделе работы Стенфло и Косовичева [85]. Результаты подтвердили стандартные ожидания теории динамо, но при этом обнаружили ряд новых свойств. Их описанию посвящен заключительный раздел диссертации и кратко обобщается ниже.

**4. Представлено широтно-временное распределение тилт-угла биполярных областей на Солнце, обнаружены различия свойств больших и малых биполярных областей.** В работе показано, что распределением тилт-угла, усредненного по подходящим широтно-временным интервалам, антисимметрично по отношению к солнечному экватору. При этом абсолютные значения тилт-угла увеличиваются при движении от экватора к высоким широтам согласно закону Джоя.

Достаточно неожиданно обнаружилась существенная зависимость результатов от площади биполярных областей. Все биполи можно разделить на две группы, одну из них составляют биполи с площадью свыше 300 м.д.п., представленные преимущественно пятнами, а другую составляют биполи с площадями до 300 м.д.п., в которую в основном попадают эфемерные области. Свойства тилт-угла различаются между этими группами.

Результаты для больших биполей представляются более определенными и согласующимися с текущими ожиданиями теории динамо, чем для малых. В части результатов для крупных областей мы находимся в согласии с работой [85]. Как и предполагалось, мы обнаруживаем преимущественно положительный тилт-угол в северном полушарии и отрицательный в южном, при этом не просматривается существенные вариации тилт-угла от цикла к циклу (по результатам обработки данных за три цикла). Внутри самих циклов наблюдаются локальные отклонения от этого правила, однако их масштаб существенно меньше по сравнению, например, с данными по токовой спиральности [94]. Это позволяет сделать вывод о том, что  $\alpha$  является не просто

теоретическим механизмом, а может проявляться в наблюдательных данных. При этом, однако, наши результаты напрямую не позволяют сделать вывода о конкретном механизме реализации альфа-эффекта, но могут служить основой для сопоставления с результатами численного моделирования. В частности, полученная нами количественная оценка  $\alpha$  как интегрального вклада по отдельным биполям хорошо согласуется со стандартными представлениями о порядке этой величины.

В области малых биполей мы обнаружили, что их свойства начинают значительно отличаться от свойств больших биполей на границе  $S = 300$  м.д.п. Прежде всего это проявляется в противоположном знаке тилт-угла и, соответственно, в обратном характере закона Джоя. Также мы наблюдаем различие в ряде других специфичных свойств.

В этом месте нужно сделать ряд замечаний, относительно характера нашего исследования. Прежде всего, мы опирались на результаты алгоритмического выделения биполярных структур на магнитограммах. Тестирование этого алгоритма не выявило каких-либо систематических особенностей в его работе, приводящих к различию больших и малых биполей. Конечно, в ряде случаев выделенные области не согласуются со зрительным восприятием, однако мы полагаем, что это не должно вносить существенных искажений в картину в среднем, которую мы изучаем. Ввиду уникального характера данного исследования, его результаты пока не удастся напрямую сопоставить с аналогичными исследованиями, которые могли бы подтвердить или опровергнуть наши предположения. Для этого потребуются проведение независимых исследований и применение других схем выделения биполярных структур, а также демонстрация таких эффектов в численном моделировании.

На основании различия свойств для двух групп биполей мы высказываем предположение, что большие и малые биполи связаны с тороидальной и полоидальной компонентами поля соответственно. Построенные шаротно-временные диаграммы распределения тилт-угла выступает в пользу такой интерпретации. В самом деле, связь больших биполей с тороидальным полем предполагается в теории динамо. Вопрос в том, какую компоненту представляют малые биполи. Как оказалось, широтно-временная диаграмма распределения тилт-угла малых биполей существенно непохожа на распределение пятен. В то же время есть схожие черты с распределением крупномасштабно-

го поверхностного поля [73], которое, как полагается, связано с полоидальным полем. Тот факт, что малые биполи демонстрируют специфические свойства по отношению к другим характеристикам биполя, также свидетельствует об их особом происхождении. С другой стороны, можно было бы ожидать более разительного отличия больших и малых биполей, например скачкообразного изменения графиков. Тот факт, что, согласно динамо моделям, тороидальная компонента поля существенно сильнее полоидальной, вполне бы согласовывался со скачкообразным изменением свойств. По нашему мнению, дальнейшее прояснение этого вопроса лежит в области численного эксперимента, который, однако, выходит за рамки данной диссертации, но является одной из актуальных задач, которую ставит перед собой автор.

