

Глушихина Мария Владимировна

**Вычисление кинетических коэффициентов
произвольно вырожденных электронов в
замагниченном плотном веществе**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Бисноватый-Коган Геннадий Семенович

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Уравнение Больцмана и уравнения переноса	17
1.1. Уравнение Больцмана и уравнения переноса для произвольно вы- рожденных электронов	17
1.2. Метод Чепмена-Энскога для решения уравнения Больцмана	20
Заключение к первой главе	25
Глава 2. Расчёт матричных элементов для интегралов столкно- вений	28
2.1. Матричные элементы b_{jk}	28
2.2. Матричные элементы a_{jk}	36
Заключение ко второй главе	42
Глава 3. Тензоры теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта для невырожденных электро- нов в магнитном поле	43
3.1. Выражения для тензоров кинетических коэффициентов в общем виде	43
3.2. Тензоры теплопроводности и термодиффузии для невырожден- ных электронов	45
3.3. Сравнение точного решения для теплопроводности и термодиф- фузии в приближении Лоренца с полиномиальным разложением	53
3.4. Тензоры диффузии и диффузионного термоэффекта для невы- рожденных электронов	60

3.5. Сравнение точного решения для диффузии и диффузионного термоэффекта в приближении Лоренца с полиномиальным разложением	69
Выводы к третьей главе	75
Глава 4. Расчёт коэффициентов теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта в случае частичного вырождения	77
4.1. Тензоры теплопроводности и термодиффузии для частного случая частично вырожденных электронов	77
4.2. Тензор теплопроводности для сильно вырожденных электронов, полученный методом последовательных приближений	80
4.3. Тензоры диффузии и диффузионного термоэффекта в случае частично вырожденных электронов	82
Выводы к четвёртой главе	84
Глава 5. Расчет коэффициентов теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта в случае сильного вырождения	86
5.1. Уравнение Больцмана в приближении Лоренца	86
5.2. Теплопроводность и термодиффузия вырожденных электронов в магнитном поле	88
5.3. Диффузия и диффузионный термоэффект вырожденных электронов в магнитном поле	95
Выводы к пятой главе	103
Заключение	106
Цитируемая литература	109

Введение

Актуальность работы

Нейтронные звезды и белые карлики - иногда их объединяют под общим названием "вырожденные звёзды", принадлежат к числу наиболее удивительных объектов во Вселенной. Они имеют малые радиусы, приблизительно 10 км и 1000 км соответственно, но при этом масса нейтронной звёзды сравнима с солнечной. Вещество нейтронных звёзд сжато до очень больших плотностей, вплоть до 10^{14} г/см³ в центральных областях, возможно, и более. Плотность вещества белых карликов меньше, может достигать 10^8 г/см³. Кроме экстремальных плотностей у вырожденных звёзд наблюдаются одни из самых больших значений магнитных полей во Вселенной - до 10^{15} Гс у поверхности нейтронных звёзд, и около 10^8 Гс у поверхности белых карликов. Вырожденные звёзды образуются на конечной стадии эволюции звезд. При гравитационном коллапсе ядер обычных звезд с массой $M \geq 8M_{\odot}$ вещество центральных слоев сжимается до ядерных плотностей и нейтронизируется. При образовании нейтронной звезды выделяется огромная энергия, примерно 20% энергии-массы покоя звезды, но почти вся она выделяется в виде нейтрино [1, 2, 3]. Коллапс прекращается, когда в центре формируется стабильная нейтронная звезда. Общее число нейтронных звезд в галактике оценивается в $10^8 - 10^9$, из них радиопульсаров, то есть молодых нейтронных звезд - порядка 10^5 [4]. В звёздах с массой до $8 M_{\odot}$ термоядерная эволюция ядра с массой меньше критической массы Чандрасекара не доходит до образования элементов группы железа. В зависимости от начальной массы, она останавливается на стадиях гелиевого или углеродно-кислородного вырожденного ядра. Такое ядро постепенно остывает и превращается в белый карлик. Предполагается, что белые карлики составляют от 3% до 10% от всего звездного населения нашей галактики [5].

Внутреннее строение нейтронных звёзд и белых карликов известно с боль-

шой степенью неопределенности из-за отсутствия лабораторных данных о свойствах вещества в сверхплотном состоянии. Специфические свойства ионизированного газа при сверхвысоких плотностях определяются вырождением. Из-за принципа Паули в вырожденном газе скорости электронов даже вблизи абсолютного нуля остаются большими, следовательно давление вырожденного газа мало зависит от температуры.

Наблюдательные проявления белых карликов ярко видны в составе тесной двойной системы, где под действием приливных сил вещество перетекает со звезды-компаньона, что приводит к увеличению массы белого карлика. При приближении к чандрасекаровскому пределу возникает термоядерное горение, приводящее к взрыву. Такие системы называются взрывными или катаклизмическими переменными. Одиночные удалённые белые карлики наблюдать достаточно трудно из-за их малой светимости $L_{wd} \sim 10^{-3} L_{\odot}$ [5].

Наблюдательные проявления нейтронных звезд многообразны. Раньше всех, в 60-х годах прошлого века, были обнаружены классические радиопульсары и аккрецирующие нейтронные звезды в тесных двойных системах. Если в тесной двойной системе у нейтронной звезды магнитное поле $> 10^{10}$ Гс – наблюдается феномен рентгеновского пульсара. Если магнитное поле на НЗ меньше 10^{10} Гс перетекшее вещество накапливается и, при превышении некоторого критического значения плотности и температуры, на поверхности НЗ происходит термоядерный взрыв. Такие взрывы наблюдаются в виде вспыхивающих рентгеновских источников или барстеров [6].

Позднее были открыты различные типы одиночных нейтронных звёзд, такие как: мягкие гамма повторители (SGR), аномальные рентгеновские пульсары (AXPs), центральные компактные объекты в остатках сверхновых (CCOs in SNRs), вращающиеся радио транзиенты (RRATs) и рентгеновские одиночные нейтронные звёзды XDINS, у последних есть ещё и неформальное название - Великолепная семёрка (Magnificent Seven - M7)[7, 8, 9].

Первый объект из Великолепной семерки, RXJ1856-3754 был открыт 1996 году [10]. В дальнейшем были открыты: RX J1605.3+3249, RBS1223, RX J0806.4-4132, RX J0720.4-3125, RX J0420.0-5022, 1RXS J214303.7+065419 [11]. Эти звёзды расположены недалеко друг от друга, на расстоянии нескольких сотен парсек, их возраст составляет несколько сотен тысяч лет, они излучают в мягком рентгеновском диапазоне спектра из-за остывания их поверхности и являются радио-тихими. Среди всех нейтронных звёзд с тепловым излучением только M7 обладают чистым чёрнотельным спектром, без добавления излучения от аккреционного диска, окружающей туманности или остатка сверхновой [12, 13]. Все объекты из XDINS были обнаружены спутником ROSAT и, несмотря на усиленные поиски, с 2001 года не было обнаружено новых кандидатов. Но в 2011 году, по данным наблюдений телескопа Chandra, был обнаружен объект PSR J0726-2612, который подходил по параметрам для XDINS, и позднее, данные с XMM-Newton показали, что пульсар не только является XDINS, но еще и обладает радиозлучением. [14]

Наблюдения теплового излучения от поверхности нейтронной звезды крайне важны, они могут предоставить информацию о массе и радиусе звезды, что необходимо для определения уравнения состояния её материи, химическом составе внешней оболочки, распределении температуры по поверхности и конфигурации магнитного поля [15]. Анализ теплового излучения M7 в рентгеновском диапазоне указывает на периодические изменения [16], причиной которых является анизотропное распределение температуры по поверхности звезды. В широкой области от оптического до рентгеновского диапазона спектр излучения таких НЗ не может быть представлен как спектр излучения с поверхности с одной температурой. Анизотропия температуры встречается в областях с низкой и средней плотностью, таких как твердая кора, где сложная геометрия магнитного поля могла вызвать магнитотепловую эволюцию. В некоторых предельных случаях при достаточно сильном магнитном поле анизотропия мо-

жет существовать в плохо изученной внутренней области, где за отток энергии отвечают также процессы с участием нейтрино [17].

Для того, чтобы описать тепловое излучение и понять процессы влияющие на распределение заряда и тепла по поверхности нейтронной звезды необходимо знать свойства переноса в её веществе. В зависимости от состояния вещества внутри НЗ выделяются четыре основные зоны: внешняя и внутренняя кора, и внешнее и внутреннее ядро [18]. Ширина внешней коры 300 – 600 м, плотность $\rho < \rho_{nd} = 4 * 10^{11}$ г/см³. Величина ρ_{nd} соответствует плотности, при которой в равновесии появляются свободные нейтроны. Внешняя кора состоит из приповерхностного слоя невырожденных электронов, которые становятся вырожденными при продвижении глубже к центру звезды, и ионов. Ионы обычно рассматриваются как невырожденные. Они могут находиться в газообразном состоянии, могут формировать кулоновскую жидкость или кулоновский кристалл [19]. Кристаллическая структура кулоновских кристаллов отличается от кристаллов, которые находятся на Земле. В земных кристаллах главный вклад в упругость вносит взаимодействие между ионами и атомами, вклад свободных электронов в давление существенно меньше. В коре нейтронной звезды упругость электронов в сотню раз превосходит упругость кристаллической решетки. Прочность решетки такого кристалла мала, и она легко ломается при внешнем воздействии [20].

Внутренняя кора, с толщиной от 500 до 800 метров от поверхности, где плотность вещества лежит в диапазоне $\rho_{nd} \leq \rho \leq 0.5\rho_0$, где $\rho_0 = 2.8 * 10^{14}$ г/см³ - это ядерная плотность. Во внутренней коре электроны находятся в состоянии ультрарелятивистского вырожденного газа, ядра обогащены нейтронами. Свободные нейтроны образуют сильно вырожденную Ферми-жидкость.

Во внешнем ядре плотность вещества лежит в диапазоне от половины до двух ρ_0 , предполагается, что оно представляет собой однородную материю из сильно вырожденных протонов, нейтронов, электронов. Нуклоны образуют

неидеальные ферми-жидкости, а электроны - идеальные ферми-газы. В массивных нейтронных звёздах может быть и внутреннее ядро, в котором предполагается плотность от двух до двадцати ρ_0 . Состав внутреннего ядра достоверно не известен. [18]

Данная диссертационная работа посвящена расчёту кинетических коэффициентов в произвольно вырожденном, замагниченном, плотном веществе, которое входит в состав внешней и внутренней коры нейтронной звезды, а так же центральных слоёв белых карликов. Потоки тепла и плотности токов в оболочке нейтронных звёзд определяются коэффициентами теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта. Теплопроводность — основная величина, необходимая для вычисления взаимосвязи между внутренней температурой нейтронной звезды и эффективной температурой на ее поверхности. Связь между этими величинами влияет на тепловую эволюцию нейтронной звезды и ее радиационные спектры. Диффузия необходима для вычисления распределения токов, что позволит исследовать геометрию магнитного поля на поверхности звезды и, возможно, глубже в коре.

Классические методы кинетической теории газов были разработаны Максвеллом, Больцманом, Гильбертом, Энскогом и Чепменом. Эти методы представлены в монографии Чепмена и Каулинга [21]. Они основаны на решении уравнения Больцмана методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения берется термодинамически равновесная функция распределения: для невырожденного газа — распределение Максвелла, для случая, когда вырождение важно, — распределение Ферми–Дирака. Равновесная функция распределения не дает точное решение уравнения Больцмана при наличии неоднородности. Согласно методам, предложенным в [21], необходимо искать решение уравнения Больцмана в первом приближении как разложение по полиномам Сонина (Лагерра), которое справедливо для невырожденного газа. Чтобы учесть вырождение, используется система ортогональных функций, ко-

торые являются обобщением полиномов Сонина, предложенная в [22, 23, 24], см. также [25]. Обычно для вычисления теплопроводности берутся первые два члена разложения. В [26] было показано, что такое приближение дает существенные погрешности для коэффициента теплопроводности, которые становятся намного меньше, когда используется разложение до третьей степени полинома. Первое применение уравнения Больцмана к газу из заряженных частиц было сделано Чепменом [21]. Из-за расходимости интеграла столкновений при больших прицельных параметрах для частиц с кулоновским взаимодействием в качестве верхнего предела интегрирования по прицельному параметру было взято среднее расстояние между частицами. Таким образом, были получены коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии для газов, состоящих из заряженных частиц. Расхождение интеграла столкновений для кулоновского взаимодействия при больших прицельных параметрах показывает, что рассеяние частиц с большим прицельным параметром и малым изменением импульса при единичном столкновении играет более важную роль, чем столкновения с большим изменением импульса. Ландау использовал этот факт для упрощения интеграла столкновений Больцмана [27]. Он выполнил разложение функции распределения после столкновения при малых изменениях импульса и оставил первые два члена разложения. Полученный таким образом интеграл называют интегралом столкновений Ландау. Другой вывод интеграла столкновений Ландау был сделан Чандрасекаром [28], который использовал аналогию с броуновским движением, которое описывается уравнением Фоккера–Планка. Коэффициенты теплопроводности, электропроводности, термодиффузии и диффузионного термоэффекта для полностью ионизованного газа без магнитного поля были численно получены в работах [29, 30]. Кинетические коэффициенты для невырожденной плазмы при наличии и отсутствии магнитного поля были вычислены в [31, 32, 33] с использованием метода разложения Чепмена–Энскога с интегралом столкновений в больцмановском виде. В случае отсутствия маг-

нитного поля результаты [31, 32, 33] совпадают с результатами [29, 30], так как столкновительные члены в виде Больцмана и Фоккера–Планка для кулоновского взаимодействия эквивалентны. Идентичность интегралов столкновений Ландау и Фоккера–Планка показана в [34], см. также [35].

Уравнение Больцмана можно решать методом Грэда, который также называют методом моментов [36]. Свойства переноса в полностью ионизованной плазме методом Грэда были исследованы в работах Самохина [37, 38, 39]. В методе Грэда функцию распределения можно представить в таком виде, что зависимость от времени и координат будет проявляться через соответствующую зависимость моментов скоростей частиц, это достигается с помощью разложения функции распределения в ряд по полиномам Эрмита–Чебышева. Отличие метода Грэда от метода Чепмена–Энскога состоит в том, что такие моменты скоростей, как тензор вязких напряжений, тепловой поток и т. д. рассматриваются не как вспомогательные переменные, выражения которых необходимо знать для получения уравнений гидродинамики, а как вполне самостоятельные переменные, характеризующие движение газа [40].

Брагинский [41] вычислил кинетические коэффициенты для невырожденной плазмы в магнитном поле, состоящей из электронов и одного сорта положительно заряженных ионов, используя кинетические уравнения, нормированные на средние скорости, различные для ионов и электронов. Использовался интеграл столкновений Ландау и учитывались два полинома в разложении. Такой же подход использовался в [42, 43], где представлены вычисления кинетических коэффициентов для полностью ионизированной плазмы со сложным составом. Кинетические коэффициенты для полностью ионизированной плазмы в магнитном поле были получены прямым численным расчетом уравнения Фоккера–Планка в [44]. Электропроводность высокотемпературной плазмы в однородном магнитном поле, состоящей из электронов и положительно заряженных ионов, была рассчитана в работе [45] методом Чепмена–Энскога с использова-

нием разложения по полиномам Сонина до 50-го члена.

Компоненты тензора теплопроводности для вырожденных звездных ядер были вычислены в приближении Лоренца для водородной плазмы в [46]. В [47] представлены нерелятивистские вычисления на основе квантового уравнение переноса Ленарда–Балеску для теплопроводности и электрической проводимости плазмы с сильно вырожденными, слабо связанными электронами и невырожденными, слабо связанными ионами.

Проводимость электронов в нейтронных звёздах и белых карликах при наличии магнитного поля была исследована в [48, 49]. Отношение между электропроводностью и теплопроводностью вдоль и поперек силовой линии магнитного поля, рассмотренное в этих работах, было получено феноменологически, с использованием теории свободного пробега.

Выражения для описания влияния магнитного поля на теплопроводность и электропроводность электронов в виде, использованном в статьях [48, 49], применялись и в последующих работах (см. [50, 51]).

В диссертационной работе показано, что кинетические коэффициенты произвольно вырожденных электронов в магнитном поле, полученные из решения уравнения Больцмана существенно точнее учитывают влияние магнитного поля на проводимость электронов в вырожденных звёздах. Новые коэффициенты переноса могут использоваться для моделирования распределения температуры и заряда, геометрии магнитного поля в белых карликах, на поверхности и в коре замагниченных нейтронных звёзд, описания поведения плазмы, получаемой и ускоряемой в лабораторных условиях.

Учитывая недавнее обнаружение нового объекта, похожего по свойствам на XDINS [14], и перспективы открытия большего числа подобных звёзд, вычисление точных значений кинетических коэффициентов в материи коры замагниченной одиночной нейтронной звезды представляется актуальным.

Цель диссертационной работы

состоит в нахождении кинетических коэффициентов произвольно вырожденных электронов в замагниченном плотном веществе. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- *Решение уравнения Больцмана методом Чепмена-Энскога с использованием разложения по трем полиномам, обобщающим полиномы Сонина, для произвольно вырожденных электронов в магнитном поле. Расчёты коэффициентов тензоров теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта для приближения невырожденных электронов выполнены в явном виде.*
- *Решение уравнения Больцмана в приближении Лоренца для сильно вырожденных электронов в магнитном поле и получение в явном виде компонент тензоров теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта.*

Научная новизна

Результаты, полученные впервые:

1. Получены аналитические выражения для четырёх тензоров кинетических коэффициентов из решения уравнения Больцмана методом Чепмена-Энскога в 3-полиномиальном приближении с учетом электрон-электронных столкновений для случая невырожденных электронов в магнитном поле. Учёт третьей степени полинома улучшил точность результатов.

2. Для сильно вырожденных электронов впервые получены асимптотически точные аналитические выражения для тензора теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта в приближении Лоренца с учётом магнитного поля. Это решение имеет значительно более сложную зависимость от магнитного поля, чем зависимости в предыдущих публикациях.

3. Для частного случая частичного вырождения при $\epsilon_f/kT = 1.011$ получены аналитические выражения для кинетических коэффициентов при отсут-

ствии магнитного поля из решения уравнения Больцмана в 3-х полиномиальном приближении. Показано, что сходимость полиномиального приближения к точному значению происходит медленнее, чем для невырожденных электронов.

Научная и Практическая значимость

Основные результаты диссертационной работы, определяющие её практическую и научную значимость, опубликованы в авторитетных научных изданиях. Проведенные расчёты коэффициентов переноса позволяют оценить влияние магнитного поля на перенос тепла и заряда в плотных областях нейтронных звезд и белых карликов. Основные результаты были использованы при построении трёхмерных моделей распределения температуры и заряда по поверхности замагниченной нейтронной звезды и для интерпретации наблюдательных данных [52]. Полученные выражения также могут быть использованы для описания коэффициентов переноса в других замагниченных объектах, содержащих свободные произвольно вырожденные электроны.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Получены компоненты тензоров теплопроводности, диффузии, диффузионного термоэффекта и термодиффузии произвольно вырожденных электронов в магнитном поле на основе решения уравнения Больцмана.

2. Получено решение уравнения Больцмана в приближении Лоренца для плазмы в магнитном поле с сильно вырожденными нерелятивистскими электронами и невырожденными ядрами. Это приближение, в котором пренебрегается электрон-электронными столкновениями, является асимптотически точным для плазмы с сильно вырожденными электронами. В приближении Лоренца вычислены компоненты четырёх тензоров кинетических коэффициентов в неквантовом магнитном поле.

3. Методом Чепмена-Энскога получено решение уравнения Больцмана для плазмы в магнитном поле с произвольным вырождением электронов и невы-

рожденными ядрами с использованием разложения по первым трём обобщенным полиномам Сони́на. Для невырожденных электронов впервые получено аналитическое выражение для четырёх тензоров кинетических коэффициентов в присутствии магнитного поля в 3-полиномиальном приближении с учетом электрон-электронных столкновений.

4. Исследовано влияние вырождения на сходимость 3-полиномиального решения к точному. Показано на примере приближения Лоренца, что точность приближения рядом ортогональных функций, обобщающих полиномы Сони́на, уменьшается с увеличением степени вырождения.

5. Показано, что кинетические коэффициенты, полученные из решения уравнения Больцмана точнее учитывают влияние магнитного поля на проводимость произвольно вырожденных электронов, чем приближенные коэффициенты, полученные феноменологически, с использованием теории свободного пробега. Влияние магнитного поля оказывается более сильным и имеет более сложный характер.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены в качестве устных и стендовых докладов на следующих международных конференциях:

- "Physics of Neutron Stars - 2011" (Санкт-Петербург, 2011 г.)
- "Thirteenth Marcel Grossmann Meeting - MG13" (Стокгольм, Швеция, 2012 г.)
- "Supernovae and Gamma-Ray Bursts in Kyoto, 2013" (Киото, Япония, 2013 г.)
- "40th COSPAR Scientific Assembly" (Москва, 2014 г.)
- "Fourteenth Marcel Grossmann Meeting - MG14" (Рим, Италия, 2015 г.)
- "European Week of Astronomy and Space Science - EWASS 2017" (Прага, Чехия, 2017 г.)
- "Physics of Neutron Stars - 2017" (Санкт-Петербург, 2017 г.)
- "High-Energy Phenomena in Relativistic Outflows VI" (Москва, 2017 г.)

- "28-th Plasma Physics Conference" (Прага, Чехия, 2018 г.)
- "Fifteenth Marcel Grossmann Meeting - MG15" (Рим, Италия, 2018 г.)
- "High-Energy Phenomena in Relativistic Outflows VII" (Барселона, Испания, 2019 г.)

всероссийских:

на конференциях Института Космических Исследований:

- "Конференция молодых ученых" (Москва, 2013, 2017 г.)

на астрофизических семинарах:

- "Магнитоплазменные процессы в релятивистской астрофизике" (Таруса, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2019 г.)
- Физического института РАН (Москва, 2018 г.)

Достоверность представленных результатов

Достоверность представленных в диссертационной работе результатов вычислений обеспечивается применением хорошо обоснованных классических методов кинетической теории газов, сравнением полученных результатов с результатами предшествующих работ по данной тематике и обсуждением на конференциях и семинарах. Основные результаты опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами. Все представленные в диссертации результаты получены автором в результате совместных исследований. Результаты, выносимые на защиту, согласованы с соавторами.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 115 страниц, из них 109 страниц текста, включая 13

рисунков. Библиография включает 81 наименование на 6 страницах.

Глава 1

Уравнение Больцмана и уравнения переноса

1.1. Уравнение Больцмана и уравнения переноса для произвольно вырожденных электронов

Для расчёта кинетических коэффициентов использовано уравнение Больцмана для произвольно вырожденных, нерелятивистских электронов в магнитном поле. Рассматривается электронный газ в кристаллической решетке из тяжелых ядер с учётом взаимодействия электронов с невырожденными ядрами и друг с другом. Ядерная составляющая материи в коре находится в кристаллическом состоянии, поэтому изотропная часть функции распределения f_{N0} может отличаться от распределения Максвелла. Если масса ядра m_N намного больше массы электрона m_e , то для членов $\sim m_e/m_N$ детали функции распределения f_{N0} неважны и вычисления могут быть сделаны для произвольной f_{N0} .

Уравнение Больцмана, описывающее изменение функции распределения электронов f с течением времени в присутствии электрического и магнитного полей, записывается как [33]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial r_i} - \frac{e}{m_e} (E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ikl} c_k B_l) \frac{\partial f}{\partial c_i} + J = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $(-e)$, m_e — заряд (отрицательный) и масса электрона, E_i , B_i — напряженность электрического поля и магнитная индукция, ε_{ikl} полностью антисимметричный тензор Леви–Чивиты, c — скорость света. Интеграл столкновений J для произвольного вырождения электронов, согласно [21, 22, 23, 24], записывается

в форме

$$J = J_{ee} + J_{eN} = R \int [f' f'_1 (1-f)(1-f_1) - f f_1 (1-f')(1-f'_1)] g_{ee} b db d\epsilon dc_{1i} + \int [f' f'_N (1-f) - f f_N (1-f')] g_{eN} b db d\epsilon dc_{Ni}. \quad (1.2)$$

Здесь прицельный параметр b и ϵ — геометрические параметры столкновения частиц с относительными скоростями g_{ee} , g_{eN} , $R = \frac{2m_e^3}{h^3}$. Интегрирование в электронной части интеграла столкновений в (1.2) производится по фазовому пространству налетающих частиц (dc_{1i}) и их физическому пространству ($b db d\epsilon$) [21]. Функции со скоростями после столкновения отмечены штрихами.

Уравнение Больцмана для электронов с интегралом парных столкновений (1.2) может применяться, когда электронный газ считается почти идеальным, т. е. кинетическая энергия электронов много больше, чем энергия электростатических взаимодействий. Это справедливо для плазмы достаточно малой плотности. В нейтронных звездах и белых карликах условие противоположное: плазма имеет очень большую плотность, при которой важно учитывать вырождение электронов. Из статистической физики известно, что газ из сильно вырожденных электронов становится идеальным, поскольку большие значения энергии Ферми при этом заменяют тепловую энергию [53]. Поэтому расчёты, выполненные здесь, справедливы для плазмы низкой плотности, а также для плазмы с высокой плотностью и вырожденными электронами. Детальное обсуждение применимости интеграла парных столкновений (1.2) и его модификаций для невырожденных газов высокой плотности можно найти в [21].

Введем тепловую скорость электронов $v_i = c_i - c_{0i}$, где c_{0i} является средней массовой скоростью. Уравнение Больцмана относительно тепловой скорости можно записать в форме [33]:

$$\frac{df}{dt} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} - \left[\frac{e}{m_e} (E_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ikl} v_k B_l) + \frac{dc_{0i}}{dt} \right] \frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{e}{m_e c} \epsilon_{ikl} v_k B_l \frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{\partial f}{\partial v_i} v_k \frac{\partial c_{0i}}{\partial r_k} + J = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{0i} \frac{\partial}{\partial r_i}.$$

Уравнение переноса для концентрации электронов, в двухкомпонентной смеси из электронов и ядер может быть получено обычным способом из уравнения Больцмана в квазинейтральной плазме [21, 32, 33] как

$$\frac{dn_e}{dt} + n_e \frac{\partial c_{0i}}{\partial r_i} + \frac{\partial}{\partial r_i} (n_e \langle v_i \rangle) = 0, \quad (1.4)$$

уравнение переноса импульса:

$$\rho \frac{dc_{0i}}{dt} = \frac{1}{c} \varepsilon_{ikl} j_k B_l - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k}, \quad (1.5)$$

уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k n_e \frac{dT}{dt} - \frac{3}{2} k T \frac{\partial}{\partial r_i} (n_e \langle v_i \rangle) + \frac{\partial q_{ei}}{\partial r_i} + \Pi_{ik}^e \frac{\partial c_{0i}}{\partial r_k} = \\ = j_i (E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ikl} c_{0k} B_l) - \rho_e \langle v_i \rangle \frac{dc_{0i}}{dt}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\Pi_{ik} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v_i^{\alpha} v_k^{\alpha} \rangle, \quad \Pi_{ik}^e = n_e m_e \langle v_i v_k \rangle, \quad (1.7)$$

$$\langle v_{\alpha i} \rangle = \frac{R}{n_{\alpha}} \int f v_{\alpha i} d c_{\alpha i}, \quad n_e = R \int f d c_{ei}, \quad (1.8)$$

$$c_{0i} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \langle c_{\alpha i} \rangle, \quad j_i = -n_e e \langle v_i \rangle, \quad (1.9)$$

$$q_{\alpha i} = \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v_{\alpha}^2 v_{\alpha i} \rangle. \quad (1.10)$$

Здесь суммирование производится по электронам и ядрам, $\Pi_{ik}^e = P_e \delta_{ik}$, $P_e = n_e m_e \langle v^2 \rangle / 3$, когда мы пренебрегаем электронной вязкостью, P_e является электронным давлением; $\langle v_i \rangle$ — средняя скорость электронов в сопутствующей системе, q_i — тепловой поток электронов и j_i — электрический ток электронов.

Здесь и в дальнейшем рассмотрении мы полагаем среднюю массовую скорость равной средней скорости ионов $c_{0i} = \langle c_{Ni} \rangle$, также мы рассматриваем электрический ток и тепловой поток только от электронов. В квазинейтральной плазме концентрация электронов n_e однозначно связана с плотностью ρ , определяемой ядрами с параметрами $\langle A, Z \rangle$, $m_N = Am_p$, $\rho = m_N n_N$, $n_e = \frac{Z\rho}{m_N}$.

Соотношения (1.4)-(1.6) являются системой гидродинамических уравнений. Запишем уравнения Максвелла, с учетом того, что магнитная проницаемость плазмы и диэлектрическая проницаемость вакуума приравнены единице [54]:

$$\epsilon_{ikl} \frac{\partial B_l}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} (j_i + \rho_e c_{0i}) + \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial t}, \quad \epsilon_{ikl} \frac{\partial E_l}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i} = 4\pi e n_e, \quad \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.12)$$

1.2. Метод Чепмена-Энскога для решения уравнения Больцмана

Уравнение Больцмана может быть решено методом последовательных приближений Чепмена-Энскога [21]. Данный метод используется, когда функции распределения близки к своим термодинамически равновесным значениям, а отклонения считаются линейными. Уравнение для второго порядка отклонений от функции равновесного распределения было получено в [55] для простого газа, см. также [21]. Сложность этого уравнения, а также довольно узкая область, где играют роль корреляции второго порядка, сильно ограничивают применение данного подхода.

Нулевое приближение для функции распределения вырожденных электронов есть распределение Ферми-Дирака (для невырожденных - Максвелла), которое найдено путем приравнивания к нулю интеграла столкновений J_{ee} из

(1.2):

$$f_0 = \left[1 + \exp \left(\frac{m_e v^2 - 2\mu}{2kT} \right) \right]^{-1} \quad R \int f_0 dv_i = n_e. \quad (1.13)$$

Здесь μ — химический потенциал электронов, k — постоянная Больцмана, T — температура. Функция распределения для ядер в нулевом приближении f_{N0} предполагается изотропной по скоростям и зависящей от локальных термодинамических параметров; она может быть произвольной с нормировкой:

$$n_N = \int f_{N0} dc_{Ni}, \quad (1.14)$$

где n_N — концентрация ядер, $n_e = Zn_N$, Z — заряды ядер. Пользуясь (1.13) в (1.4)–(1.10), мы получаем нулевое приближение для уравнения переноса. В этом приближении $\langle v_i \rangle = 0$, $q_i = 0$, $\Pi_{ik} = (P_e + P_N)\delta_{ik}$,

$$\begin{aligned} n_e &= 2 \left(\frac{2kTm_e}{h^2} \right)^{3/2} G_{3/2}(x_0), \\ P_e &= 2kT \left(\frac{2kTm_e}{h^2} \right)^{3/2} G_{5/2}(x_0), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$G_n(x_0) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{1 + \exp(x - x_0)}, \quad x_0 = \frac{\mu}{kT}, \quad (1.16)$$

где $G_n(x_0)$ интегралы Ферми. В дальнейшем вместо $G_n(x_0)$ мы будем писать G_n , поскольку аргумент не меняется. В первом приближении мы ищем функцию f в виде:

$$f = f_0[1 + \chi(1 - f_0)]. \quad (1.17)$$

Предполагается, что функция распределения f_{N0} удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{n_N} \int v_{Ni} v_{Nk} f_{N0} dc_{Ni} = \delta_{ik} \frac{kT}{m_N}. \quad (1.18)$$

Функция χ позволяет записать решение в форме:

$$\chi = -A_i \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} - n_e D_i d_i \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}, \quad (1.19)$$

где вектор диффузии записан в виде:

$$d_i = \frac{\rho_N}{\rho} \frac{\partial \ln P_e}{\partial r_i} - \frac{\rho_e}{P_e} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_N}{\partial r_i} + \frac{en_e}{P_e} \left(E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ikl} c_{0k} B_l \right). \quad (1.20)$$

Плазма предполагается квазинейтральной с нулевой плотностью заряда. Функции A_i и D_i определяют перенос тепла и диффузию соответственно. Для диффузии электронов гравитационная сила не важна, поэтому член отвечающий за гравитационную силу в (1.20) не выписан, но для диффузии ядер и нуклонов он может играть основную роль, см. [56]. Подставляя (1.19) в уравнение для χ , получаем уравнения для A_i , D_i [21]. В работах [33] было показано, что в присутствии магнитного поля B_i , полярные векторы A_i и D_i можно искать в виде:

$$\begin{aligned} A_i &= A^{(1)} v_i + A^{(2)} \varepsilon_{ijk} v_j B_k + A^{(3)} B_i (v_j B_j), \\ D_i &= D^{(1)} v_i + D^{(2)} \varepsilon_{ijk} v_j B_k + D^{(3)} B_i (v_j B_j), \end{aligned} \quad (1.21)$$

где v_i , $\varepsilon_{ijk} v_j B_k$, $B_i (v_j B_j)$ - три линейно независимых полярных вектора и $A^{(\alpha)}$, $D^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ - являются функциями скаляров v^2 и B^2 . Вводя функции

$$\xi_A = A^{(1)} + iBA^{(2)}, \quad \xi_D = D^{(1)} + iBD^{(2)} \quad (1.22)$$

и безразмерную скорость $u_i = \sqrt{m_e/(2kT)} v_i$, мы получаем, опуская малые по сравнению с единицей члены m_e/m_N , уравнения для ξ_A и ξ_D в виде:

$$f_0(1 - f_0) \left(u^2 - \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}} \right) u_i = -iBf_0(1 - f_0) \frac{e\xi_A}{m_e c} u_i + I_{ee}(\xi_A u_i) + I_{eN}(\xi_A n_i u_{Ni}), \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{n_e} f_0(1 - f_0) u_i = -iBf_0(1 - f_0) \frac{e\xi_D}{m_e c} u_i + I_{ee}(\xi_D u_i) + I_{eI}(\xi_D n_i u_{Ni}), \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned} I_{ee}(\xi_k u_i) &= R \int f_0 f_{01} (1 - f'_0) (1 - f'_{01}) (\xi_k u_i + \xi_{k1} u_{1i} - \xi'_k u'_i - \xi'_{k1} u'_{1i}) g_{ee} b db d\varepsilon dc_{1i}, \\ I_{eN}(\xi_k u_{Ni}) &= \int f_0 f_{N0} (1 - f'_0) (\xi_k u_i - \xi'_k u'_i) g_{eN} b db d\varepsilon dc_{Ni} \quad k = A, D. \end{aligned}$$

Согласно [21], решение для функций ξ_A и ξ_D находим в форме ряда ортогональных полиномов. Полиномы Сонина, которые использовались в классической работе [21], являются коэффициентами разложения функции $(1-s)^{-\frac{3}{2}-1} \exp[xs/(1-s)]$ по степеням s :

$$(1-s)^{-\frac{3}{2}-1} \exp\left(\frac{xs}{1-s}\right) = \sum S_{3/2}^{(p)}(x) s^p. \quad (1.25)$$

Полиномы Сонина ортогональны

$$\int_0^{\infty} e^{-x} S_{3/2}^{(p)}(x) S_{3/2}^{(q)}(x) x^{3/2} dx = \frac{\Gamma(p + \frac{5}{2})}{p!} \delta_{pq}, \quad (1.26)$$

и

$$S_{3/2}^{(0)}(x) = 1, \quad S_{3/2}^{(1)}(x) = \frac{5}{2} - x, \quad S_{3/2}^{(2)}(x) = \frac{35}{8} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}x^2. \quad (1.27)$$

Для вырожденного случая следует искать решение (1.23), (1.24) в виде разложения по полиномам Q_n , которые являются ортогональными с весом $f_0(1-f_0)x^{3/2}$, аналогично полиномам Сонина [25]:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1, \quad Q_1(x) = \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}} - x, \\ Q_2(x) &= \frac{35}{8} \frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} - \frac{7G_{7/2}}{2G_{5/2}}x + \frac{1}{2}x^2, \quad x = u^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ненулевые интегралы от произведений этих полиномов с соответствующей ве-

совой функцией:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f_0(1-f_0) x^{3/2} Q_0^2(x) dx &= \frac{3}{2} \Gamma(3/2) G_{3/2}(x_0), \\
\int_0^{\infty} f_0(1-f_0) x^{3/2} Q_1^2(x) dx &= \frac{15}{4} \Gamma(3/2) G_{3/2}(x_0) \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}^2}{2 G_{3/2}^2} \right), \\
\int_0^{\infty} f_0(1-f_0) x^{3/2} Q_2^2(x) dx &= \frac{105}{16} \Gamma(3/2) G_{3/2}(x_0) \left(-\frac{35 G_{7/2}^2}{8 G_{3/2}^2} + \frac{49}{2} \frac{G_{7/2}^3}{G_{5/2}^2 G_{3/2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{63 G_{9/2} G_{7/2}}{2 G_{5/2} G_{3/2}} + \frac{99 G_{11/2}}{8 G_{3/2}^2} \right).
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Мы ищем ξ и A_3 в виде

$$\begin{aligned}
\xi_A &= a_0 Q_0 + a_1 Q_1 + a_2 Q_2, & A^{(3)} &= c_0 Q_0 + c_1 Q_1 + c_2 Q_2, \\
\xi_D &= d_0 Q_0 + d_1 Q_1 + d_2 Q_2, & D^{(3)} &= z_0 Q_0 + z_1 Q_1 + z_2 Q_2.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Подставив (1.17) в (1.10) и (1.8), учитывая выражения (1.30), (1.22), (1.19), (1.28) и проинтегрировав по dc_i , получим выражения для средней диффузионной скорости и потока тепла в общем виде:

$$\begin{aligned}
\langle v_{\alpha i} \rangle &= -\frac{k}{m_e} [a_0 \delta_{ij} - \epsilon_{ijk} B_k b_0 + B_i B_j c_0] \frac{\partial T}{\partial x_j} \\
&\quad - [d_0 \delta_{ij} - \epsilon_{ijk} B_k e_0 + B_i B_j z_0] \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} n_e d_j,
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}
q_i &= -\frac{5 k^2 T n_e G_{5/2}}{2 m_e G_{3/2}} \left\{ \left[a_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) a_1^1 \right] \delta_{ij} \right. \\
&\quad \left. - \epsilon_{ijk} B_k \left[b_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) b_1^1 \right] + B_i B_j \left[c_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) c_1^1 \right] \right\} \frac{\partial T}{\partial x_j} \\
&\quad - \frac{5 k^2 T^2 n_e^2 G_{5/2}}{2 m_e G_{3/2}} \left\{ \left[d_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) d_1^1 \right] \delta_{ij} \right.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$-\varepsilon_{ijk}B_k \left[e_0^1 - \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{5/2}} - \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}} \right) e_1^1 \right] + B_i B_j \left[z_0^1 - \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{5/2}} - \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}} \right) z_1^1 \right] \left\} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} d_j$$

Умножая (1.23) и (1.24) на $RQ_0(x)u_i$, $RQ_1(x)u_i$ и $RQ_2(x)u_i$ и интегрируя относительно dc_i , мы получаем систему уравнений для нахождения a_0 и a_1 из (1.31), (1.32) в форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{3}{2}i\omega n_e a_0 + a_0(a_{00} + b_{00}) + a_1(a_{01} + b_{01}) + a_2(a_{02} + b_{02}), \\ -\frac{15}{4}n_e \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{3/2}} - \frac{5G_{5/2}^2}{2G_{3/2}^2} \right) = -\frac{15}{4} \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{3/2}} - \frac{5G_{5/2}^2}{2G_{3/2}^2} \right) i\omega n_e a_1 + a_0(a_{10} + b_{10}) \\ \quad + a_1(a_{11} + b_{11}) + a_2(a_{12} + b_{12}), \\ 0 = -\frac{105}{16} \left(-\frac{35G_{7/2}^2}{8G_{3/2}^2} + \frac{49G_{7/2}^2 G_{7/2}}{2G_{5/2}^2 G_{3/2}} - \frac{63G_{9/2} G_{7/2}}{2G_{5/2} G_{3/2}} + \frac{99G_{11/2}}{8G_{3/2}} \right) i\omega n_e a_2 \\ \quad + a_0(a_{20} + b_{20}) + a_1(a_{21} + b_{21}) + a_2(a_{22} + b_{22}). \end{array} \right. \quad (1.33)$$

и для нахождения d_0 и d_1 из (1.31), (1.32):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}i\omega n_e d_0 + d_0(a_{00} + b_{00}) + d_1(a_{01} + b_{01}) + d_2(a_{02} + b_{02}), \\ 0 = -\frac{15}{4} \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{3/2}} - \frac{5G_{5/2}^2}{2G_{3/2}^2} \right) i\omega n_e d_1 + d_0(a_{10} + b_{10}) + d_1(a_{11} + b_{11}) \\ \quad + d_2(a_{12} + b_{12}), \\ 0 = -\frac{105}{16} \left(-\frac{35G_{7/2}^2}{8G_{3/2}^2} + \frac{49G_{7/2}^2 G_{7/2}}{2G_{5/2}^2 G_{3/2}} - \frac{63G_{9/2} G_{7/2}}{2G_{5/2} G_{3/2}} + \frac{99G_{11/2}}{8G_{3/2}} \right) i\omega n_e d_2 \\ \quad + d_0(a_{20} + b_{20}) + d_1(a_{21} + b_{21}) + d_2(a_{22} + b_{22}). \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Здесь a_{jk} , b_{jk} - матричные элементы для интегралов столкновений, $\omega = eV/(m_e c)$ - циклотронная частота.

Заключение к первой главе

В данной главе записано уравнение Больцмана для произвольно вырожденных, нерелятивистских электронов в магнитном поле. Из уравнения Больцмана получены уравнения переноса для концентрации, полного импульса и энергии электронов в двухкомпонентной смеси из электронов и ядер. Выписаны выражения для интегралов столкновений электрон-ядро и электрон-электрон. Описан метод последовательных приближений Чепмена-Энскога. Выписаны полиномы, обобщающие полиномы Сони́на, и с их помощью получены системы уравнений для нахождения компонент тензоров кинетических коэффициентов при произвольном вырождении.

Результаты первой главы входят в следующие статьи:

1. *Бисноватый-Коган Г. С., Глушихина М. В.*, Вычисление коэффициентов теплопроводности в замагниченном плотном веществе // *Физика Плазмы*, т. 44, с. 355-374, 2018
2. *Глушихина М. В.*, Четыре тензора, определяющие тепло- и электропроводность невырожденных электронов в замагниченной плазме // *Физика Плазмы*, т. 46, с. 121-138, 2020
3. *Glushikhina M. V., Moiseenko S. G.*, MHD processes near compact objects // *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories, held 12-18 July 2015 in Rome, Italy.*, 2015, pp. 385-408 Edited by Massimo Bianchi, Robert T Jansen and Remo Ruffini.
4. *Glushikhina M. V., Bisnovatyi-Kogan G. S.*, Kinetic coefficients of degenerate electrons in magnetized neutron star crust // *The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories, held 12-18 July 2015 in Rome, Italy.*,

2015, pp. 1102-1107, Edited by Massimo Bianchi, Robert T. Jansen and Remo Ruffini.

5. *Glushikhina M. V., Bisnovatyi-Kogan G. S.*, Calculation of thermal conductivity coefficients of electrons in magnetized dense matter //

INTERNATIONAL JOURNAL OF MODERN PHYSICS D, 2017, v. 27, article id.1844008-1-8

6. *Glushikhina M. V., Bisnovatyi-Kogan G. S.*, Calculation of thermal conductivity coefficients of electrons in magnetized neutron star, // The Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories - Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity, 2012, v.2, pp. 1353-1357

Глава 2

Расчёт матричных элементов для интегралов столкновений

2.1. Матричные элементы b_{jk}

Матричные элементы b_{jk} , связанные с электрон-ядерными столкновениями, определяются следующим образом:

$$b_{jk} = R \int f_0 f_{N0} (1 - f_0') Q_j(u^2) u_i [Q_k(u^2) u_i - Q_k(u'^2) u_i'] g_{eN} b d b d \varepsilon d c_{Ni} d c_i, \quad (2.1)$$

$$k \geq 0.$$

Введем функции $\bar{\Omega}_{eN}^{(l)}(r)$, определяемые как (см. [21])

$$\bar{\Omega}_{eN}^{(l)}(r) = 2 \int_0^\infty f_0 (1 - f_0) z^{2r+2} \int_0^\infty (1 - \cos^l \theta_{12}) g_{12} b d b d z, \quad (2.2)$$

где

$$z = \left[\frac{m_1 m_2}{2kT(m_1 + m_2)} \right]^{1/2} g_{12}, \quad g_{12} = |v_1 - v_2|, \quad (2.3)$$

для сталкивающихся частиц «1» и «2» θ_{12} является углом рассеяния. В столкновениях электронов («2») и ядер («1») масса ядер намного больше, чем масса электронов $m_N \gg m_e$, таким образом, мы можем пренебречь обменом энергии при столкновении

$$u'^2 \approx u^2, \quad uu' \approx u^2(1 - \cos \theta_{12}), \quad g_{eN} \approx v, \quad z \approx u, \quad (2.4)$$

Пользуясь соотношением (1.14), из (2.1), мы получаем

$$b_{jk} = 8\pi^2 \left(\frac{2kTm_e}{h^2} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{1/2} n_N \int_0^\infty f_0(1-f_0) Q_j(x) Q_k(x) x^2 \int_0^\infty (1-\cos \theta_{12}) bdbdx, \quad (2.5)$$

Вместо функций $\bar{\Omega}_{eN}^{(l)}(r)$ из (2.2) в этом случае мы можем использовать функции $\hat{\Omega}_{eN}^{(l)}(r)$, определяемые как

$$\hat{\Omega}_{eN}^{(l)}(r) = \int_0^\infty f_0(1-f_0) x^{r+1} \int_0^\infty (1-\cos^l \theta_{12}) bdbdx. \quad (2.6)$$

С учетом (1.28), элементы симметричной матрицы b_{ij} имеют вид

$$b_{00} = 8\pi^2 \frac{(2kT)^2}{h^3} m_e n_N \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(1), \quad (2.7)$$

$$b_{01} = 8\pi^2 \frac{(2kT)^2}{h^3} m_e n_N \left(\frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(1) - \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(2) \right), \quad (2.8)$$

$$b_{11} = 8\pi^2 \frac{(2kT)^2}{h^3} m_e n_N \left(\frac{25}{4} \frac{G_{5/2}^2}{G_{3/2}^2} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(1) - 5 \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(2) + \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(3) \right), \quad (2.9)$$

$$b_{02} = 8\pi^2 \frac{(2kT)^2}{h^3} m_e n_N \left[\frac{35}{8} \frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(1) - \frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(2) + \frac{1}{2} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(3) \right], \quad (2.10)$$

$$b_{12} = 8\pi^2 \frac{(2kT)^2}{h^3} m_e n_N \left[\frac{175}{16} \frac{G_{7/2} G_{5/2}}{G_{3/2}^2} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(1) - \frac{105}{8} \frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(2) + \left(\frac{5}{4} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} + \frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} \right) \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(3) - \frac{1}{2} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(4) \right], \quad (2.11)$$

$$b_{22} = 8\pi^2 \frac{(2kT)^2}{h^3} m_e n_N \left[\frac{35^2}{8^2} \frac{G_{7/2}^2}{G_{3/2}^2} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(1) - \frac{245}{8} \frac{G_{7/2}^2}{G_{5/2} G_{3/2}} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(2) + \left(\frac{49}{4} \frac{G_{7/2}^2}{G_{5/2}^2} + \frac{35}{8} \frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} \right) \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(3) - \frac{7}{2} \frac{G_{7/2}}{G_{5/2}} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(4) + \frac{1}{4} \hat{\Omega}_{eN}^{(1)}(5) \right]. \quad (2.12)$$