Говоря о перспективах и дальнейшем направлении развитии тематики, заявленной в диссертации, можно высказать предположение, что основной упор будет делаться на согласовании теоретических оценок, результатов моделирования и наблюдательных данных. В нашей работе мы уделили внимание всем трем аспектам, в результате выделился новый круг задач, в которых объединяются различные подходы к изучению и появляется принципиальная возможность для сопоставления результатов. Созданный в работе задел позволит привлечь внимание широкого круга специалистов к вопросам количественного описания процессов в случайных средах.

## Список литературы

1. Артюшкова М. Е., Соколов Д. Д. Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // *Астрономический журнал*. 2005. Т. 82. № 7. С. 584–589.
2. Боровков А. А. Математическая статистика // М.: Наука, 1984. 472 с.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры // М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 590 с.
4. Витинский Ю. И. Солнечная активность // М.: Наука, 1983. 193 с.
5. Витинский Ю. И., Копецкий М., Куклин Г. В. Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца // М.: Наука, 1986. 295 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики // М.: Наука, 1981. 512 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц // М.: Наука, 1966. 576 с.
8. Грачев Д. А., Соколов, Д. Д. Высшие статистические моменты решения уравнения Якоби со случайной кривизной // Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 3, Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Математическое моделирование и краевые задачи. 2008. С. 83–86.
9. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом // М.: Мир, 1971. 344 с.
10. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: методы и приложения // М.: Наука. 1979.
11. Зельдович Я. Б. Наблюдения во Вселенной, однородной лишь в среднем // *Астрономический журнал*. 1964. Т. 41. С. 19–24.

12. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Перемежаемость в случайной среде // Успехи физических наук. 1987. Том 52. № 1. С. 3–32.
13. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике // М.-Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2006. 384 с.
14. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физических наук. 1985. Том 146. Выпуск 3. С. 493–506.
15. Иванова Е. В., Хованская О. С. Эффективная кривизна вселенной при наблюдении удаленных объектов // Астрономический журнал. 2005. Т. 82. № 10. Р. 867–873.
16. Илларионов Е. А. Стационарное распределение для уравнения Якоби с большим случайным параметром кривизны // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 38–43.
17. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д. Алгоритмическое выделение крыльев бабочек-диаграмм // Астрономический циркуляр. 2012. № 1580. С. 1–4.
18. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д. Образование структур и произведение случайных матриц // Сборник трудов Международной конференции МСС-14: Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность. 2014. С. 191–196.
19. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Перемежаемость и произведение случайных матриц // Современные проблемы математики и механики. 2015. Т. 10. № 3. С. 94–100.
20. Илларионов Е. А., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. С. 218–225.
21. Илларионов Е. А., Тлатов А. Г. Средний профиль пятен в 24-м цикле активности // Труды XIX Всероссийской ежегодной конференции по физике Солнца «Солнечная и солнечно-земная физика – 2015». 2015. С. 169–172.

22. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299-303.
23. Казанцев А. П. Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1967. № 53. С. 1806–1813.
24. Колмогоров А. Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости // ДАН СССР. 1941. Т. 31. № 6. С. 538-541.
25. Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. 1941. Т. 32. № 1. С. 19-21.
26. Криводубский В. Н. Вращательная анизотропия и магнитное подавление гиротропной турбулентности в конвективной зоне Солнца. // Астрономический журнал. 1998. Т. 75. С. 139–143.
27. Ламбурт В. Г., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Математические заметки. 2003. Т. 74. № 3. С. 416–424.
28. Михайлов Е. А., Илларионов Е. А., Модяев И. И. Скорость роста галактического магнитного поля в модели динамо со случайными коэффициентами // Сборник трудов XI конференции молодых учёных «Фундаментальные и прикладные космические исследования». 2014. Москва. Сборник трудов под ред. А.М.Садовского, С. 83–87.
29. Михайлов Е. А., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Фундаментальная матрица для уравнений Якоби со случайными коэффициентами. // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 261–268.
30. Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова // Труды Московского математического общества. 1968. Т.19. С. 197–231.
31. Подбельский В. В., Фомин С.С. Курс программирования на языке Си // М.: ДМК Пресс, 2012. 384 с.

32. Соколов Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Динамо: на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту. // Успехи физических наук. 2014. Т. 184. № 3. С. 313–335.
33. Сун В., Якселл С. Минимум Маундера и переменные солнечно-земные связи // М.-Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2008. 328 с.
34. Тутубалин В. Н. Уход на бесконечность произведения случайных матриц // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1990. № 3. С. 6–13.
35. Хлыстова А. И., Соколов Д. Д. Тороидальное магнитное поле Солнца по данным р группах пятен, нарушающих правило Хейла // Астрономический журнал. 2009. Т. 86. №. 3. Р. 316–320.
36. Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы // М.-Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2010. 332 с.
37. Arlt R. Digitization of sunspot drawings by Staudacher, in 1749–1796 // Solar Physics. 2008. Vol. 247. P. 399–410.
38. Arlt R. The solar butterfly diagram in the 18th century // Solar Physics. 2009. Vol. 255. P. 143–153.
39. Babcock H. The topology of the sun's magnetic field and the 22-year cycle. // The Astrophysical Journal. 1961. Vol. 133. P. 572–587.
40. Bellman R. Limit theorem for non-commutative operations. // Duke Mathematical Journal. 1954. Vol. 21. P. 491–500.
41. Bezdek J. C. Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms. // New York: Plenum Press, 1981. 272 p.
42. Bougerol P., Lacroix J. Product of random matrices with application to Schrödinger operators. // Progress in Probability and Statistics. Vol. 8. 1985. P. 1–283.
43. Brandenburg A. The case for a distributed solar dynamo shaped by near-surface shear // The Astrophysical Journal. 2005. Vol. 625. Issue 1. P. 539–547.



44. Brouwer M. P., Zwaan, C. Sunspot nests as traced by a cluster analysis // Solar Physics. 1990. Vol. 129 P. 221–246.
45. Choudhuri A. R., Karak B. B. Origin of grand minima in sunspot cycles // Physical Review Letters. 2012. Vol. 109, Issue 17. Id 171103. P. 1–5.
46. Choudhuri A. R., Schüssler M., Dikpati M. The solar dynamo with meridional circulation // Astronomy and Astrophysics. 1995. Vol. 303. P. L29–L32.
47. Clette F., Svalgaard L., Vaquero J. M., Cliver E. W. Revisiting the sunspot number // Space Science Reviews. 2014. Vol. 186. Issue 1. P. 35–103.
48. Dasi-Espuig, M., Solanki, S.K., Krivova, N.A., Cameron, R., Penuela, T. Sunspot group tilt angles and the strength of the solar cycle // Astronomy and Astrophysics. 2010. Vol. 518. Id. A7. P. 1–10.
49. Comtet A., Texier C., Tourigny Y. Products of random matrices and generalised quantum point scatterers. //Journal of Statistical Physics. 2010. Vol. 140. P. 427–466.
50. Dempster A. P., Laird N. M. Rubin, D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1977. Vol. 39. N 1. P. 1–38.
51. Dikpati M., Charbonneau P. A Babcock-Leighton flux transport dynamo with solar-like differential rotation // The Astrophysical Journal. 1999. Vol. 518. Issue 1. P. 508–520.
52. Dikpati M., Gilman P. A. Flux-transport dynamos with alpha-effect from global instability of tachocline differential rotation: A solution for magnetic parity selection in the Sun // The Astrophysical Journal. 2001. Vol. 559. Issue 1. P. 428–442.
53. Ester M., Kriegel H.-P., Sander J., Xu X. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. // Proceedings of the Second International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 1996. P. 226–231.