2.1.1. Функции $\phi_{12}^{(l)}$ и кулоновский логарифм

Функции $\bar{\Omega}_{eN}^{(l)}(r)$ из (2.2) можно переписать в виде

$$\widehat{\Omega}_{eN}^{(l)}(r) = 2 \left[\frac{m_1 m_2}{2kT(m_1 + m_2)} \right]^{1/2} \int_0^\infty f_0(1 - f_0) z^{2r+2} \phi_{12}^{(l)} dz, \quad (2.13)$$

с

$$\phi_{12}^{(l)} = \int_0^\infty (1 - \cos^l \theta_{12}) g_{12} b db. \quad (2.14)$$

Интегрируя в (2.14) по прицельному параметру db , видим, что интеграл логарифмически стремится к бесконечности. Он сходится при более точном рассмотрении кулоновских столкновений в плазме с учетом корреляционных функций [57], при этом возникает верхний предел интегрирования b_{\max} . Вводя $v_0 = bg_{12}^2(m_1 m_2 / m_0 e_1 e_2)$, где $m_0 = m_1 + m_2$, а e_1, e_2 есть абсолютные значения зарядов, после интегрирования получаем [21]

$$\phi_{12}^{(1)} = \left(\frac{m_0 e_1 e_2}{m_1 m_2} \right)^2 g_{12}^{-3} \ln(1 + v_{0\max}^2), \quad (2.15)$$

$$\phi_{12}^{(2)} = 2 \left(\frac{m_0 e_1 e_2}{m_1 m_2} \right)^2 g_{12}^{-3} \left[\ln(1 + v_{0\max}^2) - \frac{v_{0\max}^2}{1 + v_{0\max}^2} \right], \quad (2.16)$$

$$v_{0\max} = b_{\max} g_{12}^2 (m_1 m_2 / m_0 e_1 e_2). \quad (2.17)$$

При дальнейшем интегрировании выражение под логарифмом принимается постоянной величиной, когда вместо изменяющегося g_{12} берется среднее значение \bar{g}_{12} . Для электрон-ядерных столкновений с $g_{12} \approx v_e$ приближенное выражение для кулоновского логарифма записывается в виде [58]

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln(1 + v_{0\max}^2) \approx \bar{\Lambda}_v = \ln \left(\frac{b_{\max} v_e^2 m_e}{Z e^2} \right), \quad \Lambda \gg 1, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{v}_e^2 &= \frac{3kT}{m_e} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} = \frac{3kT}{m_e} \quad (ND) \\ &= \frac{3}{5} \frac{h^2}{m_e^2} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (D). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Величина b_{\max} – радиус дебаевского экранирования для электронов r_{De} и ионов r_{Di} , которую можно выразить как [59]

$$\frac{1}{b_{\max}^2} = \frac{1}{r_{Di}^2} + \frac{1}{r_{De}^2} = \frac{4\pi e^2}{kT} \left(n_N Z^2 + n_e \frac{G_{1/2}}{G_{3/2}} \right), \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{G_{1/2}}{G_{3/2}} &= 1 \quad (ND) \\ &= 4(3\pi^2)^{1/3} \frac{m_e kT}{h^2 n_e^{2/3}} \quad (D). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Влияние квантовых эффектов на дебаевское экранирование обсуждалось в [49]. Средняя частота электрон-ионных столкновений ν_{ei} записывается в [60] в форме

$$\nu_{ei} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{Z^2 e^4 n_N \Lambda}{(kT)^{3/2} G_{3/2}} \frac{1}{1 + e^{-x_0}}. \quad (2.22)$$

В предельных случаях она записывается как

$$\begin{aligned} \nu_{ei} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{Z^2 e^4 n_N \Lambda}{(kT)^{3/2}} \quad (ND) \\ &= \frac{32\pi^2}{3} m_e \frac{Z^2 e^4 \Lambda n_N}{h^3 n_e} \quad (D). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Среднее время τ_{ei} между (электрон-ионными) столкновениями есть обратное значение ν_{ei} из (2.22), (2.23).

2.1.2. b_{jk} для невырожденных электронов

Для невырожденных электронов имеем $\exp(x - x_0) \ll 1$, $G_n \approx e^{x_0}$, тогда

$$\widehat{\Omega}_{eN}^{(l)}(r) = e^{x_0} \int_0^\infty e^{-x} x^{r+1} \int_0^\infty (1 - \cos^l \theta) b db dx. \quad (2.24)$$

В этом случае удобнее пользоваться функциями $\Omega_{eN}^{(l)}(r)$, которые определяются как

$$\Omega_{eN}^{(l)}(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-x} x^{r+1} \int_0^\infty (1 - \cos^l \theta) b db dx. \quad (2.25)$$

Пользуясь (2.13), (2.15), находим выражения для невырожденного случая в виде

$$\Omega_{eN}^{(1)}(r) = \sqrt{\pi} \frac{e^4 \Lambda Z^2}{(2kT)^2} \Gamma(r), \quad \Gamma(1) = 1; \quad (2.26)$$

$$\Gamma(2) = 1; \quad \Gamma(3) = 2; \quad \Gamma(4) = 6; \quad \Gamma(5) = 24.$$

Подставляя (2.26) в (2.7)–(2.12), принимая во внимание, что

$$G_n = e^{x_0}, \quad e^{x_0} = \frac{n_e}{2\pi^{3/2}} \left(\frac{h^2}{2kTm_e} \right)^{3/2}, \quad (2.27)$$

пользуясь (2.23) для ν_{ei} и его обратным значением для τ_{ei} , напишем b_{jk} для невырожденных электронов в виде:

$$b_{00} = 8\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{3n_e}{2\tau_{nd}}, \quad (2.28)$$

$$b_{01} = 12\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{9n_e}{4\tau_{nd}}, \quad (2.29)$$

$$b_{11} = 26\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{39n_e}{8\tau_{nd}}, \quad (2.30)$$

$$b_{02} = 15\sqrt{\pi} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{45n_e}{16\tau_{nd}}, \quad (2.31)$$

$$b_{12} = \frac{69\sqrt{\pi}}{2} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{207n_e}{32\tau_{nd}}, \quad (2.32)$$

$$b_{22} = \frac{433\sqrt{\pi}}{8} \frac{n_e n_N e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^{3/2} \sqrt{m_e}} = \frac{1299n_e}{128\tau_{nd}}. \quad (2.33)$$

2.1.3. b_{jk} для частично вырожденных электронов

Чтобы вычислить b_{ij} для вырожденных электронов, воспользуемся выражениями для $\widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(r)$ и $G_n(x_0)$. С учетом (2.13), (2.15) получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(r) &= \int_0^\infty f_0(1-f_0)x^{r+1} \int_0^{b_{max}} (1-\cos\theta)bdbdx = \\ &= 2\frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \int_0^\infty f_0(1-f_0)x^{r-1}dx = 2\frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \Gamma(r)G_{r-1}(x_0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Интеграл в (2.34) считается точно для $r = 1$: $\int_0^\infty f_0(1-f_0)x^{r-1}dx = [1 + \exp(-x_0)]^{-1}$. Между невырожденными электронами с большим отрицательным безразмерным химическим потенциалом при $x_0 \ll -1$ и сильно вырожденными электронами при $x_0 \gg 1$ есть уровень вырождения, для которого $x_0 = 0$. Вычислим элементы b_{jk} для уровня вырождения, соответствующего $x_0 = 0$. Функции $G_n(0)$ имеют следующие численные значения, согласно [53]

$$G_n(0) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{1+e^x} = (1-2^{1-n})\zeta(n), \quad (2.35)$$

где значения дзета-функции Римана ζ для используемых здесь индексов взяты из [61]. Тогда для функций $G_n(0)$ мы имеем следующие значения

$$G_{3/2}(0) = 0.765, \quad G_{5/2}(0) = 0.867, \quad G_{7/2}(0) = 0.928,$$

$$G_{9/2}(0) = 0.9615, \quad G_{11/2} = 0.980, \quad G_2(0) = 1.645, \quad (2.36)$$

$$G_3(0) = 0.9015, \quad G_4(0) = 0.947, \quad G_5(0) = 0.972.$$

Функции $\widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(r)$ при $x_0 = 0$, определяемые как $\widehat{\Omega}_{eN0}^{(1)}(r)$, имеют следующие значения согласно (2.34), с использованием (2.35), (2.36):

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_{eN0}^{(1)}(1) &= \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \equiv I, & \widehat{\Omega}_{eN0}^{(1)}(2) &= 2 \ln 2 I = 1.39 I, \\ \widehat{\Omega}_{eN0}^{(1)}(3) &= 3.29 I, & \widehat{\Omega}_{eN0}^{(1)}(4) &= 10.82 I, \\ \widehat{\Omega}_{eN0}^{(1)}(5) &= 45.46 I. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Уровень вырождения $DL(0)$ при $x_0 = 0$ определяется как отношение энергии Ферми ε_{fe} к kT . С учетом (1.15), (2.36) мы получаем

$$DL(0) = \frac{\varepsilon_{fe}}{kT} = \frac{(3\pi^2 n_e)^{2/3} \hbar^2}{8\pi^2 m_e kT} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} [2G_{3/2}(0)]^{2/3} = 1.011. \quad (2.38)$$

В точке $x_0 = 0$ выражение для концентрации электронов n_{e0} из (1.15) и среднее время τ_{ei} между электрон-ионными столкновениями, которое является обратной величиной к ν_{ei} , с учетом (2.22), (2.36), (1.16) записываются как

$$n_{e0} = 2G_{3/2}(0) \left(\frac{kT m_e}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} = 2 \times 0.765 \left(\frac{kT m_e}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (2.39)$$

$$\tau_{d0} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi}} \frac{(kT)^{3/2} G_{3/2}}{Z^2 e^4 n_N \Lambda} (1 + e^{-x_0}) = 0.765 \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi}} \frac{(kT)^{3/2}}{Z^2 e^4 n_N \Lambda}. \quad (2.40)$$

Пользуясь (2.37), (2.39), (2.40), находим из (2.7)–(2.12)

$$b_{00} = \frac{8\pi^2 e^4 Z^2 m_e \Lambda}{h^3} n_N = \frac{3 n_{e0}}{2 \tau_{d0}}, \quad (2.41)$$

$$b_{01} = 2.16 \frac{n_{e0}}{\tau_{d0}}, \quad b_{11} = 5.162 \frac{n_{e0}}{\tau_{d0}}, \quad b_{02} = 2.588 \frac{n_{e0}}{\tau_{d0}}, \quad (2.42)$$

$$b_{12} = 6.671 \frac{n_{e0}}{\tau_{d0}}, \quad b_{22} = 11.038 \frac{n_{e0}}{\tau_{d0}}. \quad (2.43)$$

Для произвольного уровня вырождения при $x_0 \neq 0$ функции $G_n(x_0)$ в (1.16) не выражаются аналитически, а вычисляются численно для каждого значения x_0 при соответствующем уровне вырождения

$$DL(x_0) = \frac{(3\pi^2 n_e)^{2/3} h^2}{8\pi^2 m_e kT} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} [2G_{3/2}(x_0)]^{2/3}. \quad (2.44)$$

После численного расчета $G_n(x_0)$ элементы b_{jk} при произвольном x_0 находятся таким же образом, как это было сделано выше при $x_0 = 0$.

2.1.4. b_{jk} для сильно вырожденных электронов

Для сильно вырожденного случая $x_0 \gg 1$ воспользуемся [53] следующими разложениями

$$G_r(x_0) = \frac{1}{\Gamma(r)} \left[\frac{x_0^r}{r} + \frac{\pi^2}{6}(r-1)x_0^{r-2} + \frac{7\pi^4}{360}(r-1)(r-2)(r-3)x_0^{r-4} \right] \quad \text{для } r \geq 1. \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(r)G_{r-1}(x_0) &= (r-1) \left[\frac{x_0^{r-1}}{r-1} + \frac{\pi^2}{6}(r-2)x_0^{r-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{7\pi^4}{360}(r-2)(r-3)(r-4)x_0^{r-5} \right] \quad \text{для } r \geq 2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Для сильно вырожденных электронов

$$x_0 = \frac{(3\pi^2 n_e)^{2/3} h^2}{8\pi^2 m_e kT} \gg 1. \quad (2.47)$$

Пренебрегая экспоненциально малым членом $\sim e^{-x_0}$, из (2.34), (2.46) далее получаем

$$\widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(1) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) dx = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2}, \quad (2.48)$$

$$\widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(2) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \Gamma(2) G_1(x_0) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} x_0, \quad (2.49)$$

$$\widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(3) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \Gamma(3) G_2(x_0) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} (x_0^2 + \frac{\pi^2}{3}), \quad (2.50)$$

$$\widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(4) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \Gamma(4) G_3(x_0) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} (x_0^3 + \pi^2 x_0), \quad (2.51)$$

$$\widehat{\Omega}_{eN}^{(1)}(5) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} \Gamma(5) G_4(x_0) = 2 \frac{e^4 Z^2 \Lambda}{(2kT)^2} (x_0^4 + 2\pi^2 x_0^2 + \frac{7\pi^2}{15}). \quad (2.52)$$

Пользуясь (2.45), (2.48)–(2.52), из (2.7)–(2.12) находим:

$$b_{00} = \frac{16\pi^2 e^4 Z^2 m_e \Lambda}{h^3} n_N = \frac{3n_e}{2\tau_d}, \quad b_{01} = \frac{3\pi^2 n_e}{4x_0 \tau_d}, \quad (2.53)$$

$$b_{11} = \frac{\pi^2 n_e}{2\tau_d}, \quad b_{02} = -\frac{7\pi^4 n_e}{320x_0^2 \tau_d}, \quad b_{12} = \frac{709\pi^4 n_e}{960x_0 \tau_d}, \quad b_{22} = \frac{2\pi^4 n_e}{15\tau_d}. \quad (2.54)$$

2.2. Матричные элементы a_{jk}

Матричные элементы a_{jk} , относящиеся к электрон-электронным столкновениям, определяются следующим образом:

$$a_{jk} = R^2 \int f_0 f_{01} (1 - f'_0) (1 - f'_{01}) Q_j(u^2) u_i [Q_k(u^2) u_i + Q_k(u_1^2) u_{1i} - Q_k(u'^2) u'_i - Q_k(u'^2_1) u'_{1i}] g_{ee} b d b d \varepsilon d c_{1i} d c_i, \quad (2.55)$$

Введем новые переменные [21]:

$$\begin{aligned} G_{li} &= \frac{1}{2}(c_i + c_{1i}) = \frac{1}{2}(c'_i + c'_{1i}), \\ g_{ee,i} &= c_{1i} - c_i, \quad g'_{ee,i} = c'_{1i} - c'_i, \\ g_{ee} &= |g_{ee,i}| = |g'_{ee,i}| = g'_{ee}, \quad G_{0i} = G_{li} - c_{0i}, \\ v_i &= G_{0i} - \frac{1}{2}g_{ee,i}, \quad v_{i1} = G_{0i} + \frac{1}{2}g_{ee,i}, \\ v^2 + v_1^2 &= 2G_0^2 + \frac{1}{2}g_{ee}^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Здесь G_{li} скорость центра масс двух сталкивающихся электронов в лабораторной системе отсчета, G_{0i} — та же величина в сопутствующей системе отсчета, $g_{ee,i}$ — относительная скорость двух сталкивающихся электронов перед столкновением, $g'_{ee,i}$ — та же величина после столкновения; v_i и v_{1i} — скорости сталкивающихся электронов в сопутствующей системе отсчета, определенной выше. Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{kT} \right)^{1/2} g_{ee,i}, & g'_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{kT} \right)^{1/2} g'_{ee,i}, \\ g &= |g_i| = |g'_i| = g', & G_i &= \left(\frac{m_e}{kT} \right)^{1/2} G_{0i}, \\ dc_i dc_{1i} &= \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^3 dG_i dg_i, \\ u^2 + u_1^2 &= G^2 + g^2, & u^2 &= u_i^2, & u_1^2 &= u_{1i}^2, & G^2 &= G_i^2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь u_i , u_{1i} — безразмерные скорости электронов, определенные выше. Элементы

$$\begin{aligned} a_{j0} &= 8 \left(\frac{2kTm_e}{h^2} \right)^3 \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{1/2} \int f_0 f_{01} (1 - f'_{01}) (1 - f'_0) Q_j(u^2) u_i [u_i + u_{1i} \\ &\quad - u'_i - u'_{1i}] gbdbd\varepsilon dg_i dG_i = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

равны нулю, поскольку сохранение импульса при столкновении зануляет скобку в (2.58). Отличные от нуля элементы a_{jk} ($j, k \geq 1$) определяются как

$$\begin{aligned} a_{jk} &= 8 \left(\frac{2kTm_e}{h^2} \right)^3 \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{1/2} \int f_0 f_{01} (1 - f'_{01}) (1 - f'_0) Q_j u_i [Q_k u_i + Q_k u_{1i} \\ &\quad - Q'_k u'_i - Q'_k u'_{1i}] gbdbd\varepsilon dg_i dG_i. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Здесь Q_i функция от u^2 или u_1^2 , а Q'_i — функция от u'^2 или u'^2_1 , соответственно.

2.2.1. a_{jk} для невырожденных электронов

Для невырожденного случая при $x_0 \gg 1$, $f_0 \ll 1$ полиномы Q_i сводятся к $S_{3/2}^{(i)}$, и мы имеем из (2.59) следующее выражение ($j, k \geq 1$):

$$a_{jk} = 8 \left(\frac{2kTm_e}{h^2} \right)^3 \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{1/2} e^{2x_0} \int e^{-u^2-u'^2} S_{3/2}^{(j)} u_i [S_{3/2}^{(k)} u_i + S_{3/2}^{(k)} u_{1i} - S_{3/2}^{(k)'} u'_i - S_{3/2}^{(k)'} u'_{1i}] g b d b d \varepsilon d g_i d G_i. \quad (2.60)$$

Подробное вычисление матричных элементов b_{jk} и a_{jk} для невырожденных электронов с максвелловской функцией распределения выполнено в [21]. Согласно [21], необходимо вычислить следующий типичный интеграл:

$$\frac{1}{n_\alpha n_\beta} \int f_\alpha f_\beta [S_{3/2}^{(j)}(u^2) u_i - S_{3/2}^{(j)}(u'^2) u'_i] S_{3/2}^{(k)}(u^2) u_i g_{\alpha\beta} b d b d \varepsilon d c_{\alpha i} d c_{\beta i}, \quad (2.61)$$

Где индексами α и β обозначены разные частицы. Этот интеграл является коэффициентом при $s^j t^k$ в разложении функции:

$$\frac{1}{n_\alpha n_\beta} (1-s)^{-5/2} (1-t)^{-5/2} \int f_\alpha f_\beta [e^{-Su^2} u_i - e^{-Su'^2} u'_i] e^{-Tu^2} u_i g_{\alpha\beta} b d b d \varepsilon d c_{\alpha i} d c_{\beta i} \quad (2.62)$$

где $S = \frac{s}{1-s}$, $T = \frac{t}{1-t}$. Подставляя функции распределения и концентрацию электронов, учитывая (2.56) и (2.57), получаем:

$$(1-s)^{-5/2} (1-t)^{-5/2} \pi^{-3} \int [e^{-G^2-g^2-Su^2} u_i - e^{-G^2-g^2-Su'^2} u'_i] e^{-Tu^2} u_i g_{ee} b d b d \varepsilon d G_i d g_i \quad (2.63)$$

Проинтегрировав как показано в [21], можем записать :

$$H(\theta) = \int e^{-G^2-g^2-Su'^2-Tu^2} u'_i u_i d G_i, \quad H(0) = \int e^{-G^2-g^2-Su^2-Tu^2} u_i u_i d G_i \quad (2.64)$$

Тогда (2.63) можно записать как :

$$(1-s)^{-5/2}(1-t)^{-5/2}\pi^{-3} \int [H(0) - H(\theta)] g_{ee} bdbd\epsilon dg_i \quad (2.65)$$

Представим скорости до и после столкновения через G_i , g_i и g'_i :

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_i - g_i), \quad u'_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_i - g'_i), \quad (2.66)$$

а обозначив $i = 1 + \frac{1}{2}(S + T)$ и $j = i - \frac{1}{4i}(S^2 + T^2 + 2ST \cos(\theta))$, показатель степени экспоненты в интеграле $H(\theta)$ можно выразить:

$$G^2 + g^2 + Su'^2 + Tu^2 = iG^2 + ig^2 - (Sg' + Tg) \quad (2.67)$$

Выполним подстановки:

$$w = G - \frac{1}{2i}(Sg' + Tg), \quad w_1 = g' - \frac{1}{2i}(Sg' + Tg), \quad w_2 = g - \frac{1}{2i}(Sg' + Tg). \quad (2.68)$$

Тогда показатель степени в $H(\theta)$ может быть записан в виде $G^2 + g^2 + Su'^2 + Tu^2 = iw^2 + jg^2$, а u_i^2 и $u'_i u_i$ могут быть представлены в виде:

$$u^2 = \frac{1}{2}(w^2 - 2w * w_2 + w_2^2), \quad u_i u'_i = \frac{1}{2}(w^2 - w * (w_1 - w_2) + w_2 * w_1). \quad (2.69)$$

После выполнения всех подстановок, и проинтегрировав (2.65) как в [21] получаем:

$$H(\theta) = \frac{1}{2}\pi^{3/2}e^{-jg^2}(i)^{-5/2}[\frac{3}{2} + (1 - j + \cos(\theta))g^2] \quad (2.70)$$

Если разложение функции $(1-s)^{-5/2}(1-t)^{-5/2}\pi^{-3/2}H(\theta)$ по степеням s и t представить в виде:

$$e^{-g^2} \sum A_{jkrl} s^j t^k g^{2r} \cos^l(\theta), \quad (2.71)$$

то

$$[S_{3/2}^{(j)}(u^2)u_i, S_{3/2}^{(k)}(u^2)u_i]_e = \pi^{-3/2} \int e^{-g^2} \sum A_{jkrl} g^{2r} (1 - \cos^l(\theta)) g bdbd\epsilon dg \quad (2.72)$$

где A_{pqrl} просто число, формула для расчёта которого представлена в [21].

Введём функции $\Omega_{ee}^{(l)}(r)$ как:

$$\Omega_{ee}^{(l)}(r) = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-g^2} g^{2r+1} \phi_{ee}(l) dg, \quad (2.73)$$

где

$$\phi_{ee}(l) = \int_0^{\infty} (1 - \cos^l \theta) gb db. \quad (2.74)$$

Таким образом (2.72) можно выразить через (2.73):

$$[S_{3/2}^{(j)}(u^2)u_i, S_{3/2}^{(k)}(u^2)u_i]_e = 8\Sigma A_{jkrl} \Omega_{ee}^{(l)}(r) \quad (2.75)$$

Получив значения для A_{jkrl} из [21], матричные коэффициенты a_{jk} с учётом (2.73), (2.72), (2.60) запишем в виде:

$$a_{11} = 4n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(2) \quad (2.76)$$

$$a_{12} = 7n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(2) - 2n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(3)$$

$$a_{22} = \frac{77}{4} n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(2) - 7n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(3) + n_e^2 \Omega_{ee}^{(2)}(4)$$

Для плазмы с $\Lambda \gg 1$ из (2.18) имеем для (2.16), (2.73)

$$\phi_{ee}(2) \approx \frac{16e^4}{m_e^2 g_{ee}^3}, \quad (2.77)$$

$$\Omega_{ee}^{(2)}(r) = \sqrt{\pi} \frac{e^4 \Lambda}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} \Gamma(r).$$

Пользуясь (2.77), имеем из (2.76) с $n_e = Zn_N$,

$$a_{11} = 4n_e^2 \frac{\sqrt{\pi} \Lambda e^4}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{n_e}{Z \tau_{nd}}, \quad (2.78)$$

$$a_{12} = 3n_e^2 \frac{\sqrt{\pi} \Lambda e^4}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}} \frac{n_e}{Z \tau_{nd}}, \quad (2.79)$$

$$a_{22} = \frac{45}{4} n_e^2 \frac{\sqrt{\pi} \Lambda e^4}{\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}} = \frac{135}{16\sqrt{2}} \frac{n_e}{Z \tau_{nd}}. \quad (2.80)$$

2.2.2. a_{jk} для вырожденных электронов

Элементы a_{jk} для сильно вырожденного случая были найдены аналитически в [24], см. также [25]. Они были вычислены для сильно вырожденных нейтронов ядерной материи в [24] и для нейтронов во внутренней коре нейтронной звезды с большим количеством свободных нейтронов [25]. Для последнего случая было получено, что в присутствии невырожденных тяжелых ядер и сильно вырожденных нейтронов вклад столкновений между ними в коэффициенты теплопроводности и диффузии пренебрежимо мал по сравнению с нейтронно-ядерными столкновениями. Ту же ситуацию мы имеем для сильно вырожденных электронов, для которых, пользуясь результатами [24], получаем $a_{jk} \sim b_{jk}/x_0^2 \ll b_{jk}$ для $x_0 \gg 1$. Поэтому для сильно вырожденных электронов приближение Лоренца выполняется асимптотически точно только с учетом столкновений между легкими и тяжелыми частицами. Коэффициенты теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта для сильно вырожденных электронов в присутствии магнитного поля вычисляются в Главе 5.

Для частично вырожденных электронов ситуация более сложная. В этом случае нет аналитических выражений для элементов a_{jk} , которые следует искать численно путем интегрирования многомерных интегралов в (2.59). Еще более важной является другая проблема. Как будет показано в разделах 3.3 и 3.5 Главы 3 и в Главе 4, точность полиномиального приближения уменьшается с увеличением уровня вырождения. Случай умеренно вырожденных электронов при $x_0 = 0$ рассмотрен подробно в Главе 4, где показано, что для получения хорошей точности в полиномиальном приближении, степень полиномов должна увеличиваться с уровнем вырождения. Это приводит к очень громоздким аналитическим расчетам. Необходимо внимательно использовать численные методы для получения высокой точности. В астрофизических задачах достаточно

использовать интерполяционные формулы для довольно точного результата, полученного в 3-полиномиальном приближении для невырожденных электронов с учетом электрон-электронных столкновений, и асимптотически точного результата для сильно вырожденных электронов в приближении Лоренца.

Заключение ко второй главе

В данной главе рассчитаны матричные элементы интегралов столкновений для вычисления кинетических коэффициентов в трехполиномиальном приближении для случаев невырожденных электронов $x_0 \ll 1$, частного случая вырождения при $x_0 = 0$ и сильно вырожденных электронов $x_0 \gg 1$.

Материалы второй главы входят в следующие статьи:

1. *Бисноватый-Коган Г. С., Глушихина М. В.*, Вычисление коэффициентов теплопроводности в замагниченном плотном веществе // *Физика Плазмы*, т. 44, с. 355-374, 2018

2. *Глушихина М. В.*, Четыре тензора, определяющие тепло- и электропроводность невырожденных электронов в замагниченной плазме // *Физика Плазмы*, т. 46, с. 121-138, 2020

Глава 3

Тензоры теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта для невырожденных электронов в магнитном поле

3.1. Выражения для тензоров кинетических коэффициентов в общем виде

Соотношения для потока тепла q_i , и средней направленной (диффузионной) скорости электронов $\langle v_i \rangle$, запишем в виде:

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} - n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \nu_{ij} d_j = q_i^{(A)} + q_i^{(D)}, \quad (3.1)$$

$$\langle v_i \rangle = -\mu_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} - n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \eta_{ij} d_j = \langle v_i^{(A)} \rangle + \langle v_i^{(D)} \rangle, \quad (3.2)$$

где λ_{ij} и ν_{ij} - тензоры теплопроводности и диффузионного термоэффекта, а μ_{ij} и η_{ij} - тензоры термодиффузии и диффузии соответственно [25], [62]. Тензоры коэффициентов переноса из (3.1), (3.2), (1.31), (1.32) запишем отдельно в виде:

$$\lambda_{ik} = \frac{5 k^2 T n_e G_{5/2}}{2 m_e G_{3/2}} \left\{ \left[a_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) a_1^1 \right] \delta_{ik} \right. \quad (3.3)$$

$$\left. -\varepsilon_{ikn} B_n \left[b_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) b_1^1 \right] + B_i B_k \left[c_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) c_1^1 \right] \right\},$$

$$\nu_{ik} = \frac{5 k^2 T^2 n_e G_{5/2}}{2 m_e G_{3/2}} \left\{ \left[d_0^1 - \left(\frac{7 G_{7/2}}{2 G_{5/2}} - \frac{5 G_{5/2}}{2 G_{3/2}} \right) d_1^1 \right] \delta_{ik} \right. \quad (3.4)$$

$$-\varepsilon_{ikn}B_n \left[e_0^1 - \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{5/2}} - \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}} \right) e_1^1 \right] + B_iB_k \left[z_0^1 - \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{5/2}} - \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}} \right) z_1^1 \right] \Big\},$$

$$\mu_{ik} = \frac{k}{m_e} \{ a_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n b_0^1 + B_i B_k c_0^1 \}, \quad (3.5)$$

$$\eta_{ik} = \frac{kT}{m_e} \{ d_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n e_0^1 + B_i B_k z_0^1 \}. \quad (3.6)$$

Для невырожденных электронов тензоры теплопроводности и диффузионного термоэффекта выглядят следующим образом:

$$\lambda_{ik} = \frac{5k^2 T n_e}{2m_e} \{ [a_0^1 - a_1^1] \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n [b_0^1 - b_1^1] + B_i B_k [c_0^1 - c_1^1] \}, \quad (3.7)$$

$$\nu_{ik} = \frac{5k^2 T^2 n_e}{2m_e} \{ [d_0^1 - d_1^1] \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n [e_0^1 - e_1^1] + B_i B_k [z_0^1 - z_1^1] \}. \quad (3.8)$$

Здесь a_0^1, b_0^1 есть действительные и мнимые части коэффициента a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^1 + iBb_0^1, & a_1 &= a_1^1 + iBb_1^1, \\ B^2 c_0^1 &= (a_0^1)_{B=0} - a_0^1, & B^2 c_1^1 &= (a_1^1)_{B=0} - a_1^1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

а $d_0^1, e_0^1, d_1^1, e_1^1$ есть действительные и мнимые части коэффициентов d_0, d_1 .

$$\begin{aligned} d_0 &= d_0^1 + iBe_0^1, & d_1 &= d_1^1 + iBe_1^1, \\ B^2 z_0^1 &= (d_0^1)_{B=0} - d_0^1, & B^2 z_1^1 &= (d_1^1)_{B=0} - d_1^1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Чтобы найти коэффициенты a_0, a_1, d_0, d_1 для произвольного вырождения электронов, необходимо решить систему уравнений (1.33), (1.34) с матричными элементами b_{jk} из (2.7)–(2.12) и матричными элементами a_{jk} из параграфа 2.2. В случае произвольного вырождения электронов коэффициенты в четырёх тензорах, определяющих перенос тепла и электрического тока в плотной

плазме, могут быть вычислены только численно. В двух предельных случаях для невырожденных и сильно вырожденных электронах результаты находятся аналитически.

3.2. Тензоры теплопроводности и термодиффузии для невырожденных электронов

Система для 3х-полиномиального решения для электронов в присутствии магнитного поля, согласно (1.33), с учетом (2.28)–(2.33), (2.78)–(2.80), записывается как

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{3}{2}i\omega\tau_{nd}a_0 + \frac{3}{2}a_0 + \frac{9}{4}a_1 + \frac{45}{16}a_2 \\ -\frac{15}{4}\tau_{nd} = -\frac{15}{4}i\omega\tau_{nd}a_1 + \frac{9}{4}a_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)a_1 + \frac{9}{8}\left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)a_2 \\ 0 = -\frac{105}{16}i\omega\tau_{nd}a_2 + \frac{45}{16}a_0 + \frac{9}{8}\left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)a_1 + \frac{3}{32}\left(\frac{433}{4} + \frac{45\sqrt{2}}{Z}\right)a_2 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Два первых уравнения при $a_2 = 0$ определяют 2-полиномиальное приближение, давая с учетом (3.7) и (3.5) следующие результаты для случая $B = 0$:

$$a_0 = \frac{15}{4} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad a_1 = -\frac{5}{2} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad (3.12)$$

$$\mu_{nd}^{(2)} = \frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z} = 3.75 \frac{k}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad (3.13)$$

$$\lambda_{nd}^{(2)} = \frac{125}{8} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z} = 15.63 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{1 + \sqrt{2}/Z}. \quad (3.14)$$

Эти результаты совпадают с результатами, полученными в [32].

В 3-полиномиальном приближении мы получаем решение (3.11) для a_0 , a_1 , соответственно коэффициенты термодиффузии и теплопроводности для случая $B = 0$, с учетом (3.7) и (3.5), можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{165}{32} \frac{1 + 15\sqrt{2}/(11Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}, \\
a_1 &= -\frac{65}{8} \frac{1 + 45\sqrt{2}/(52Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Тогда коэффициенты теплопроводности и термодиффузии можно записать в явном виде:

$$\mu_{nd}^{(3)} = 5.1563 \frac{k}{m_e} \frac{1 + 15\sqrt{2}/(11Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{nd}^{(3)} &= \frac{2125}{64} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \frac{1 + 18\sqrt{2}/(17Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd} = \\
&= 33.20 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \frac{1 + 18\sqrt{2}/(17Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Величина

$$Q = \frac{64 m_e \lambda_{nd}^{(3)}}{2125 k^2 T n_e \tau_{nd}} = \frac{1 + 18\sqrt{2}/(17Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \tag{3.18}$$

показывающая, насколько невырожденные электрон-электронные столкновения уменьшают коэффициент теплопроводности при $B = 0$, представлена в таблице 3.1 для различных значений Z .

Величина

$$V = \frac{32 m_e \mu_{nd}^{(3)}}{165 k \tau_{nd}} = \frac{1 + 15\sqrt{2}/(11Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \tag{3.19}$$

показывающая, насколько невырожденные электрон-электронные столкновения уменьшают коэффициент термодиффузии при $B = 0$, представлена в таблице 3.2 для различных значений Z .

В 2-полиномиальном приближении, принимая $a_2 = 0$, мы получаем решение системы (3.11) в виде:

$$a_0 = \frac{15}{4}\tau_{nd} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2 - \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right]^{-1}, \quad (3.20)$$

$$a_1 = -\frac{5}{2}\tau_{nd}(1 - i\omega\tau_{nd}) \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2 - \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right]^{-1}, \quad (3.21)$$

$$a_0^1 = \frac{15}{4}\tau_{nd} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (3.22)$$

$$b_0^1 = \frac{15}{4} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) \zeta, \quad (3.23)$$

$$a_1^1 = -\frac{5}{2}\tau_{nd} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} + \left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) \omega^2\tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (3.24)$$

$$b_1^1 = -\frac{5}{2} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left(\frac{19}{4} + \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (3.25)$$

где коэффициент

$$\zeta = \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13}{2} \frac{\sqrt{2}}{Z} + \frac{2}{Z^2} \right) \omega^2\tau_{nd}^2 + \frac{25}{4}\omega^4\tau_{nd}^4 \right]^{-1}. \quad (3.26)$$

В 3-полиномиальном приближении решение системы (3.77) имеет вид:

$$a_0 = \frac{165}{32}\tau_{nd} \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} - \frac{35}{11}i\omega\tau_{nd} \right) \frac{1}{\zeta_1 - i\omega\tau_{nd}\zeta_2}, \quad (3.27)$$

$$a_1 = -\frac{65}{8}\tau_{nd} \left[1 + \frac{45\sqrt{2}}{52Z} - \frac{35}{26}\omega^2\tau_{nd}^2 - \left(\frac{713}{208} + \frac{45\sqrt{2}}{52Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right] \frac{1}{\zeta_1 - i\omega\tau_{nd}\zeta_2}, \quad (3.28)$$

$$a_0^1 = \frac{165}{32} \tau_{nd} \left[\left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} \right) \zeta_1 + \frac{35}{11} \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (3.29)$$

$$b_0^1 = \frac{165}{32} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \left[-\frac{35}{11} \zeta_1 + \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z} \right) \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (3.30)$$

$$a_1^1 = -\frac{65}{8} \tau_{nd} \left[\left(1 + \frac{45\sqrt{2}}{52Z} - \frac{35}{26} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right) \zeta_1 + \left(\frac{713}{208} + \frac{45\sqrt{2}}{52Z} \right) \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (3.31)$$

$$b_1^1 = -\frac{65}{8} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \left[\left(1 + \frac{45\sqrt{2}}{52Z} - \frac{35}{26} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right) \zeta_2 - \left(\frac{713}{208} + \frac{45\sqrt{2}}{52Z} \right) \zeta_1 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (3.32)$$

где

$$\zeta_1 = 1 + \frac{61\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \left(\frac{5385}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \omega^2 \tau_{nd}^2, \quad (3.33)$$

$$\zeta_2 = \left(\frac{1017}{64} + \frac{667\sqrt{2}}{32Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2 \right). \quad (3.34)$$

Значения c_0^1 и c_1^1 в 2- и 3-полиномиальном приближении определяются с использованием (3.9).

Диффузионная скорость $\langle v_i^A \rangle$ из (3.2), (3.5) может быть записана в виде:

$$\langle v_i^A \rangle = -\frac{k}{m_e} [a_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n b_0^1 + B_i B_k c_0^1] \frac{\partial T}{\partial r_k} = \langle v_i^A \rangle^{(1)} + \langle v_i^A \rangle^{(2)} + \langle v_i^A \rangle^{(3)}, \quad (3.35)$$

где

$$\langle v_i^A \rangle^{(1)} = -\frac{k}{m_e} a_0^1 \frac{\partial T}{\partial r_i} = -\mu_{nd}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad (3.36)$$

$$\langle v_i^A \rangle^{(2)} = \frac{k}{m_e} \varepsilon_{ikn} B_n b_0^1 \frac{\partial T}{\partial r_k} = \varepsilon_{ikn} B_n \mu_{nd}^{(2)} \frac{\partial T}{\partial r_k}, \quad (3.37)$$

$$\langle v_i^A \rangle^{(3)} = -\frac{k}{m_e} B_i B_k c_0^1 \frac{\partial T}{\partial r_k} = -B_i B_k \mu_{nd}^{(3)} \frac{\partial T}{\partial r_k}. \quad (3.38)$$

Для 2-полиномиального приближения получаем коэффициенты тензора термодиффузии:

$$\mu_{nd}^{(12)} = \frac{k}{m_e} a_0^1 = \frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \quad (3.39)$$

$$\mu_{nd}^{(22)} = -\frac{k}{m_e} b_0^1 = -\frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \frac{\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \quad (3.40)$$

$$B^2 \mu_{nd}^{(32)} = \mu_{nd}^{(12)}(B=0) - \mu_{nd}^{(12)}. \quad (3.41)$$

Выражения для коэффициентов термодиффузии в 3-полиномиальном приближении могут быть записаны явно, с использованием (3.29)–(3.30):

$$\mu_{nd}^{(13)} = \frac{k}{m_e} a_0^1 = \frac{165}{32} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} \frac{\left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z}\right) \zeta_1 + \frac{35}{11} \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (3.42)$$

$$\mu_{nd}^{(23)} = -\frac{k}{m_e} b_0^1 = -\frac{165}{32} \frac{k}{m_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \frac{-\frac{35}{11} \zeta_1 + \left(1 + \frac{15\sqrt{2}}{11Z}\right) \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2}, \quad (3.43)$$

$$B^2 \mu_{nd}^{(33)} = \mu_{nd}^{(13)}(B=0) - \mu_{nd}^{(13)}. \quad (3.44)$$

Пользуясь (3.5), можно получить другую форму записи компонентов тензора термодиффузии в магнитном поле. Три компоненты теплового потока: параллельная $\langle v_i^A \rangle_{\parallel}$, перпендикулярная $\langle v_i^A \rangle_{\perp}$ к магнитному полю \mathbf{B} , и компонента Холла $\langle v_i^A \rangle_{\text{hall}}$, перпендикулярная к обоим векторам ∇T и \mathbf{B} , с учетом (3.14) или (3.17) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\langle v_i^A \rangle_{\parallel} &= -\mu_{\parallel} \nabla T_{\parallel}, \\ \mu_{\parallel} &= \frac{k}{m_e} [a_0^1 + B^2 c_0^1] = \mu_{nd},\end{aligned}\quad (3.45)$$

$$\langle v_i^A \rangle_{\perp} = -\mu_{\perp} \nabla T_{\perp}, \quad \mu_{\perp} = \frac{k}{m_e} a_0^1, \quad (3.46)$$

$$\langle v_i^A \rangle_{\text{hall}} = -\mu_{\text{hall}} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B}, \quad \mu_{\text{hall}} = -\frac{k}{m_e} B b_0^1. \quad (3.47)$$

Различие между 2- и 3-полиномиальным приближением можно охарактеризовать сравнением величин $V_{\perp}^{(2)}$ и $V_{\perp}^{(3)}$:

$$V_{\perp}^{(2)} = \frac{\mu_{nd}^{(12)}}{\mu_{nd}^{(3)}}, \quad V_{\perp}^{(3)} = \frac{\mu_{nd}^{(13)}}{\mu_{nd}^{(3)}}, \quad (3.48)$$

где $\mu_{nd}^{(12)}$ определяется в (3.39), $\mu_{nd}^{(3)}$ определяется в (3.17) и $\mu_{nd}^{(13)}$ определяется в (3.42). Функции $V_{\perp}^{(2)}(\omega\tau_{nd})$, $V_{\perp}^{(3)}(\omega\tau_{nd})$ представлены на рисунке 3.1 для углерода, $Z = 6$. На данном графике имеем $V_{\perp}^{(2)} = 0.3531$ и $V_{\perp}^{(3)} = 0.1754$, при $\omega\tau = 0.25$.

Тепловой поток q_i из (1.10), (3.7) может быть записан в виде:

$$\begin{aligned}q_i &= -\frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} [(a_0^1 - a_1^1) \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n (b_0^1 - b_1^1) + B_i B_k (c_0^1 - c_1^1)] \frac{\partial T}{\partial r_k} = \\ &= q_i^{(1)} + q_i^{(2)} + q_i^{(3)},\end{aligned}\quad (3.49)$$

$$q_i^{(1)} = -\frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} (a_0^1 - a_1^1) \frac{\partial T}{\partial r_i} = -\lambda_{nd}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad (3.50)$$

$$q_i^{(2)} = \frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} \varepsilon_{ikn} B_n (b_0^1 - b_1^1) \frac{\partial T}{\partial r_k} = \varepsilon_{ikn} B_n \lambda_{nd}^{(2)} \frac{\partial T}{\partial r_k}, \quad (3.51)$$

$$q_i^{(3)} = -\frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} B_i B_k (c_0^1 - c_1^1) \frac{\partial T}{\partial r_k} = -B_i B_k \lambda_{nd}^{(3)} \frac{\partial T}{\partial r_k}. \quad (3.52)$$

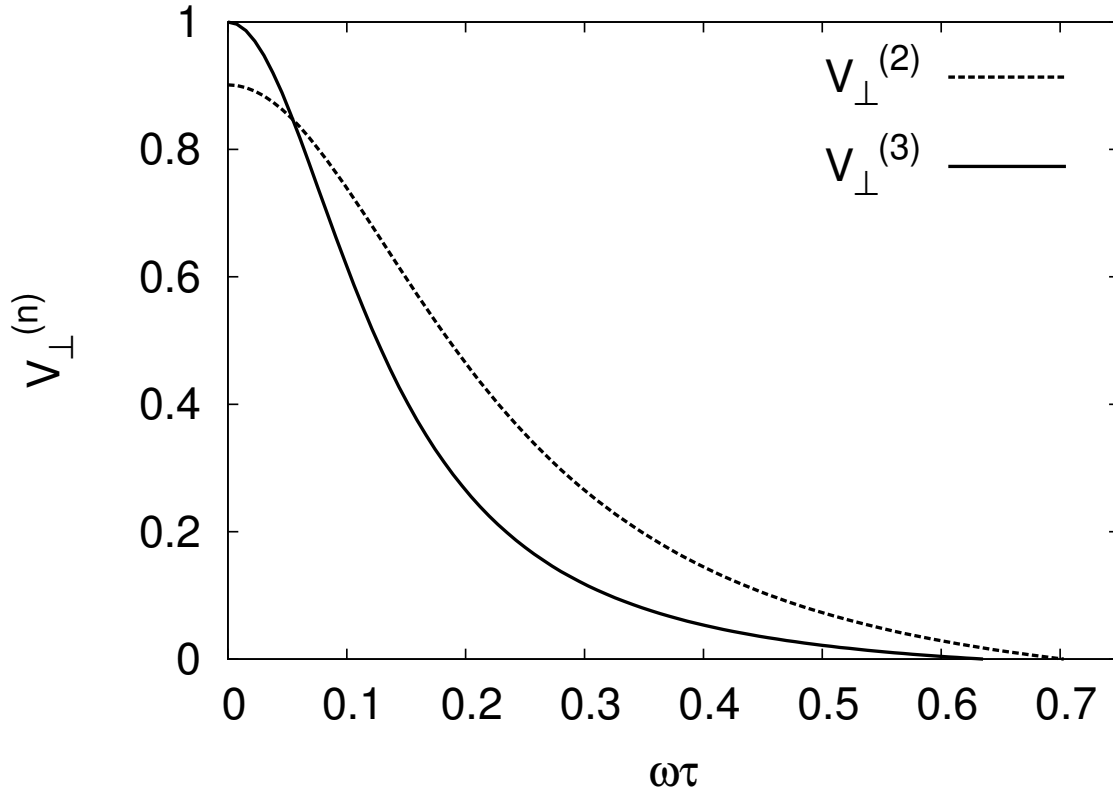


Рис. 3.1. Сравнение 2- и 3-полиномиального приближения коэффициента термодиффузии для невырожденной углеродной плазмы при $Z = 6$ для различных $\omega\tau$. Сплошной линией показаны результаты для трёхполиномиального приближения, штриховой показаны результаты для двухполиномиального приближения.

Для 2-полиномиального приближения получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{nd}^{(12)} &= \frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} (a_0^1 - a_1^1) = \\ &= \frac{25 k^2 T n_e}{4 m_e} \tau_{nd} \frac{\frac{5}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{nd}^{(22)} &= -\frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} (b_0^1 - b_1^1) = \\
&= -\frac{25 k^2 T n_e \omega \tau_{nd}^2}{4 m_e B} \frac{\frac{107}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{2Z} + \frac{5}{2} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \quad (3.54)
\end{aligned}$$

$$B^2 \lambda_{nd}^{(32)} = \lambda_{nd}^{(12)}(B=0) - \lambda_{nd}^{(12)}. \quad (3.55)$$

Выражения для коэффициентов теплопроводности в 3-полиномиальном могут быть записаны явно, с использованием (3.29)–(3.32):

$$\begin{aligned}
\lambda_{nd}^{(13)} &= \frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} (a_0^1 - a_1^1) = \quad (3.56) \\
&= \frac{2125 k^2 T n_e}{64 m_e} \tau_{nd} \frac{\left(1 + \frac{18\sqrt{2}}{17Z} - \frac{14}{17} \omega^2 \tau_{nd}^2\right) \zeta_1 + \left(\frac{1133}{340} + \frac{9\sqrt{2}}{17Z}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{nd}^{(23)} &= -\frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} (b_0^1 - b_1^1) = \quad (3.57) \\
&= -\frac{2125 k^2 T n_e \omega \tau_{nd}^2}{64 m_e B} \frac{\left(1 + \frac{18\sqrt{2}}{17Z} - \frac{14}{17} \omega^2 \tau_{nd}^2\right) \zeta_2 - \left(\frac{1133}{340} + \frac{9\sqrt{2}}{17Z}\right) \zeta_1}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau_{nd}^2 \zeta_2^2},
\end{aligned}$$

$$B^2 \lambda_{nd}^{(33)} = \lambda_{nd}^{(13)}(B=0) - \lambda_{nd}^{(13)}. \quad (3.58)$$

Аналогично термодиффузии, для теплопроводности, пользуясь (3.7), можно получить другую форму записи компонентов тензора в магнитном поле. Три компоненты теплового потока: параллельная q_{\parallel} , перпендикулярная q_{\perp} к магнитному полю \mathbf{B} , и компонента Холла q_{hall} , перпендикулярная к обоим векторам ∇T и \mathbf{B} , с учетом (3.14) или (3.17) определяются соотношениями:

$$q_{\parallel} = -\lambda_{\parallel} \nabla T_{\parallel},$$

$$\lambda_{\parallel} = \frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} [a_0^1 - a_1^1 + B^2(c_0^1 - c_1^1)] = \lambda_{nd}, \quad (3.59)$$

$$q_{\perp} = -\lambda_{\perp} \nabla T_{\perp}, \quad \lambda_{\perp} = \frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} (a_0^1 - a_1^1), \quad (3.60)$$

$$q_{\text{hall}} = -\lambda_{\text{hall}} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B}, \quad \lambda_{\text{hall}} = \frac{5 k^2 T n_e}{2 m_e} B(b_0^1 - b_1^1). \quad (3.61)$$

Результаты для двух полиномов совпадают с соответствующими результатами, полученными в [32, 33].