54. Furstenberg H. Noncommuting random products // Transactions of the American Mathematical Society. 1963. Vol. 108. P. 377–428.
55. Furstenberg H., Kesten H. Products of random matrices // The Annals of Mathematical Statistics. 1960. Vol. 31. N 2. P. 457–469.
56. Hale, G. E., Nicholson, S. B. The law of sun-spot polarity // The Astrophysical Journal. 1925. Vol. 62. P. 270–300.
57. Hale G. E., Ellerman F., Nicholson B., Joy A. H. The magnetic polarity of sunspots // Astrophysical Journal. 1919. Vol. 49. P. 153–178.
58. Hathaway D. H., Wilson R. M. Reichmann E. J. Group sunspot numbers: Sunspot cycle characteristics // Solar Physics. 2002. Vol. 211. P. 357–370.
59. Hoyt D. V., Schatten K.H. Sunspot numbers: A new solar activity reconstruction // Solar Physics. 1998. Vol. 179. P. 189–219.
60. Illarionov E., Sokoloff D., Arlt R., Khlystova A. Cluster analysis for pattern recognition in solar butterfly diagrams // Astronomische Nachrichten. 2011. Vol. 332. P. 590–596.
61. Illarionov E., Tlatov A., Sokoloff D. The properties of the tilts of bipolar solar regions // Solar Physics. 2015. Vol. 290. Issue 2. P. 351–361.
62. Käpylä P. J., Korpi M. J., Brandenburg A. Large-scale dynamos in turbulent convection with shear // Astronomy and Astrophysics. 2008. Vol. 491. Issue 2. P. 353–362.
63. Käpylä P. J., Korpi M. J., Ossendrijver M., Stix M. Magnetoconvection and dynamo coefficients III: alpha-effect and magnetic pumping in the rapid rotation regime // Astronomy and Astrophysics. 2006. Vol. 455. Issue 2. P. 401–412.
64. Leighton R. B. A magneto-kinematic model of the solar cycle // Astrophysical Journal. 1964. Vol. 156. P. 1–26.
65. Leighton R. B. Transport of Magnetic Fields on the Sun // Astrophysical Journal. 1964. Vol. 140. P. 1547–1562.

66. Letac G., Seshadri V. A characterisation of the generalised inverse gaussian distribution by continued fractions. // *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. 1983. Vol. 62. P. 485–489.
67. Li J., Ulrich R. K. Long-term measurements of sunspot magnetic tilt angles // *Astrophysical Journal*. 2012. Vol. 758. P. 115–127.
68. Li K. J., Yun H. S., Gu X. M. Latitude migration of sunspot groups // *The Astronomical Journal*. 2001. Vol. 122. N 4. P. 2115–2117.
69. Liu Y., Norton A. A. MDI measurement errors: The magnetic perspective // *SOI-Technical Note*. 2011. Issue 01-144. P. 1–35.
70. Marklof J., Tourigny Y., Wolowski L. Explicit invariant measures for products of random matrices. // *Transactions of the American Mathematical Society*. 2008. Vol. 360. N 7. P. 3391–3427.
71. Maunder E. W. Note on the distribution of sun-spots in heliographic latitude, 1874–1902 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1904. Vol. 64. P. 747–761.
72. Moss D., Saar S. H., Sokoloff D. What can we hope to know about the symmetry properties of stellar magnetic fields? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2008. Vol. 388. P. 416–420.
73. Obridko V. N., Sokoloff D. D., Kuzanyan K. M., Shelting B. D., Zakharov V. G. Solar cycle according to mean magnetic field data // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2006. Vol. 365. P. 827–832.
74. Parker E. N. Hydromagnetic Dynamo Models. // *Astrophysical Journal*. 1955. Vol. 122. P. 293–314.
75. Petrovay K., Abuzeid B. K. Cluster analysis of the space-time distribution of sunspot groups during solar cycle No. 20 // *Solar Physics*. 1991. Vol. 131. P. 231–237.
76. Pipin V. V., Kosovichev A. G. Mean-field solar dynamo models with a strong meridional flow at the bottom of the convection zone // *The Astrophysical Journal*. 2011. Vol. 738. Issue 1. Id. 104. P. 1–8.

77. Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin Vl., Opanasenko V. "Lomonosov": Supercomputing at Moscow State University // Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale. 2013. P. 283–307.
78. Seehafer N. Nature of the alpha effect in magnetohydrodynamics // Physical Review E. 1996. Vol. 53. Issue 1. P. 1283–1286.
79. Sokoloff D., Arlt R., Moss D., Saar S. H., Usoskin I. Sunspot cycles and Grand Minima // Proceedings of the International Astronomical Union. 2009. N 5. P. 111–119.
80. Sokoloff D., Illarionov E. A. Intermittency and random matrices // Journal of Plasma Physics. 2015. Vol. 81. Issue 4. P. 1–13.
81. Sokoloff D. D., Khlystova A. I. The solar dynamo in the light of the distribution of various sunspot magnetic classes over butterfly diagram // Astronomische Nachrichten. 2010. Vol. 331. N 1. P. 82–87.
82. Solanki S. K., Usoskin I. G., Kromer B., Schüssler M., Beer J. Unusual activity of the Sun during recent decades compared to the previous 11000 years // Nature. 2004. Vol. 431. N 7012. P. 1084–1087.
83. Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke  $v \times B$  für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung // Zeitschrift für Naturforschung. 1966. Vol. 21a. P. 369–376.
84. Stenflo J. O. Solar magnetic fields as revealed by Stokes polarimetry // The Astronomy and Astrophysics Review. 2013. Vol. 21. Id 66. P. 1–64.
85. Stenflo J. O., Kosovichev A. G. Bipolar magnetic regions on the Sun: Global analysis of the SOHO/MDI data set // The Astrophysical Journal. 2012. Vol. 745. Issue 2. Id 129. P. 1–12.
86. Tlatov A. G., Illarionov E. A., Sokoloff D. D., Pipin V. V. A new dynamo pattern revealed by the tilt angle of bipolar sunspot groups // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 432. Issue 4. P. 2975–2984.

87. Tlatov A. G., Vasil'eva V. V., Pevtsov A. A. Distribution of magnetic bipoles on the Sun over three solar cycles // *The Astrophysical Journal*. 2010. Vol. 717. Issue. P. 357–362.
88. Tutubalin V. N. A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications. // *Symposia Mathematica*. 1977. Vol. 21. P. 101–116.
89. Tutubalin V. N. On limit theorems for the product of random matrices // *Theory of Probability and its Applications*. 1965. Vol. 10. N 1. P. 15–27.
90. Usoskin I. G., Mursula K., Kovaltsov G. A. Was one sunspot cycle lost in late XVIII century? // *Astronomy and Astrophysics*. 2001. Vol. 370 P. L31–L34.
91. Wolf R. Abstract of his latest results // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1861. Vol. 21. P. 77–78.
92. Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S. A. 1988 Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium. // *Soviet Scientific Reviews*. Vol. 7. P. 1–110.
93. Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S. A., Sokoloff, D.D. Kinematic dynamo problem in a linear velocity field // *Journal of Fluid Mechanics*. 1984. Vol. 144. P. 1–11
94. Zhang H., Sakurai T., Pevtsov A., Gao Y., Xu H., Sokoloff D. D., Kuzanyan K. A new dynamo pattern revealed by solar helical magnetic fields // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2010. Vol. 402. P. 30–33.
95. Zolotova N. V., Ponyavin D. I. 2011: Enigma of the solar cycle 4 still not resolved, // *The Astrophysical Journal*. 2011. Vol. 736. P. 115–120.