Различие между 2- и 3-полиномиальным приближением можно охарактеризовать сравнением величин $Q_{\perp}^{(2)}$ и $Q_{\perp}^{(3)}$ на рисунке 3.2:

$$Q_{\perp}^{(2)} = \frac{\lambda_{nd}^{(12)}}{\lambda_{nd}^{(3)}}, \quad Q_{\perp}^{(3)} = \frac{\lambda_{nd}^{(13)}}{\lambda_{nd}^{(3)}}, \quad (3.62)$$

где $\lambda_{nd}^{(12)}$ определяется в (3.53), $\lambda_{nd}^{(3)}$ определяется в (3.17) и $\lambda_{nd}^{(13)}$ определяется в (3.50), (3.29), (3.31) таким же образом, как $\lambda_{nd}^{(12)}$. Функции $Q_{\perp}^{(2)}(\omega\tau_{nd})$, $Q_{\perp}^{(3)}(\omega\tau_{nd})$ представлены на рисунке 3.2 для углерода, $Z = 6$. На данном графике имеем $Q_{\perp}^{(2)} = 0.023$ и $Q_{\perp}^{(3)} = 0.014$, при $\omega\tau = 1$.

3.3. Сравнение точного решения для теплопроводности и термодиффузии в приближении Лоренца с полиномиальным разложением

3.3.1. Точное решение в приближении Лоренца

Приближение Лоренца для решения кинетического уравнения применимо, когда масса легких частиц (электронов) намного меньше, чем масса тяжелых частиц (ядер), и, кроме того, можно пренебречь электрон-электронными столкновениями. В этом приближении линейризованное уравнение Больцмана имеет точное решение. Данное приближение хорошо работает для переноса в металле,

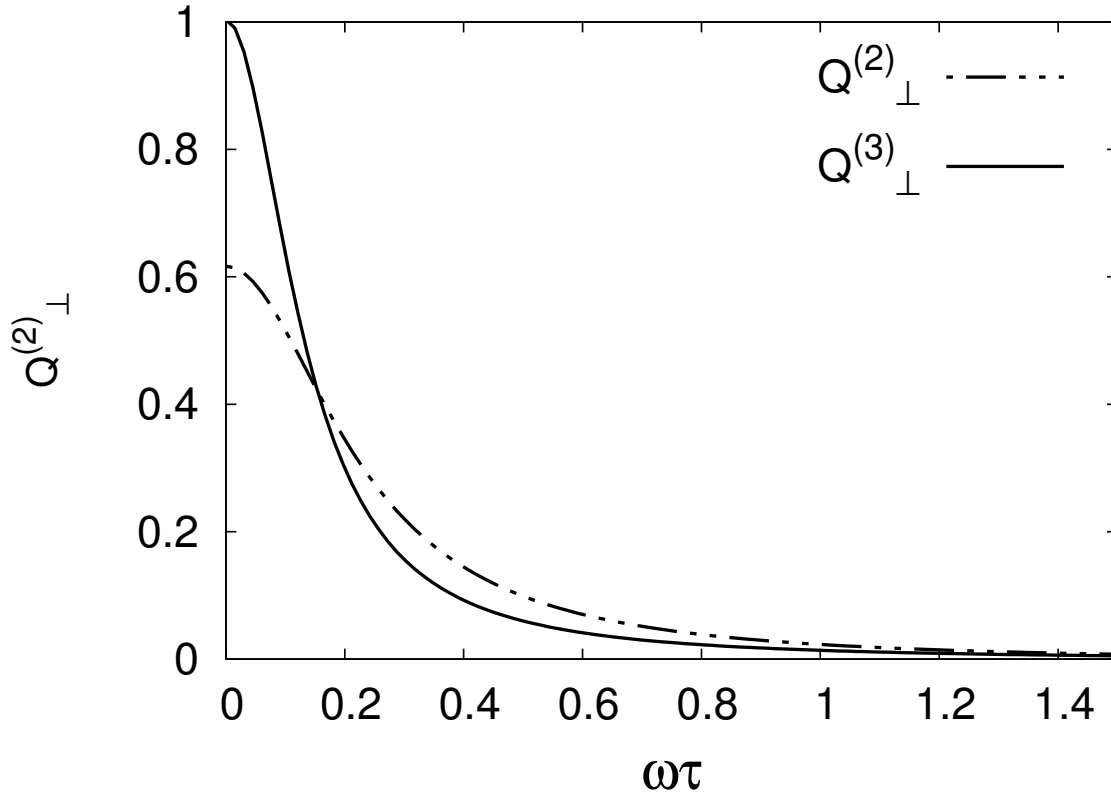


Рис. 3.2. Сравнение 2- и 3-полиномиального приближения коэффициента теплопроводности для невырожденной углеродной плазмы при $Z = 6$ для различных $\omega\tau$.

где сильное электронное вырождение позволяет пренебречь электрон-электронными столкновениями. Приближение Лоренца полезно для проверки приближенного полиномиального решения, поскольку дает возможность проследить за сходимостью приближенного решения к точному с увеличением степени полиномов. Решение в приближении Лоренца рассматривалось в разных подходах [21, 63, 46, 64, 65, 66, 67], см. также [59].

Точное решение в явном виде для приближения Лоренца получено для случая $B = 0$. Если мы полагаем, что тепловой поток связан с градиентом температуры при нулевом значении вектора диффузии d_i из (1.19), (1.20), то получаем выражение для теплового потока из [59] в виде

$$q_i = -\frac{640k}{\Lambda} \frac{m_e(kT)^4}{n_N Z^2 e^4 h^3} \left(G_5 - \frac{1}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_4 \right) \frac{\partial T}{\partial r_i}. \quad (3.63)$$

Здесь G_i - интеграл Ферми, см. [59]. В предельных случаях коэффициент в (3.63) сводится к

$$\begin{aligned}\lambda_e^l &= \frac{40\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\Lambda} k \frac{n_e}{n_N} \frac{(kT)^{5/2}}{e^4 Z^2 \sqrt{m_e}} = \frac{320}{3\pi} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd} \quad (ND) \\ &= \frac{5}{64\Lambda} \frac{k^2 T n_e^2 h^3}{m_e^2 n_N Z^2 e^4} = \frac{5\pi^2}{6} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_d \quad (D).\end{aligned}\quad (3.64)$$

Средняя диффузионная скорость при $V = 0$:

$$\langle v_i^A \rangle = -\frac{128k}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^3}{n_N n_e Z^2 e^4 h^3} \left(G_4 - \frac{5}{8} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_3 \right) \frac{\partial T}{\partial r_i}. \quad (3.65)$$

В предельных случаях коэффициент μ в (3.65) сводится к

$$\begin{aligned}\mu_e^l &= \frac{12k}{\pi^{3/2}\Lambda n_N} \frac{(kT)^{3/2}}{e^4 Z^2 \sqrt{2m_e}} = \frac{16k}{m_e \pi} \tau_{nd} \quad (ND) \\ &= \frac{2}{3\Lambda} \frac{k^2 T \pi h}{n_e n_N Z^2 e^4 m_e} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{4/3} = \frac{4\pi^3}{3} \frac{k^2 T}{n_e h^2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{1/3} \tau_d \quad (D).\end{aligned}\quad (3.66)$$

Точные формулы в модели Лоренца используются [21] для оценки точности полиномиального приближения. Вклад электрон-электронных столкновений в коэффициент термодиффузии для различных Z можно оценить из графика нормированных 3-полиномиальных коэффициентов термодиффузии в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, введя величину $V_{\perp}^{(3l)}$, определяемую как

$$V_{\perp}^{(3l)} = \frac{\mu_{nd}^{(13)}}{\mu_{e,nd}^l}. \quad (3.67)$$

Здесь $\mu_{e,nd}^l$ взято из верхней строчки в (3.66). Кривые для различных Z , включая $Z = \infty$, относящиеся к приближению Лорентца, изображены на рисунке 3.4. Пересечение графиков с осью y на рисунке 3.4 происходит в точках,

данных в таблице 3.2, умноженных на $\mu_{nd}^{(3)}/\mu_{e,nd}^l = 1.0124$. При $\omega\tau = 0.25$ имеем $V_{\perp}^{(3l)} = 0.0824, 0.0908, 0.1159, 0.0025$ для $Z = \infty, 26, 6, 2$ соответственно.

Ещё раз необходимо подчеркнуть, что коэффициент теплопроводности в (3.64) определяет значение теплового потока при нулевом значении вектора диффузии $d_i = 0$. Часто коэффициент теплопроводности записывают для случая с нулевой скоростью диффузии $\langle v_{\alpha i} \rangle = 0$ [21, 59]. Когда коэффициенты теплопроводности и диффузии вычисляются одновременно, тепловой и диффузионный потоки рассчитываются без каких-либо ограничения на вектор диффузии или скорость диффузии.

Аналогично (3.67), оценим вклад электрон-электронных столкновений в коэффициент теплопроводности для различных Z из графика нормированных 3-полиномиальных коэффициентов теплопроводности в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, введя величину $Q_{\perp}^{(3l)}$:

$$Q_{\perp}^{(3l)} = \frac{\lambda_{nd}^{(13)}}{\lambda_{e,nd}^l}. \quad (3.68)$$

Здесь $\lambda_{e,nd}^l$ взято из верхней строчки в (3.64). Кривые для различных Z , включая $Z = \infty$, относящиеся к приближению Лоренца, изображены на рисунке 3.3. Пересечение графиков с осью y на рисунке 3.3 происходит в точках, данных в таблице 3.1, умноженных на $\lambda_{nd}^{(3)}/\lambda_{e,nd}^l = 0.978$. При $\omega\tau = 1$ имеем $Q_{\perp}^{(3l)} = 0.0053, 0.0060, 0.0083, 0.014$ для $Z = \infty, 26, 6, 2$ соответственно.

Таблица 3.1. Значения Q для различных химических элементов: водород ($Z=1$); гелий ($Z=2$); углерод ($Z=6$); кислород ($Z=8$); железо ($Z=26$), ожидаемые для наружных слоев белых карликов и нейтронных звезд.

Z	1	2	6	8	26	∞
Q	0.23	0.365	0.62	0.68	0.87	1

Таблица 3.2. Значения V для различных химических элементов: водород ($Z=1$); гелий ($Z=2$); углерод ($Z=6$); кислород ($Z=8$); железо ($Z=26$), ожидаемые для наружных слоев белых карликов и нейтронных звезд.

Z	1	2	6	8	26	∞
V	0.268	0.407	0.653	0.712	0.885	1

3.3.2. Вычисления полиномов без учета столкновений между электронами

Чтобы проверить точность полиномиального приближения для коэффициентов теплопроводности и термодиффузии, необходимо сравнить их с коэффициентами, полученными как точное решение в приближении Лоренца. В отсутствии магнитного поля с $a_{jk} = 0$ система (1.33) в приближении невырожденных электронов сводится к:

$$\begin{cases} 0 = a_0 b_{00} + a_1 b_{01} + a_2 b_{02}, \\ -\frac{15}{4} n_e = a_0 b_{10} + a_1 b_{11} + a_2 b_{12}, \\ 0 = a_0 b_{20} + a_1 b_{21} + a_2 b_{22}. \end{cases} \quad (3.69)$$

С учетом (2.28)–(2.33) запишем данную систему как:

$$\begin{cases} 0 = \frac{3}{2} a_0 + \frac{9}{4} a_1 + \frac{45}{16} a_2, \\ -\frac{15}{4} \tau_{nd} = \frac{9}{4} a_0 + \frac{39}{8} a_1 + \frac{207}{32} a_2, \\ 0 = \frac{45}{16} a_0 + \frac{207}{32} a_1 + \frac{1299}{128} a_2. \end{cases} \quad (3.70)$$

Эта система записывается для 3-полиномиального приближения. Два первых уравнения при $a_2 = 0$ задают 2-полиномиальное приближение, давая, с учетом

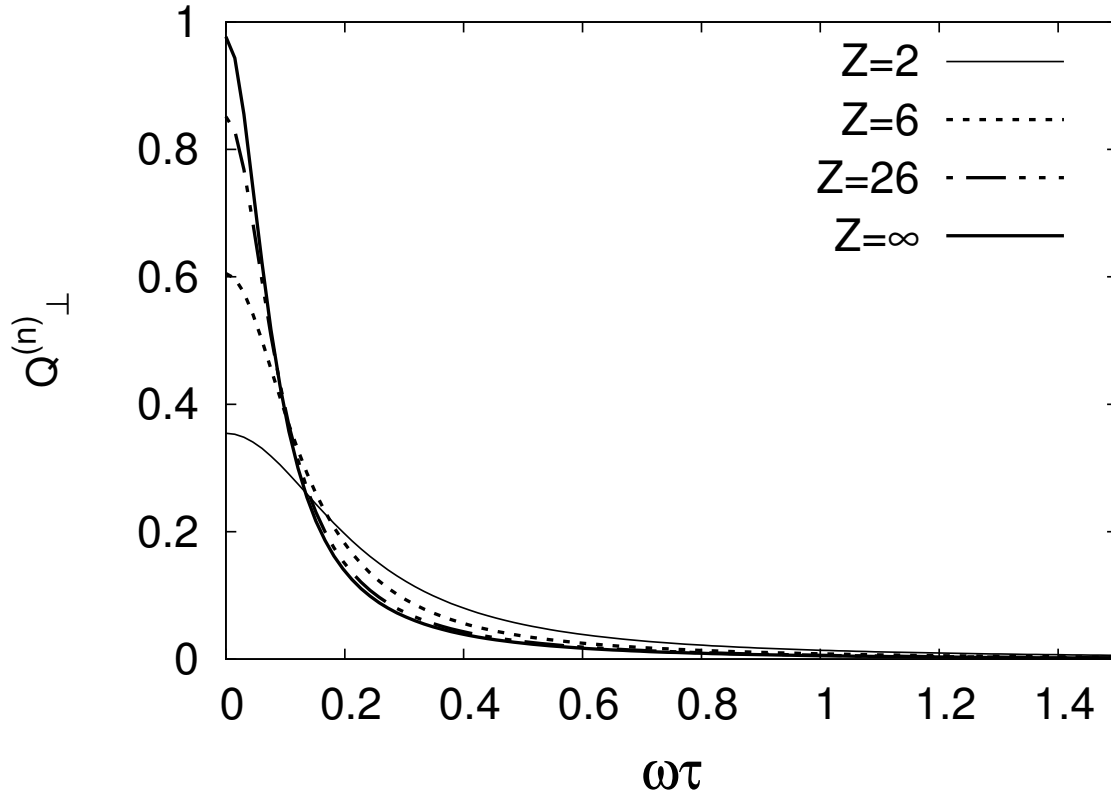


Рис. 3.3. Представлены графики значений $Q_{\perp}^{(3l)}$ как функции $\omega\tau$ в 3-полиномиальном приближении для невырожденной плазмы гелия ($Z = 2$), углерода ($Z = 6$), железа ($Z = 26$) в сравнении с лоренцевской плазмой, формально отвечающей $Z = \infty$. Отклонение от лоренцевской плазмы связано с вкладом электрон-электронных столкновений. Пересечение лоренцевской 3-полиномиальной кривой ($Z=\infty$) с осью Y при 0.978 связано с отклонением от точного решения в приближении Лоренца.

(3.5) и (3.7), следующие результаты:

$$a_0 = \frac{15}{4}\tau_{nd}, \quad a_1 = -\frac{5}{2}\tau_{nd}, \quad (3.71)$$

$$\mu_{ndl}^{(2)} = \frac{15}{4} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} = 3.75 \frac{k}{m_e} \tau_{nd}, \quad (3.72)$$

$$\lambda_{ndl}^{(2)} = \frac{25}{4} \frac{5}{2} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd} = 15.63 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd}.$$

В 3-полиномиальном приближении мы получаем решение (3.70) для a_0 , a_1 и, с учетом (3.7) и (3.5), коэффициенты теплопроводности и термодиффузии в виде:

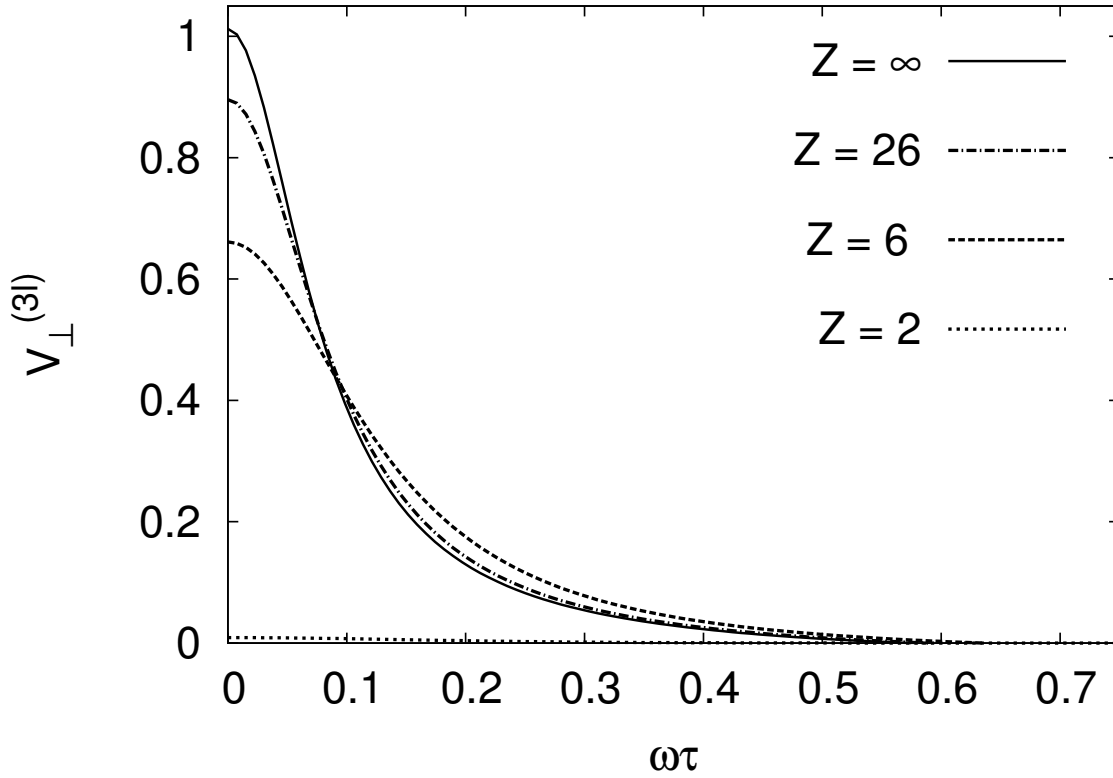


Рис. 3.4. Представлены графики значений $V_{\perp}^{(3l)}$ как функции $\omega\tau$ в 3-полиномиальном приближении для невырожденной плазмы гелия ($Z = 2$), углерода ($Z = 6$), железа ($Z = 26$) в сравнении с лоренцевской плазмой, формально отвечающей $Z = \infty$. Отклонение от лоренцевской плазмы связано с вкладом электрон-электронных столкновений. Пересечение лоренцевской 3-полиномиальной кривой ($Z=\infty$) с осью Y при 1.0124 связано с отклонением от точного решения в приближении Лоренца.

$$a_0 = \frac{165}{32}\tau_{nd}, \quad a_1 = -\frac{65}{8}\tau_{nd}, \quad (3.73)$$

$$\mu_{ndl}^{(3)} = \frac{165}{32} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} = 5.1563 \frac{k}{m_e} \tau_{nd}, \quad (3.74)$$

$$\lambda_{ndl}^{(3)} = \frac{425}{32} \frac{5}{2} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd} = \frac{2125}{64} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd} = 33.20 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd}.$$

Коэффициенты, полученные методом последовательных приближений, следует сравнить с точными решениями $\lambda_{nd}^{(l)}$ и $\mu_{nd}^{(l)}$, полученными методом Лоренца (3.64) и (3.66) для невырожденных электронов:

$$\mu_{nd}^{(l)} = \frac{16}{\pi} \frac{k}{m_e} \tau_{nd} = 5.0931 \frac{k}{m_e} \tau_{nd}, \quad (3.75)$$

$$\lambda_{nd}^{(l)} = \frac{320}{3\pi} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd} = 33.95 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{nd}. \quad (3.76)$$

Ясно, что 2-полиномиальное решение недооценивает коэффициент термодиффузии на 26 %, а 3-полиномиальное решение переоценивает приблизительно на 1.3%.

Из формул (3.72), (3.74), (3.76) видно, что 2-полиномиальное решение недооценивает коэффициент теплопроводности более, чем на 50%, а 3-полиномиальное решение отличается от точного приблизительно на 2.2%. Уравнения в случае 3-полиномиального приближения в присутствии магнитного поля получены с учетом (2.28)–(2.33), (3.70) в виде:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{3}{2} i\omega \tau_{nd} a_0 + \frac{3}{2} a_0 + \frac{9}{4} a_1 + \frac{45}{16} a_2, \\ -\frac{15}{4} \tau_{nd} = -\frac{15}{4} i\omega \tau_{nd} a_1 + \frac{9}{4} a_0 + \frac{39}{8} a_1 + \frac{207}{32} a_2, \\ 0 = -\frac{105}{16} i\omega \tau_{nd} a_2 + \frac{45}{16} a_0 + \frac{207}{32} a_1 + \frac{1299}{128} a_2. \end{cases} \quad (3.77)$$

Явное решение уравнений (3.77) для 2 и 3-полиномиальных приближений определяется формулами (3.20)–(3.32) при формально бесконечном значении Z .

3.4. Тензоры диффузии и диффузионного термоэффекта для невырожденных электронов

Чтобы найти коэффициенты d_0 , d_1 для невырожденных электронов, аналогично поиску коэффициентов термодиффузии и теплопроводности, необходимо решить систему уравнений (1.34) с матричными элементами b_{jk} из (2.28)–(2.33) и матричными элементами a_{jk} из (2.78)–(2.80).

Для невырожденных электронов с учётом 3х-полиномиального разложения, система (1.34) должна быть записана как:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3\tau_{nd}}{2n_e} = -\frac{3}{2}i\omega\tau_{nd}d_0 + \frac{3}{2}d_0 + \frac{9}{4}d_1 + \frac{45}{16}d_2 \\ 0 = -\frac{15}{4}i\omega\tau_{nd}d_1 + \frac{9}{4}d_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)d_1 + \frac{9}{8}\left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)d_2 \\ 0 = -\frac{105}{16}i\omega\tau_{nd}d_2 + \frac{45}{16}d_0 + \frac{9}{8}\left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)d_1 + \frac{3}{32}\left(\frac{433}{4} + \frac{45\sqrt{2}}{Z}\right)d_2 \end{array} \right. \quad (3.78)$$

Два первых уравнения при $d_2 = 0$ определяют 2-полиномиальное приближение, давая с учетом (3.6), (3.8) следующие результаты для случая $B = 0$:

$$d_0 = -\frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad d_1 = \frac{3\tau_{nd}}{2n_e} \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}}, \quad (3.79)$$

$$\eta_{nd}^{(2)} = -\frac{kT}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{\frac{13}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}}{1 + \sqrt{2}/Z}, \quad \nu_{nd}^{(2)} = -\frac{5k^2T^2}{2m_e} \tau_{nd} \frac{\frac{19}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z}}{1 + \sqrt{2}/Z}. \quad (3.80)$$

Результаты, полученные выше, совпадают с результатами, полученными в [32].

В 3-полиномиальном приближении и при $B = 0$ мы получаем решение (3.78) для d_0 и d_1 , в виде:

$$d_0 = -\frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{217/64 + 151\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (3.81)$$

$$d_1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{33/16 + 45\sqrt{2}/(16Z)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (3.82)$$

$$\eta_{nd}^{(3)} = -\frac{kT}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{217/64 + 151\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (3.83)$$

$$\nu_{nd}^{(3)} = -\frac{5k^2T^2}{2m_e} \frac{349/64 + 196\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)} \tau_{nd}. \quad (3.84)$$

Величины

$$U = \frac{64m_e n_e \eta_{nd}^{(3)}}{217kT\tau_{nd}} = -\frac{1 + 302\sqrt{2}/(17Z) + 288/(217Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (3.85)$$

$$W = \frac{128m_e \nu_{nd}^{(3)}}{1745k^2 T^2 \tau_{nd}} = -\frac{1 + 784\sqrt{2}/(349Z) + 288/(349Z^2)}{1 + 61\sqrt{2}/(16Z) + 9/(2Z^2)}, \quad (3.86)$$

показывающие, насколько невырожденные электрон-электронные столкновения уменьшают коэффициенты диффузии и диффузионного термоэффекта при $B = 0$, представлены в таблицах 3.3 и 3.4 для различных значений Z .

В 2-полиномиальном приближении с учётом магнитного поля, принимая $d_2 = 0$, мы получаем решение системы (3.78) в виде:

$$d_0 = \left(-\frac{13}{4} - \frac{\sqrt{2}}{Z} + \frac{5}{2}i\omega\tau_{nd} \right) \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2 - \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right]^{-1}, \quad (3.87)$$

$$d_0^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left(-\frac{13}{4} - \frac{17\sqrt{2}}{4Z} - \frac{25}{4}\omega^2\tau_{nd}^2 - \frac{2}{Z^2} \right) \zeta, \quad (3.88)$$

$$e_0^1 = -\frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left(\frac{259}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2} + \frac{25}{4}\omega^2\tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (3.89)$$

$$d_1 = \frac{13}{4} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2 - \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) i\omega\tau_{nd} \right]^{-1}, \quad (3.90)$$

$$d_1^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z} - \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2 \right) \zeta, \quad (3.91)$$

$$e_1^1 = \frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \frac{3}{2} \left(\frac{23}{4} + \frac{\sqrt{2}}{Z} \right) \zeta, \quad (3.92)$$

где значения ζ , ζ_1 , ζ_2 определены в (3.26), (3.33), (3.34).

В 3-полиномиальном приближении решение системы (3.78) имеет вид:

$$d_0 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left(-\frac{217}{64} - \frac{151\sqrt{2}}{16Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16}\omega^2\tau_{nd}^2 \right. \\ \left. + i\omega\tau_{nd} \left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \right) \frac{1}{\zeta_1 - i\omega\tau_{nd}\zeta_2}, \quad (3.93)$$

$$d_0^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left[\left(-\frac{217}{64} - \frac{151\sqrt{2}}{16Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16}\omega^2\tau_{nd}^2 \right) \zeta_1 \right. \\ \left. - \omega^2\tau_{nd}^2 \left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2\tau_{nd}^2\zeta_2^2}, \quad (3.94)$$

$$e_0^1 = \frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left[\left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z} \right) \zeta_1 - \right. \\ \left. \left(\frac{217}{64} + \frac{151\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16}\omega^2\tau_{nd}^2 \right) \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2\tau_{nd}^2\zeta_2^2}, \quad (3.95)$$

$$d_1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left(\frac{33}{16} + \frac{45\sqrt{2}}{16Z} - \frac{105}{16}i\omega\tau_{nd} \right) \frac{1}{\zeta_1 - i\omega\tau_{nd}\zeta_2}, \quad (3.96)$$

$$d_1^1 = \frac{\tau_{nd}}{n_e} \left[\left(\frac{33}{16} + \frac{45\sqrt{2}}{16Z} \right) \zeta_1 + \frac{105}{16}\omega^2\tau_{nd}^2\zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2\tau_{nd}^2\zeta_2^2}, \quad (3.97)$$

$$e_1^1 = \frac{1}{n_e} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{B} \left[-\frac{105}{16}\zeta_1 + \left(\frac{33}{16} + \frac{45\sqrt{2}}{16Z} \right) \zeta_2 \right] \frac{1}{\zeta_1^2 + \omega^2\tau_{nd}^2\zeta_2^2}, \quad (3.98)$$

Значения z_0^1 в 2-х и 3-полиномиальном приближении определяются с использованием (3.10).

Скорость $\langle v_i^D \rangle$ может быть записана в виде:

$$\langle v_i^D \rangle = -n_e \frac{kT}{m_e} [d_0^1 \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n e_0^1 + B_i B_k z_0^1] d_k = \langle v_i^D \rangle^{(1)} + \langle v_i^D \rangle^{(2)} + \langle v_i^D \rangle^{(3)}. \quad (3.99)$$

Поток тепла q_i^D может быть записан как:

$$q_i^D = -n_e \frac{5 k^2 T^2 n_e}{2 m_e} [(d_0^1 - d_1^1) \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n (e_0^1 - e_1^1) + B_i B_k (z_0^1 - z_1^1)] d_k = \quad (3.100)$$

$$= q_i^{D(1)} + q_i^{D(2)} + q_i^{D(3)}.$$

Компоненты диффузионной скорости и потока тепла можно выразить через компоненты тензоров диффузии и диффузионного термоэффекта:

$$\langle v_i^D \rangle^{(1)} = -n_e \frac{kT}{m_e} d_0^1 d_k = -n_e \eta_{nd}^{(1)} d_k, \quad (3.101)$$

$$\langle v_i^D \rangle^{(2)} = n_e \frac{kT}{m_e} \varepsilon_{ikn} B_n e_0^1 d_k = n_e \varepsilon_{ikn} B_n \eta_{nd}^{(2)} d_k, \quad (3.102)$$

$$\langle v_i^D \rangle^{(3)} = -n_e \frac{kT}{m_e} B_i B_k z_0^1 d_k = -n_e B_i B_k \eta_{nd}^{(3)} d_k, \quad (3.103)$$

$$q_i^{D(1)} = -n_e \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} (d_0^1 - d_1^1) \delta_{ik} d_k = -n_e \nu_{nd}^{(1)} d_k, \quad (3.104)$$

$$q_i^{D(2)} = n_e \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} \varepsilon_{ikn} B_n (e_0^1 - e_1^1) d_k = n_e \varepsilon_{ikn} B_n \nu_{nd}^{(2)} d_k, \quad (3.105)$$

$$q_i^{D(3)} = -n_e \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} B_i B_k (z_0^1 - z_1^1) d_k = -n_e B_i B_k \nu_{nd}^{(3)} d_k. \quad (3.106)$$

Для 2-полиномиального приближения получаем:

$$\eta_{nd}^{(12)} = \frac{kT}{m_e} d_0^1 = \frac{kT}{m_e} \frac{\tau_{nd}}{n_e} \frac{-\frac{13}{4} - \frac{17\sqrt{2}}{4Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4}, \quad (3.107)$$

$$\eta_{nd}^{(22)} = -\frac{kT}{m_e} e_0^1 \quad (3.108)$$

$$= -\frac{kT}{m_e} \frac{1}{n_e} \frac{\omega \tau_{nd}^2}{B} \frac{-\frac{259}{16} - \frac{13\sqrt{2}}{2Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{25}{4} \omega^2 \tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right) \omega^2 \tau_{nd}^2 + \frac{25}{4} \omega^4 \tau_{nd}^4},$$

$$B^2\eta_{nd}^{(32)} = \eta_{nd}^{(12)}(B=0) - \eta_{nd}^{(12)}. \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \nu_{nd}^{(12)} &= \frac{5k^2T^2n_e}{2m_e}(d_0^1 - d_1^1) \\ &= \frac{5k^2T^2n_e\tau_{nd}}{2m_e n_e} \frac{-\frac{19}{4} - \frac{23\sqrt{2}}{4Z} - \frac{2}{Z^2} - \frac{5}{2}\omega^2\tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right)\omega^2\tau_{nd}^2 + \frac{25}{4}\omega^4\tau_{nd}^4}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \nu_{nd}^{(22)} &= -\frac{5k^2T^2n_e}{2m_e}(e_0^1 - e_1^1) \\ &= -\frac{5k^2T^2n_e}{2m_e} \frac{1}{n_e B} \frac{\omega\tau_{nd}^2}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{Z}\right)^2 + \left(\frac{449}{16} + \frac{13\sqrt{2}}{2Z} + \frac{2}{Z^2}\right)\omega^2\tau_{nd}^2 + \frac{25}{4}\omega^4\tau_{nd}^4}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$B^2\nu_{nd}^{(32)} = \nu_{nd}^{(12)}(B=0) - \nu_{nd}^{(12)}. \quad (3.112)$$

Выражения для коэффициентов диффузии в 3-полиномиальном приближении могут быть записаны явно, с использованием (3.94)–(3.98):

$$\eta_{nd}^{(13)} = \frac{kT}{m_e}d_0^1 = \frac{kT\tau_{nd}}{m_e n_e} \frac{\left(-\frac{217}{64} - \frac{151\sqrt{2}}{16Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16}\omega^2\tau_{nd}^2\right)\zeta_1 - \omega^2\tau^2\left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z}\right)\zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2\tau^2\zeta_2^2}, \quad (3.113)$$

$$\eta_{nd}^{(23)} = -\frac{kT}{m_e}e_0^1 = -\frac{kT\omega\tau_{nd}^2}{m_e Bn_e} \frac{\left(\frac{3985}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z}\right)\zeta_1 - \left(\frac{217}{64} + \frac{151\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16}\omega^2\tau_{nd}^2\right)\zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2\tau^2\zeta_2^2}, \quad (3.114)$$

$$B^2\eta_{nd}^{(33)} = \eta_{nd}^{(13)}(B=0) - \eta_{nd}^{(13)}. \quad (3.115)$$

Аналогично для диффузионного термоэффекта:

$$\begin{aligned}\nu_{nd}^{(13)} &= \frac{5 k^2 T^2 n_e}{2 m_e} (d_0^1 - d_1^1) \\ &= \frac{5 k^2 T^2 \tau_{nd}}{2 m_e} \frac{\left(-\frac{349}{64} - \frac{49\sqrt{2}}{4Z} - \frac{9}{2Z^2} + \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2\right) \zeta_1 - \omega^2 \tau^2 \left(\frac{4825}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z}\right) \zeta_2}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau^2 \zeta_2^2},\end{aligned}\quad (3.116)$$

$$\begin{aligned}\nu_{nd}^{(23)} &= -\frac{5 k^2 T^2 n_e}{2 m_e} (e_0^1 - e_1^1) \\ &= -\frac{5 k^2 T^2 \omega \tau_{nd}^2}{2 m_e B} \frac{\left(\frac{4825}{128} + \frac{365\sqrt{2}}{32Z}\right) \zeta_1 - \zeta_2 \left(\frac{349}{64} + \frac{196\sqrt{2}}{16Z} + \frac{9}{2Z^2} - \frac{175}{16} \omega^2 \tau_{nd}^2\right)}{\zeta_1^2 + \omega^2 \tau^2 \zeta_2^2},\end{aligned}\quad (3.117)$$

$$B^2 \nu_{nd}^{(33)} = \nu_{nd}^{(13)}(B=0) - \nu_{nd}^{(13)}. \quad (3.118)$$

Получим другую форму записи компонентов тензоров диффузии и диффузионного термоэффекта в магнитном поле аналогично термодиффузии и теплопроводности. Три компоненты теплового потока и диффузионной скорости: параллельные $\langle v_i^D \rangle_{||}$, $q_{||}^D$, перпендикулярные $\langle v_i^D \rangle_{\perp}$, q_{\perp}^D к магнитному полю \mathbf{B} , и компоненты Холла $\langle v_i^D \rangle_{\text{hall}}$, q_{hall}^D перпендикулярные к обоим векторам ∇T и \mathbf{B} определяются соотношениями:

$$\langle v_i^D \rangle_{||} = -n_e \eta_{||} d_{||}, \quad q_{||}^D = -n_e \nu_{||} d_{||}, \quad (3.119)$$

$$\eta_{||} = \frac{kT}{m_e} [d_0^1 + B^2(z_0^1)] = \eta_{nd}, \quad (3.120)$$

$$\nu_{||} = \frac{5 k^2 T^2 n_e}{2 m_e} [(d_0^1 - d_1^1) + B^2(z_0^1 - z_1^1)] = \nu_{nd}, \quad (3.121)$$

$$\langle v_i^D \rangle_{\perp} = -n_e \eta_{\perp} d_{\perp}, \quad \eta_{\perp} = \frac{kT}{m_e} (d_0^1), \quad (3.122)$$

$$q_{\perp}^D = -n_e \nu_{\perp} d_{\perp}, \quad \nu_{\perp} = \frac{5}{2} \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} (d_0^1 - d_1^1), \quad (3.123)$$

$$\langle v_i^D \rangle_{\text{hall}} = -n_e \eta_{\text{hall}} \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{B}}{B}, \quad \eta_{\text{hall}} = \frac{kT}{m_e} B e_0^1. \quad (3.124)$$

$$q_{\text{hall}}^D = -n_e \nu_{\text{hall}} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B}, \quad \nu_{\text{hall}} = \frac{5}{2} \frac{k^2 T^2 n_e}{m_e} B (e_0^1 - e_1^1). \quad (3.125)$$

Результаты для двух полиномов совпадают с соответствующими результатами, полученными в [32].

Различие между 2-х и 3-полиномиальным приближением можно охарактеризовать сравнением величин $U_{\perp}^{(2)}$, $W_{\perp}^{(2)}$ и $U_{\perp}^{(3)}$, $W_{\perp}^{(3)}$:

$$U_{\perp}^{(2)} = \frac{\eta_{nd}^{(12)}}{\eta_{nd}^{(3)}}, \quad U_{\perp}^{(3)} = \frac{\eta_{nd}^{(13)}}{\eta_{nd}^{(3)}}, \quad W_{\perp}^{(2)} = \frac{\nu_{nd}^{(12)}}{\nu_{nd}^{(3)}}, \quad W_{\perp}^{(3)} = \frac{\nu_{nd}^{(13)}}{\nu_{nd}^{(3)}}, \quad (3.126)$$

где $\eta_{nd}^{(12)}$, $\nu_{nd}^{(12)}$ определяются в (3.107), (3.110), $\eta_{nd}^{(3)}$, $\nu_{nd}^{(3)}$ определяются в (3.84), (3.83) и $\eta_{nd}^{(13)}$, $\nu_{nd}^{(13)}$ определяются в (3.113), (3.116). Функции $U_{\perp}^{(2)}(\omega\tau_{nd})$, $W_{\perp}^{(2)}(\omega\tau_{nd})$, $U_{\perp}^{(3)}(\omega\tau_{nd})$, $W_{\perp}^{(3)}(\omega\tau_{nd})$ представлены на рисунке (3.7), (3.6), (3.5) для углерода, $Z = 6$.

Система уравнений (1.4) - (1.6) может быть дополнена уравнениями Максвелла (1.11)-(1.12). Для скалярной проводимости σ , когда

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.127)$$

уравнение для магнитного поля имеет вид [68]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (3.128)$$

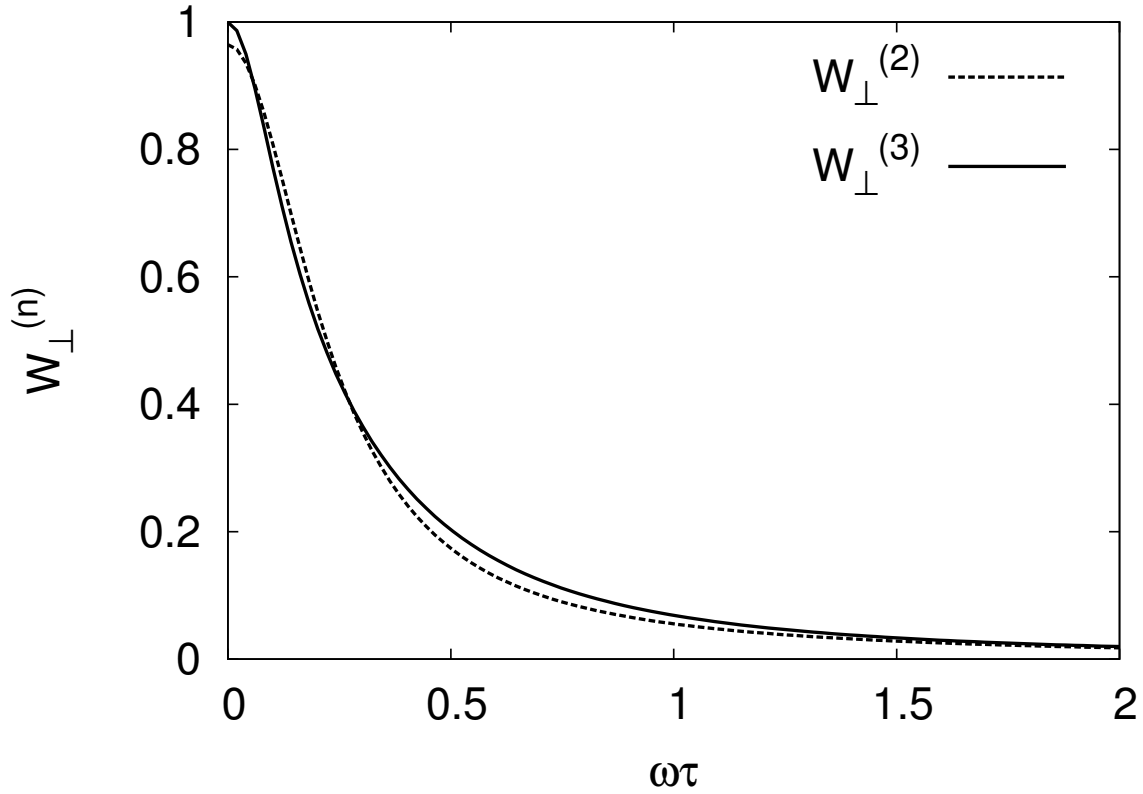


Рис. 3.5. Диффузионный термоэффект. Сравнение 2-х и 3-полиномиального приближения для невырожденной углеродной плазмы при $Z = 6$ для различных $\omega\tau$.

При строгом учёте кинетических коэффициентов выражение для вектора электрического тока j_i выглядит сложнее:

$$j_i = -en_e \langle v_i \rangle = -en_e [\langle v_i^{(A)} \rangle + \langle v_i^{(D)} \rangle] = -en_e \left[-\mu_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} - n_e \eta_{ij} d_j \right]. \quad (3.129)$$

Записывая компоненты j_i относительно направления магнитного поля \mathbf{B} электрический ток электронов в плазме записывается в виде:

$$j_{\parallel} = en_e (n_e \eta_{\parallel} d_{\parallel} + \mu_{\parallel} \nabla T_{\parallel}), \quad j_{\perp} = en_e (n_e \eta_{\perp} d_{\perp} + \mu_{\perp} \nabla T_{\perp}),$$

$$j_{\text{hall}} = en_e \left(n_e \eta_{\text{hall}} \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{B}}{B} + \mu_{\text{hall}} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B} \right). \quad (3.130)$$

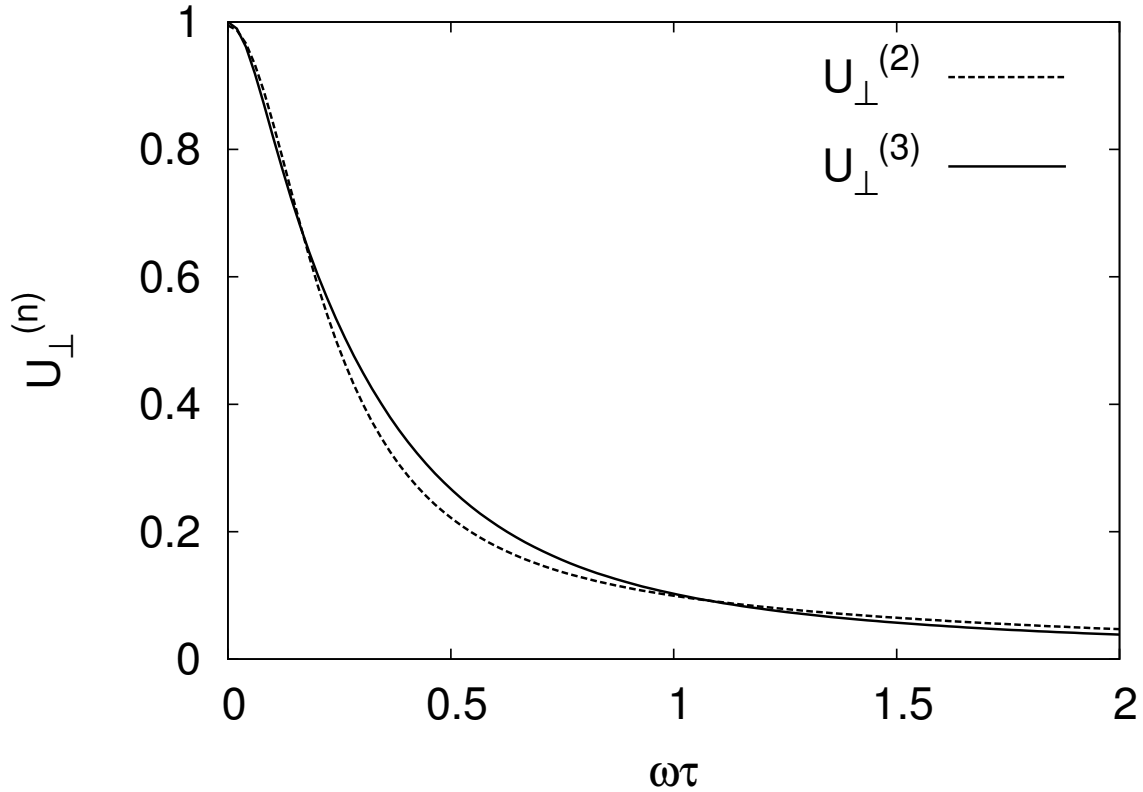


Рис. 3.6. Диффузия. Сравнение 2-х и 3-полиномиального приближения для невырожденной углеродной плазмы при $Z = 6$ для различных $\omega\tau$.

3.5. Сравнение точного решения для диффузии и диффузионного термоэффекта в приближении Лоренца с полиномиальным разложением

3.5.1. Точное решение в приближении Лоренца: диффузия и диффузионный термоэффект

Аналогично параграфу (3.3) получим точное решение для приближения Лоренца при $B = 0$:

$$\langle v_i^D \rangle = -n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \eta_{ij} d_j = \frac{32}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^4}{n_e n_N Z^2 e^4 h^3} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_3 d_i, \quad (3.131)$$

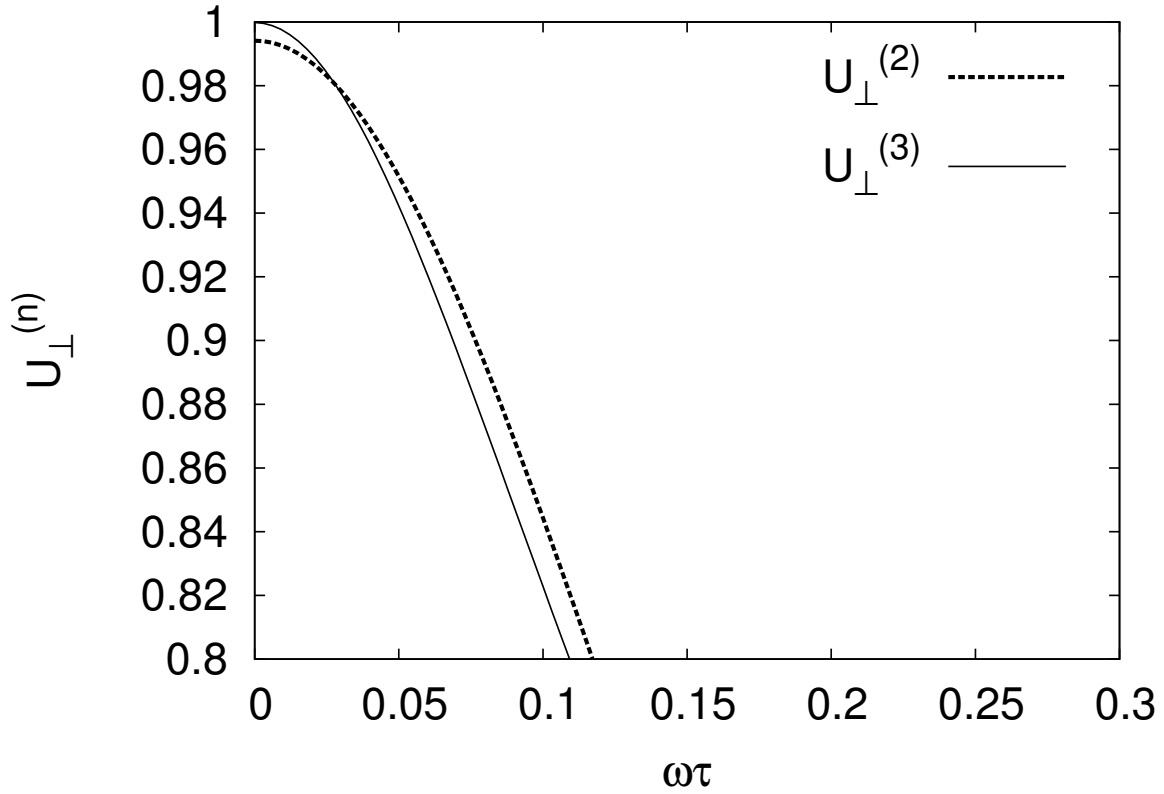


Рис. 3.7. Увеличенный сегмент графика сравнения 2-х и 3-полиномиального приближения для диффузии, при $\omega\tau < 0.15$.

$$q_i^D = -n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \nu_{ij} d_j = \frac{128}{\Lambda} \frac{m_e (kT)^5}{n_N Z^2 e^4 h^3} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_4 d_i. \quad (3.132)$$

В предельных случаях коэффициенты в (3.131), (3.132) сводятся к

$$\eta_e^l = -\frac{32}{3\pi} \frac{kT}{n_e m_e \pi} \tau_{nd}, \quad (3.133)$$

$$\nu_e^l = -\frac{128(kT)^2}{3\pi m_e} \tau_{nd}. \quad (3.134)$$

Вклад электрон-электронных столкновений в коэффициенты диффузии и диффузионного термоэффекта для различных Z можно оценить из графиков нормированных 3-полиномиальных коэффициентов в направлении, перпендикулярном к магнитному полю, введя величины $U_{\perp}^{(3l)}$ и $W_{\perp}^{(3l)}$, определяемые как

$$U_{\perp}^{(3l)} = \frac{\eta_{nd}^{(13)}}{\eta_e^l}, \quad W_{\perp}^{(3l)} = \frac{\nu_{nd}^{(13)}}{\nu_e^l} \quad (3.135)$$

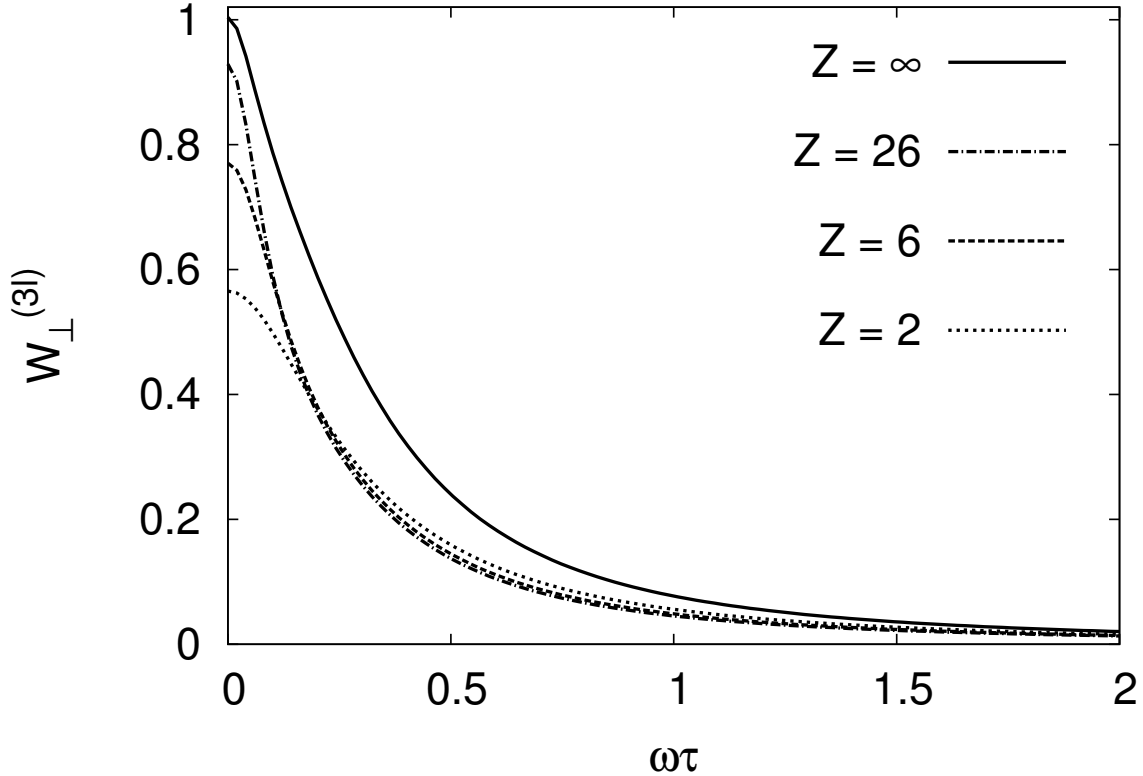


Рис. 3.8. Представлены графики значений диффузионного термоэффекта $W_{\perp}^{(3l)}$ как функции $\omega\tau$ в 3-полиномиальном приближении для невырожденной плазмы гелия ($Z = 2$), углерода ($Z = 6$), железа ($Z = 26$) в сравнении с лоренцевской плазмой, формально отвечающей $Z = \infty$. Пересечение лоренцевской 3-полиномиальной кривой ($Z = \infty$) с осью Y при 1.0038 связано с отклонением от точного решения в приближении Лорентца.

Кривые для различных Z , включая $Z = \infty$, относящиеся к приближению Лоренца, изображены на рисунках 3.9, 3.8.

Пересечение графиков с осью y на рисунках происходит в точках, данных в таблицах 3.3 и 3.4, умноженных на $\eta_{nd}^{(3)}/\eta_e^l = 0.9985$, $\nu_{nd}^{(3)}/\nu_e^l = 1.0038$. При $\omega\tau = 1$ имеем $U_{\perp}^{(3l)} = 0.0079, 0.0081, 0.0086, 0.095$ для $Z = \infty, 26, 6, 2$ соответственно и $W_{\perp}^{(3l)} = 0.0443, 0.0455, 0.0488, 0.0563$ для $Z = \infty, 26, 6, 2$.

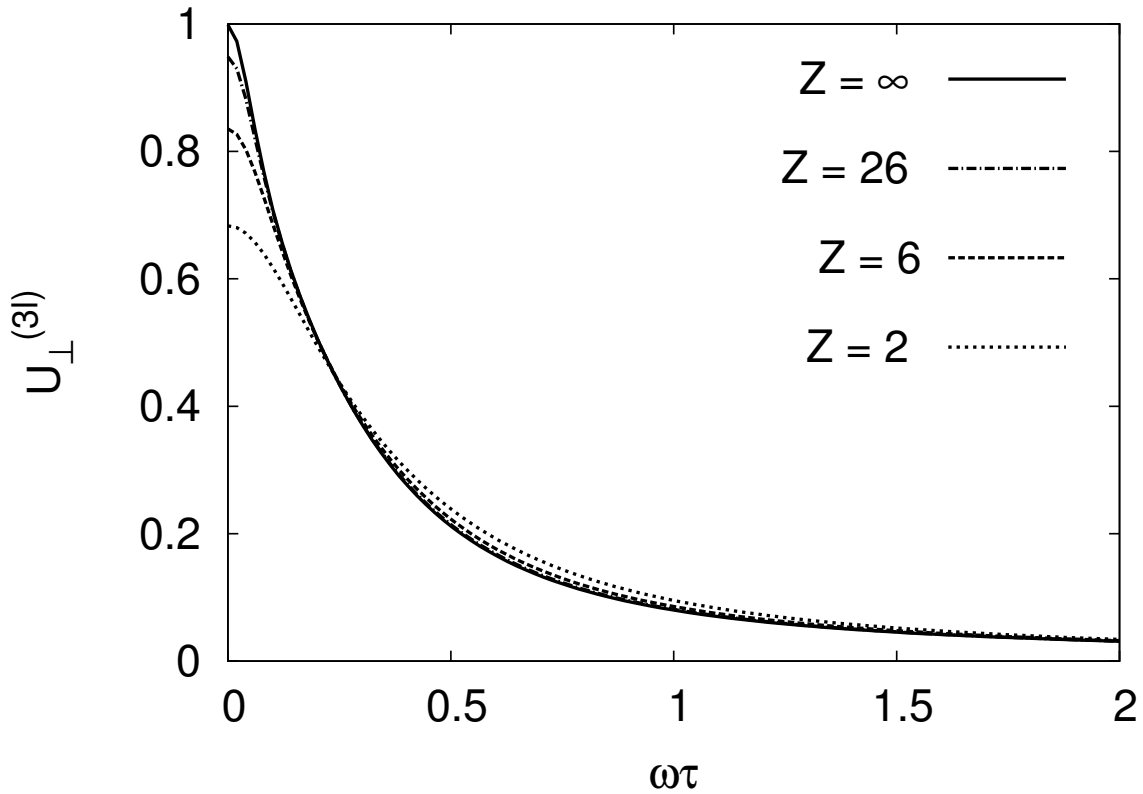


Рис. 3.9. Представлены графики значений диффузии $U_{\perp}^{(3l)}$ как функции $\omega\tau$ в 3-полиномиальном приближении для невырожденной плазмы гелия ($Z = 2$), углерода ($Z = 6$), железа ($Z = 26$) в сравнении с лоренцевской плазмой, формально отвечающей $Z = \infty$. Пересечение лоренцевской 3-полиномиальной кривой ($Z = \infty$) с осью Y при 0.9985 связано с отклонением от точного решения в приближении Лоренца.

3.5.2. Вычисления полиномов без учета столкновений между электронами: диффузия и диффузионный термоэффект

Чтобы проверить точность полиномиального приближения для коэффициентов диффузии и диффузионного термоэффекта, сравним их с коэффициентами, полученными как точное решение в приближении Лоренца. В отсутствии магнитного поля, с $a_{jk} = 0$, система (3.78) сводится к

Таблица 3.3. Значения U для различных химических элементов: водород ($Z=1$), гелий ($Z=2$), углерод ($Z=6$), кислород ($Z=8$), железо ($Z=26$), ожидаемые для наружных слоев белых карликов и нейтронных звезд.

Z	1	2	6	8	26	∞
U	0.575	0.684	0.836	0.868	0.949	1

Таблица 3.4. Значения W для различных химических элементов: водород ($Z=1$), гелий ($Z=2$), углерод ($Z=6$), кислород ($Z=8$), железо ($Z=26$), ожидаемые для наружных слоев белых карликов и нейтронных звезд.

Z	1	2	6	8	26	∞
W	0.459	0.579	0.767	0.809	0.925	1

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} = d_0 b_{00} + d_1 b_{01} + d_2 b_{02}, \\ 0 = d_0 b_{10} + d_1 b_{11} + d_2 b_{12}, \\ 0 = d_0 b_{20} + d_1 b_{21} + d_2 b_{22}. \end{cases} \quad (3.136)$$

С учетом (2.28)–(2.33) запишем данную систему как

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = \frac{3}{2} d_0 + \frac{9}{4} d_1 + \frac{45}{16} d_2, \\ 0 = \frac{9}{4} d_0 + \frac{39}{8} d_1 + \frac{207}{32} d_2, \\ 0 = \frac{45}{16} d_0 + \frac{207}{32} d_1 + \frac{1299}{128} d_2. \end{cases} \quad (3.137)$$

Эта система записывается для 3-полиномиального приближения. Два первых уравнения при $d_2 = 0$ задают 2-полиномиальное приближение, давая следующие результаты:

$$d_0 = \frac{-13}{4} \frac{\tau_{nd}}{n_e}, \quad d_1 = \frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e}, \quad (3.138)$$

$$\eta_{ndl}^{(2)} = -\frac{13 kT \tau_{nd}}{4 m_e n_e} = -3.25 \frac{kT \tau_{nd}}{m_e n_e},$$

$$\nu_{ndl}^{(2)} = -\frac{5 k^2 T^2 n_e \tau_{nd}}{2 m_e n_e} \frac{19}{4} = -11.875 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd}.$$

В 3-полиномиальном приближении мы получаем решение (3.137) для d_0 , d_1 и коэффициенты в виде:

$$d_0 = -\frac{217 \tau_{nd}}{64 n_e}, \quad d_1 = \frac{33 \tau_{nd}}{16 n_e}, \quad (3.139)$$

$$\eta_{ndl}^{(3)} = -\frac{217 kT \tau_{nd}}{64 m_e n_e} = -3.3906 \frac{kT \tau_{nd}}{m_e n_e},$$

$$\nu_{ndl}^{(3)} = -\frac{5 \cdot 349 k^2 T^2 n_e \tau_{nd}}{2 \cdot 64 m_e n_e} = -\frac{1745 k^2 T^2}{128 m_e} \tau_{nd} = -13.6328 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd}.$$

Абсолютные значения диффузии и диффузионного термоэффекта, полученные методом последовательных приближений полиномов, следует сравнить с точным решением $\nu_{nd}^{(l)}$, $\eta_{nd}^{(l)}$ полученным методом Лорентца (3.131), (3.132) для невырожденных электронов:

$$\eta_{nd}^{(l)} = -\frac{32 kT}{3\pi m_e n_e} \tau_{nd} = -3.3954 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{nd}, \quad (3.140)$$

$$\nu_{nd}^{(l)} = -\frac{128 k^2 T^2}{3\pi m_e} \tau_{nd} = -13.5816 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{nd}. \quad (3.141)$$

Ясно, что 2-полиномиальное решение недооценивает значение коэффициента диффузии на 4.28%, диффузионного термоэффекта на 12.53%, а 3-полиномиальное решение отличается от точного приблизительно на 0.14% для диффузии и на 0.38% для диффузионного термоэффекта. Уравнения в случае 3-полиномиального приближения в присутствии магнитного поля получены из (3.78) с учетом (2.28)–(2.33), (3.137) в виде:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \frac{\tau_{nd}}{n_e} = -\frac{3}{2} i\omega\tau_{nd}d_0 + \frac{3}{2}d_0 + \frac{9}{4}d_1 + \frac{45}{16}d_2, \\ 0 = -\frac{15}{4} i\omega\tau_{nd}d_1 + \frac{9}{4}d_0 + \frac{39}{8}d_1 + \frac{207}{32}d_2, \\ 0 = -\frac{105}{16} i\omega\tau_{nd}d_2 + \frac{45}{16}d_0 + \frac{207}{32}d_1 + \frac{1299}{128}d_2. \end{cases} \quad (3.142)$$

Явное решение уравнений (3.142) для 2 и 3-полиномиальных приближений определяется формулами (3.88)–(3.98) при формально бесконечном значении Z .

Выводы к третьей главе

В данной главе на основе решения уравнения Больцмана методом Чепмена-Энскога, которое изложено в первой и второй главах, рассчитаны коэффициенты теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта в явном виде для невырожденных электронов в магнитном поле. Выполнено сравнение с коэффициентами, полученными как точное решение в приближении Лоренца. Получены оценки вклада электрон-электронных столкновений для различных Z . Тензоры получены для произвольных направления магнитного поля и градиента температуры в декартовой системе координат, согласно [62]. Полученные здесь результаты в 2-полиномиальном случае точно согласуются с результатами предыдущих работ [31, 32, 62]. Аналитическое решение в 3-полиномиальном приближении прежде не было получено. Значение коэффициентов теплопроводности, полученное в известной работе Брагинского [41] в 2-полиномиальном приближении, в два раза меньше, чем полученное здесь соответствующее значение. Это связано с подходом, используемым в работе [41], который отличается от классического метода Чепмена-Энскога [21]. В работе Брагинского считалось, что половина теплового потока скрыта в так называемой "тепловой силе" таким образом, что результирующий тепловой поток в сопутствующей системе отсчета одинаков в обоих рассмотренных случаях.

По результатам третьей главы были опубликованы следующие статьи:

1. *Бисноватый-Коган Г. С., Глушихина М. В.*, Вычисление коэффициентов теплопроводности в замагниченном плотном веществе //Физика Плазмы, т. 44, с. 355-374, 2018

2. *Глушихина М. В.*, Четыре тензора, определяющие тепло- и электропроводность невырожденных электронов в замагниченной плазме //Физика Плазмы, т. 46, с. 121-138, 2020

3. *Glushikhina M. V., Moiseenko S. G.*, MHD processes near compact objects // The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories, held 12-18 July 2015 in Rome, Italy., 2015, pp. 385-408 Edited by Massimo Bianchi, Robert T Jansen and Remo Ruffini.

4. *Glushikhina M. V., Bisnovaty-Kogan G. S.*, Calculation of thermal conductivity coefficients of electrons in magnetized neutron star, // The Thirteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories - Proceedings of the MG13 Meeting on General Relativity, 2012, v.2, pp. 1353-1357

$DL = \varepsilon_{fe}/kT = 1.011$, система (4.1) записывается в виде:

$$\begin{cases} 0 = -1.5i\omega n_e a_0 + a_0 b_{00} + a_1 b_{01} + a_2 b_{02}, \\ -3.88n_e = -3.88i\omega n_e a_1 + a_0 b_{10} + a_1 b_{11} + a_2 b_{12}, \\ 0 = -7.138i\omega n_e a_2 + a_0 b_{20} + a_1 b_{21} + a_2 b_{22}, \end{cases} \quad (4.2)$$

где элементы b_{jk} определяются в (2.41)–(2.43). В отсутствие магнитного поля эта система сводится к:

$$\begin{cases} 0 = a_0 b_{00} + a_1 b_{01} + a_2 b_{02}, \\ -3.88n_e = a_0 b_{10} + a_1 b_{11} + a_2 b_{12}, \\ 0 = a_0 b_{20} + a_1 b_{21} + a_2 b_{22}. \end{cases} \quad (4.3)$$

С учетом (2.41)–(2.43) эту систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} 0 = 1.5a_0 + 2.16a_1 + 2.588a_2, \\ -3.88\tau_{d0} = 2.16a_0 + 5.162a_1 + 6.671a_2, \\ 0 = 2.588a_0 + 6.671a_1 + 11.038a_2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Данная система написана для 3-полиномиального приближения. Первые два уравнения при $a_2 = 0$ определяют 2-полиномиальное приближение, которое с учетом (3.3) и (3.5), дает следующий результат:

$$a_0 = 2.723\tau_{d0}, \quad a_1 = -1.891\tau_{d0}, \quad (4.5)$$

$$\mu_{d0l}^{(2)} = 2.723 \frac{k}{m_e} \tau_{d0}, \quad (4.6)$$

$$\lambda_{d0l}^{(2)} = 5.043 \frac{5k^2 T n_e}{2m_e} \tau_{nd} = 12.61 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{d0}.$$

В 3-полиномиальном приближении, с учетом (3.3) и (3.5), мы получаем решение (4.4) для a_0 , a_1 , а также коэффициенты теплопроводности и термодиффузии в виде:

$$a_0 = 3.533\tau_{d0}, \quad a_1 = -5.295\tau_{d0}, \quad (4.7)$$

$$\mu_{d0l}^{(3)} = 3.533 \frac{k}{m_e} \tau_{d0}, \quad (4.8)$$

$$\lambda_{d0l}^{(3)} = 8.278 \frac{5}{2} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{d0} = 22.07 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{d0}.$$

Коэффициенты, полученные методом последовательных приближений, следует сравнить с точным решением $\lambda_{nd}^{(l)}$, полученным методом Лоренца (3.63) для невырожденных электронов

$$\lambda_{d0}^{(l)} = 0.744 \frac{320}{3\pi} \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{d0} = 25.26 \frac{k^2 T n_e}{m_e} \tau_{d0}. \quad (4.9)$$

Видно, что 2-полиномиальное решение недооценивает коэффициент теплопроводности более, чем на 50%, а 3-полиномиальное решение отличается от точного решения приблизительно на 13%. Таким образом, сходимость полиномиального приближения к точному значению происходит медленнее, чем для невырожденных электронов в предыдущем разделе. Аналогично для термодиффузии, сравним с точным решением μ_{nd}^l из (3.65)

$$\mu_{d0}^{(l)} = 0.744 \frac{16}{\pi} \frac{k}{m_e} \tau_{d0} = 3.789 \frac{k}{m_e} \tau_{d0}. \quad (4.10)$$

Видно, что 2-полиномиальное решение недооценивает коэффициент термодиффузии более, чем на 28%, а 3-полиномиальное решение отличается от точного решения приблизительно на 7%.

4.2. Тензор теплопроводности для сильно вырожденных электронов, полученный методом последовательных приближений

Для оценки точности полиномиального приближения, получим коэффициент теплопроводности для случая сильного вырождения и сравним с точным решением, полученным из решения уравнения Больцмана в приближении Лоренца. Элементы недиагональной матрицы b_{ik} , $i \neq k$ для сильно вырожденного случая оказываются намного меньше, чем диагональные b_{ii} , согласно (2.53), (2.54). В этом случае при $x_0 \gg 1$, и пренебрегая членами $\sim 1/x_0$, получаем упрощенную систему (4.1) для 3-полиномиального разложения в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{3}{2}i\omega n_e a_0 + a_0 b_{00}, \\ -\frac{15}{4}n_e \frac{2\pi^2}{15} = -\frac{15}{4} \frac{2\pi^2}{15} i\omega n_e a_1 + a_1 b_{11}, \\ 0 = -\frac{105}{16} \left(-\frac{35}{8} \frac{G_{7/2}^2}{G_{3/2}^2} + \frac{49}{2} \frac{G_{7/2}^2 G_{7/2}}{G_{5/2}^2 G_{3/2}} - \frac{63}{2} \frac{G_{9/2} G_{7/2}}{g_{5/2} G_{3/2}} + \frac{99}{8} \frac{G_{11/2}}{G_{3/2}} \right) i\omega n_e a_2 + a_2 b_{22}. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Решение системы (4.11), с учетом (2.45), (2.54), записывается в форме:

$$a_0 = 0, \quad a_2 = 0, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\frac{15}{4}n_e \frac{2\pi^2}{15}}{\frac{15}{4} \frac{2\pi^2}{15} i n_e \omega - b_{11}} = \frac{\frac{\pi^2 n_e}{2}}{i\omega \frac{\pi^2 n_e}{2} - \frac{\pi^2 n_e}{2\tau_d}} = \\ &= -\frac{\tau_d}{1 - i\omega\tau_d} = -\tau_d \frac{1 + i\omega\tau_d}{1 + \omega^2\tau_d^2} = a_1^1 + iBb_{11}^1, \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$c_1^1 = -\frac{\tau_d}{B^2} \frac{\omega^2 \tau_d^2}{1 + \omega^2 \tau_d^2}. \quad (4.14)$$

Пользуясь (3.3), получаем компоненты тензора теплопроводности в магнитном поле для сильно вырожденных электронов в полиномиальном приближении. Три компоненты теплового потока: параллельная $q_{\parallel}^{(sd)}$, перпендикулярная $q_{\perp}^{(sd)}$ к магнитному полю \mathbf{B} , и компонента Холла $q_{\text{hall}}^{(sd)}$ теплового потока, ортогональная обоим векторам ∇T и \mathbf{B} , с учетом (3.63), (4.12), (4.13), определяются соотношениями

$$q_{\parallel}^{(sd)} = -\lambda_{\parallel}^{(sd)} \nabla T_{\parallel},$$

$$\lambda_{\parallel}^{(sd)} = -\frac{\pi^2 k^2 T n_e}{3 m_e} (a_1^1 + B^2 c_1^1) = \frac{\pi^2 k^2 T n_e}{3 m_e} \tau_d, \quad (4.15)$$

$$q_{\perp}^{(sd)} = -\lambda_{\perp}^{(sd)} \nabla T_{\perp},$$

$$\lambda_{\perp}^{(sd)} = -\frac{\pi^2 k^2 T n_e}{3 m_e} a_1^1 = \frac{\pi^2 k^2 T n_e}{3 m_e} \frac{\tau_d}{1 + \omega^2 \tau_d^2}, \quad (4.16)$$

$$q_{\text{hall}}^{(sd)} = -\lambda_{\text{hall}}^{(sd)} \frac{\nabla T \times \mathbf{B}}{B}, \quad \lambda_{\text{hall}}^{(sd)} = -\frac{\pi^2 k^2 T n_e}{3 m_e} \frac{\omega \tau_d^2}{1 + \omega^2 \tau_d^2}. \quad (4.17)$$

Сравнивая (4.17) с точным значением для сильно вырожденных электронов в приближении Лоренца (3.64), мы видим, что полиномиальное приближение, где пренебрегается членами $\sim x_0^{-1}$, дает значение, 2.5 раза меньшее, чем точное. Такое значение, а также простая зависимость тензора теплопроводности от магнитного поля $q_{\parallel}^{(sd)}/q_{\perp}^{(sd)} = (1 + \omega^2 \tau_d^2)$ получаются также из упрощенной теории теплопроводности и диффузии в присутствии магнитного поля, основанной на средней длине свободного пробега, которая описана в [21]. Значение коэффициента теплопроводности, которое следует из этого подхода, рассматривается в [48, 49] и многих других последующих работах. Рассчитанный здесь тепловой поток связан только с градиентом температуры, когда вектор диффузии $d_i = 0$. В лабораторных условиях, когда электрическая проводимость мала и электрический ток быстро затухает, рассматривают другой случай, где $j_i \sim \langle v_i \rangle = 0$. Это ограничение приводит к линейной связи между d_i и ∇T , что позволяет [21] исключить d_i и выразить тепловой поток как прямо пропорциональный

∇T с другим коэффициентом теплопроводности λ_j . Для сильно вырожденных электронов мы имеем $\lambda_j = 0.4\lambda_e^l = \lambda_{||}^{(sd)}$, см. (3.64), (4.15) и [59].

4.3. Тензоры диффузии и диффузионного термоэффекта в случае частично вырожденных электронов

Для плазмы с произвольно вырожденными электронами в магнитном поле без $a_{jk} = 0$ система (1.34) будет выглядеть так:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}i\omega n_e d_0 + d_0 b_{00} + d_1 b_{01} + d_2 b_{02}, \\ 0 = -\frac{15}{4} \left(\frac{7G_{7/2}}{2G_{3/2}} - \frac{5G_{5/2}^2}{2G_{3/2}^2} \right) i\omega n_e d_1 + d_0 b_{10} + d_1 b_{11} + d_2 b_{12}, \\ 0 = -\frac{105}{16} \left(-\frac{35}{8} \frac{G_{7/2}^2}{G_{3/2}^2} + \frac{49}{2} \frac{G_{7/2}^2}{G_{5/2}^2} \frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} - \frac{63}{2} \frac{G_{9/2}}{G_{5/2}} \frac{G_{7/2}}{G_{3/2}} + \frac{99}{8} \frac{G_{11/2}}{G_{3/2}} \right) i\omega n_e d_2 + d_0 b_{20} \\ + d_1 b_{21} + d_2 b_{22}. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Для частично вырожденных электронов с уровнем вырождения $DL = \varepsilon_{fe}/kT = 1.011$ и при отсутствии магнитного поля, система (4.18) записывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1.5 = d_0 b_{00} + d_1 b_{01} + d_2 b_{02}, \\ 0 = d_0 b_{10} + d_1 b_{11} + d_2 b_{12}, \\ 0 = d_0 b_{20} + d_1 b_{21} + d_2 b_{22}. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

С учетом значений коэффициентов b_{jk} , полученных во второй главе, эту систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} -1.5 \frac{\tau_{d0}}{n_e} = 1.5d_0 + 2.16d_1 + 2.588d_2, \\ 0 = 2.16d_0 + 5.162d_1 + 6.671d_2, \\ 0 = 2.588d_0 + 6.671d_1 + 11.038d_2. \end{cases} \quad (4.20)$$

Первые два уравнения при $d_2 = 0$ определяют 2-полиномиальное приближение, которое с учетом (3.6) и (3.4), дает следующий результат:

$$\begin{aligned} d_0 &= -2.5161 \frac{\tau_{d0}}{n_e} & d_1 &= 1.0528 \frac{\tau_{d0}}{n_e} \\ \eta_{d0l}^{(2)} &= -2.516 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0}. \\ \nu_{d0l}^{(2)} &= -9.853 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В 3-полиномиальном приближении, мы получаем решение (4.20) для d_0 , d_1 , а также коэффициенты диффузии и диффузионного термоэффекта в виде:

$$d_0 = -2.591 \tau_{d0}, \quad d_1 = 1.3658 \tau_{d0}, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \eta_{d0l}^{(3)} &= -2.591 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0}, \\ \nu_{d0l}^{(3)} &= -10.873 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0}. \end{aligned}$$

Коэффициенты, полученные методом последовательных приближений, следует сравнить с точным решением $\eta_{nd}^{(l)}$, $\nu_{nd}^{(l)}$, полученным методом Лорентца (3.133), (3.134) для невырожденных электронов:

$$\eta_{d0}^{(l)} = -0.744 \frac{32}{3\pi} \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0} = -2.526 \frac{kT}{m_e n_e} \tau_{d0}, \quad (4.23)$$

$$\nu_{d0}^{(l)} = -0.744 \frac{128}{3\pi} \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0} = -10.105 \frac{k^2 T^2}{m_e} \tau_{d0}. \quad (4.24)$$

Видно, что 2-полиномиальное решение для диффузии отличается от точного на 0.4%, а 3-полиномиальное решение - на 2.6%. Для диффузионного термоэффекта: 2-полиномиальное на 2.5%, а 3-полиномиальное приблизительно на 8% отличаются от точного.

Выводы к четвёртой главе

На примере приближения Лорентца было показано, что точность приближения рядом ортогональных функций, аналогичных полиномам Сонина, уменьшается с увеличением степени вырождения. Для сильно вырожденных электронов количество функций, необходимых для высокой точности, увеличивается $\sim x_0$ при $x_0 \gg 1$, а для небольшого количества функций итоговый коэффициент теплопроводности при $B = 0$ в 2.5 раза меньше, чем точное значение. Для умеренно вырожденных электронов с $x_0 = 0$ приближение тремя ортогональными функциями дает значение коэффициента теплопроводности, приблизительно на 13% меньшее, чем точное значение (в приближении Лорентца при $B = 0$). В том же приближении для невырожденных электронов значение коэффициента теплопроводности лишь на 2.2% меньше, чем точное значение (см. Главу 3).

Для невырожденных электронов, без учета электрон-электронных столкновений, значение коэффициента термодиффузии в 2-полиномиальном приближении недооценивает точное решение, полученное в приближении Лорентца при $B = 0$, на 26%, а в 3-полиномиальном приближении переоценивает приблизительно на 1%. Для частично вырожденных электронов, при $x_0 = 0$, 2-полиномиальное решение недооценивает точное на 28%, а 3-полиномиальное недооценивает точное на 7%.

Значение коэффициента диффузии, полученное из 2-полиномиального приближения недооценивают точное решение приблизительно на 4%, а 3-полиноми-

альное решение недооценивает точное на 0.14% для невырожденных электронов. В случае частичного вырождения диффузия полученная из 2-полиномиального решения на 0.4% недооценивает точное, а полученная из 3-полиномиального на 3% переоценивает точное.

Коэффициент диффузионного термоэффекта для невырожденных электронов в 2-полиномиальном приближении на 12% недооценивает, а в 3-полиномиальном на 0.4% переоценивает точное решение. При частичном вырождении электронов, 2-полиномиальное решение на 2.5% недооценивает, а 3-полиномиальное на 8% переоценивает точное решение.

Следует отметить, что электрон-электронные столкновения еще больше уменьшают значения кинетических коэффициентов. Следовательно, в приближении с тремя функциями, подход Лоренца может дать более точное значение для случая умеренно вырожденных электронов, чем в случае с учетом электрон-электронных столкновений.

Результаты, полученные в четвёртой главе, были опубликованы в следующих статьях:

1. *Бисноватый-Коган Г. С., Глушихина М. В.*, Вычисление коэффициентов теплопроводности в замагниченном плотном веществе // *Физика Плазмы*, т. 44, с. 355-374, 2018

2. *Глушихина М. В.*, Четыре тензора, определяющие тепло- и электропроводность невырожденных электронов в замагниченной плазме // *Физика Плазмы*, т. 46, с. 121-138, 2020

Глава 5

Расчет коэффициентов теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта в случае сильного вырождения

5.1. Уравнение Больцмана в приближении Лоренца

В данной главе выполнен расчёт кинетических коэффициентов сильно вырожденных электронов в магнитном поле.

Проводимость в вырожденных звёздах рассматривалась в работах многих авторов. Электропроводность и теплопроводность в вырожденном релятивистском звёздном веществе, на основе решения уравнения Больцмана в приближении времени релаксации, были рассчитаны в работе [69]. Электропроводность для вырожденных релятивистских электронов была рассчитана численно в работах [70, 71]. Вязкости для нерелятивистского, релятивистского и ультрарелятивистского газов в модели твердых сфер были вычислены методом Чепмена–Энскога в [72, 73]. Кинетические коэффициенты электропроводности и теплопроводности в оболочках замагниченных нейтронных звёзд с учётом электрон-электронного рассеяния и рассеяния на дефектах кристаллической решетки и примесях рассчитаны в работе [74]. Проводимость электронов в нейтронных звёздах и белых карликах при наличии магнитного поля была исследована в [48, 49]. Отношение для теплопроводности (λ) и электропроводности (σ) вдоль и поперёк силовых линий магнитного поля, рассмотренные в [48], были взяты в виде:

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_{\parallel}} = \frac{1}{1 + \omega\tau}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} = \frac{1}{1 + \omega\tau}, \quad (5.2)$$

так же были использованы в [49]. Здесь ω - электронная циклотронная частота, τ - время между столкновениями. Отношения (5.1) и (5.2) были получены феноменологически, с использованием теории свободного пробега ([21]). Для моделирования распределения температуры по поверхности XDINS отношение (5.1) было использовано в работах [75, 76, 77], для моделирования магнитно-тепловой эволюции в коре нейтронной звезды в работе [78], для моделирования остывания нейтронной звезды с сильным тороидальным магнитным полем [79].

В этой главе кинетические коэффициенты будут найдены из решения уравнения Больцмана. Как было показано в Главе 4, точность приближения рядом ортогональных функций, уменьшается с увеличением степени вырождения, а учёт электрон-электронных столкновений дополнительно уменьшает кинетические коэффициенты. В таком случае уравнение Больцмана имеет смысл решать в приближении Лоренца. Интеграл столкновений, подобный J_{ee} из (1.2) для сильно вырожденных нейтронов в ядерной материи приведен в [24], см. также [25]. При наличии невырожденных тяжелых ядер и сильно вырожденных нейтронов вклад столкновений между ними в коэффициенты теплопередачи и диффузии пренебрежимо мал по сравнению с столкновениями нейтрон-ядро. Такая же ситуация имеет место для сильно вырожденных электронов. Поэтому для сильно вырожденных электронов приближение Лоренца с учетом столкновений между легкими и тяжелыми частицами асимптотически точно. Следовательно, для нашего рассмотрения мы можем пренебречь J_{ee} по сравнению с J_{eN} , и мы можем приравнять $J = J_{eN}$ в (1.2).

Проводя последовательно аналогичные Главе 1 рассуждения, получаем систему уравнений Больцмана без интеграла столкновений J_{ee} :

$$f_0(1 - f_0)\left(u^2 - \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}}\right)u_i = -iBf_0(1 - f_0)\frac{e\xi_A}{m_e c}u_i + I_{eN}(\xi_A u_{Ni}), \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{n_e} f_0(1 - f_0) u_i = -iB f_0(1 - f_0) \frac{e\xi_D}{m_e c} u_i + I_{eN}(\xi_D u_{Ni}), \quad (5.4)$$

где

$$I_{eN}(\xi u_{Ni}) = \int f_0 f_{N0}(1 - f'_0)(\xi_k u_i - \xi'_k u'_i) g_{eN} b d b d \varepsilon d c_{Ni}, \quad k = A, D. \quad (5.5)$$

5.2. Теплопроводность и термодиффузия вырожденных электронов в магнитном поле

Для нахождения коэффициентов тензоров λ_{ij} , μ_{ij} , η_{ij} , ν_{ij} необходимо записать уравнения (5.3)-(5.5) для функций ξ_A , ξ_D из (1.22), с использованием отношений $f'_0 = f_0$, $\xi' = \xi$, $u'_i = u_i \cos \theta$, и проинтегрировать по $d c_{Ni}$ с учётом (1.14). Тогда, деля на общее для всех членов выражение $f_0(1 - f_0)$, уравнение (5.3) можно записать в виде:

$$\left(u^2 - \frac{5G_{5/2}}{2G_{3/2}} \right) = -i \frac{eB}{m_e c} \xi_A + n_N \xi_A \int (1 - \cos \theta) g_{eN} b d b d \varepsilon. \quad (5.6)$$

Аналогично, для функции ξ_D из (1.22) уравнение (5.4) будет записано:

$$\frac{1}{n_e} = -i \frac{eB}{m_e c} \xi_D + n_N \xi_D \int (1 - \cos \theta) g_{eN} b d b d \varepsilon, \quad (5.7)$$

5.2.1. Теплопроводность сильно вырожденных электронов в магнитном поле: приближение Лоренца

Найдём решение уравнения (5.6). Функция ξ_A определяется выражением

$$\xi_A = \frac{u^2 - \frac{5}{2} G_{5/2} / G_{3/2}}{2\pi n_N \int_0^\infty (1 - \cos \theta) g b d b - i\omega}. \quad (5.8)$$

Пользуясь (2.14)-(2.18) с $g_{12} = v$, в приближении Лоренца получаем

$$\int_0^\infty (1 - \cos \theta) g b d b = 2 \frac{e^4 Z^2}{m_e^2 v^3} \Lambda, \quad (5.9)$$

$$\xi_A = \frac{u^2 - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}}{4\pi n_N \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2} \frac{e^4 Z^2}{m_e^2 u^3} \Lambda - i\omega}. \quad (5.10)$$

Соответственно, для $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$:

$$A^{(1)} = \frac{(u^2 - 5G_{5/2}/2G_{3/2})4\pi n_N \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2} \frac{e^4 Z^2}{m_e^2 u^3} \Lambda}{\left[4\pi n_N \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2} \frac{e^4 Z^2}{m_e^2 u^3} \Lambda\right]^2 + \omega^2}, \quad (5.11)$$

$$A^{(2)} = \frac{\omega}{B} \frac{u^2 - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}}{\left[4\pi n_N \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2} \frac{e^4 Z^2}{m_e^2 u^3} \Lambda\right]^2 + \omega^2}, \quad (5.12)$$

$$A^{(3)} = A^{(1)}(B = 0) - A^{(1)}. \quad (5.13)$$

Выражение для теплового потока, которое следует из (1.10), (1.17), (1.19), (1.22), (5.10)–(5.13), записывается как:

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e}\right)^{7/2} \left[\delta_{ij} \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(1)} y^{5/2} dy \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{ijk} B_k \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(2)} y^{5/2} dy + B_i B_j \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(3)} y^{5/2} dy \right] \frac{\partial T}{\partial x_j} \\ &= q_i^{(1)} + q_i^{(2)} + q_i^{(3)}, \quad y = u^2, \\ q_i^{(1)} &= -\frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e}\right)^{7/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(1)} y^{5/2} dy \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\lambda_{sd}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \\ q_i^{(2)} &= \varepsilon_{ijk} B_k \frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e}\right)^{7/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(2)} y^{5/2} dy \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} B_k \lambda_{sd}^{(2)} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \\ q_i^{(3)} &= -B_i B_j \frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e}\right)^{7/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(3)} y^{5/2} dy \frac{\partial T}{\partial x_j} = -B_i B_j \lambda_{sd}^{(3)} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Для сильно вырожденных электронов при $x_0 \gg 1$ интегралы в (5.14) с $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ из (5.11)–(5.13) выражаются аналитически с использованием формулы разложения [53]

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)dx}{e^{x-x_0} + 1} = \int_0^{x_0} f(x)dx + \frac{\pi^2}{6} f'(x_0) + \dots \quad (5.20)$$

После интегрирования по частям мы получаем выражения для интегрирования по формуле (5.20):

$$\lambda^{(1)} = \frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \int_0^{\infty} f_0 \frac{d(A^{(1)}y^{5/2})}{dy} dy, \quad (5.21)$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \int_0^{\infty} f_0 \frac{d(A^{(2)}y^{5/2})}{dy} dy, \quad (5.22)$$

$$B^2 \lambda^{(3)} = \lambda^{(1)}(B=0) - \lambda^{(1)}. \quad (5.23)$$

Применяя (5.20) к интегралам (5.21), (5.22), получаем:

$$\lambda^{(1)} = \frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \left[A^{(1)}(x_0)x_0^{5/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2(A^{(1)}y^{5/2})}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right], \quad (5.24)$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{2\pi}{3} \frac{m_e^4}{h^3 T} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \left[A^{(2)}(x_0)x_0^{5/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2(A^{(2)}y^{5/2})}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right]. \quad (5.25)$$

Среднее время между электрон-ионными столкновениями τ_{ei} есть обратное значение частоты электрон-ионных столкновений, ν_{ei} , см. (2.22), (2.23).

Пользуясь (5.11), (5.12) и записывая формулы с τ_d как обратной величиной ν_{ei} из (2.23), записываем коэффициенты теплопроводности в виде:

$$\lambda^{(1)} = \frac{5\pi^2 k^2 T n_e}{6 m_e} \tau_d \left\{ \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} - \frac{6}{5} \frac{\omega^2 \tau_d^2}{(1 + \omega^2 \tau_d^2)^2} - \frac{\pi^2}{10} \left[\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 \left(\frac{y^3}{x_0^3} \right)} \right]'' \Big|_{y=x_0} \right\}, \quad (5.26)$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{4\pi^2 k^2 T n_e \tau_d^2 \omega}{3 m_e B} \left\{ \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} - \frac{3}{4} \frac{\omega^2 \tau_d^2}{(1 + \omega^2 \tau_d^2)^2} - \frac{\pi^2}{16} \left[\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 \left(\frac{y^3}{x_0^3} \right)} \right]'' \Big|_{y=x_0} \right\}. \quad (5.27)$$

В случае сильно вырожденных электронов уравнения (5.11)–(5.14), (5.26), (5.27)

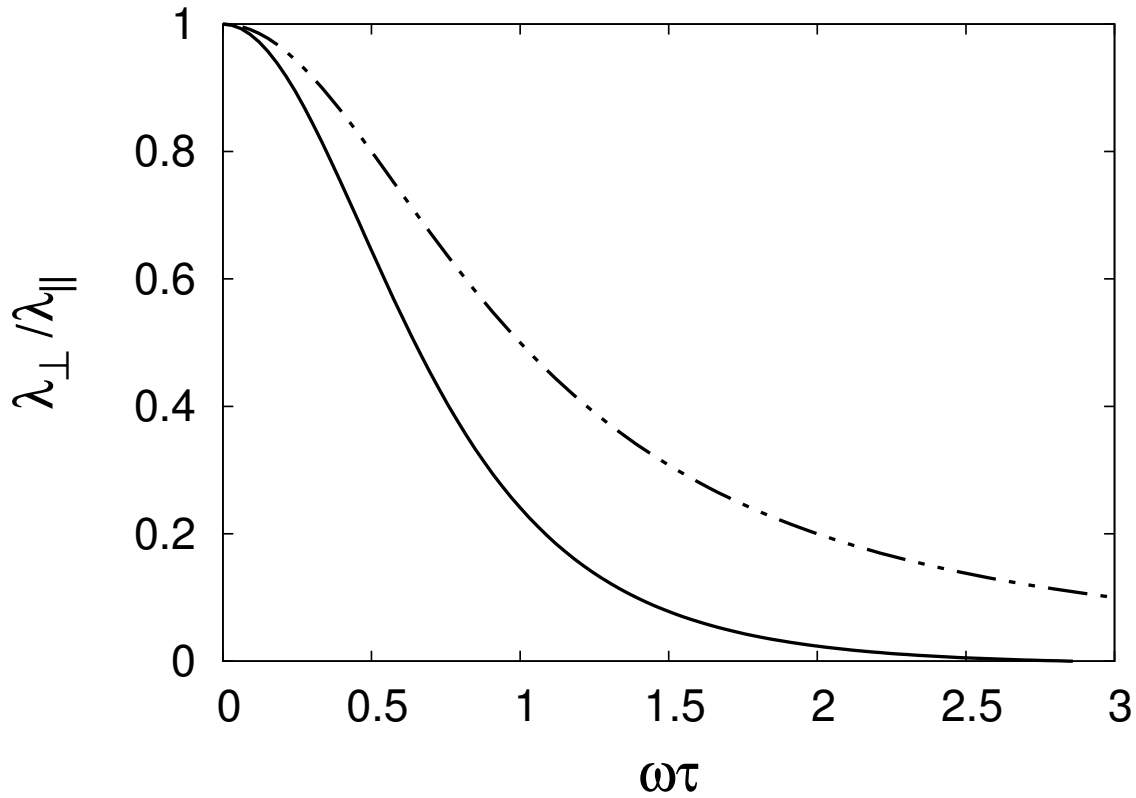


Рис. 5.1. Графики отношения $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel}$ как функции $\omega\tau$ представлены для теплопроводности, полученной феноменологически (штрихпунктирная линия), для сравнения с теплопроводностью, полученной как решение уравнения Больцмана в приближении Лоренца (сплошная кривая) с $kT = 0.09E_f$.

дают асимптотически точное решение для коэффициентов теплопроводности,

поскольку в этом случае столкновениями между электронами можно пренебречь. Различие между точным $[\lambda^{(1)}]/[\lambda^{(1)}(B=0)]$ из (5.26) и феноменологическим (5.1) с учетом влияния магнитного поля на коэффициенты теплопроводности представлено на рисунке 5.1. Здесь отношение значений, перпендикулярных и параллельных направлению магнитного поля, построены для $kT = 0.09E_f$. При $\omega\tau = 1.5$ точное значение этого отношения в 4 раза меньше, чем феноменологическое.

5.2.2. Термодиффузия сильно вырожденных электронов в магнитном поле: приближение Лоренца

Выражение для средней скорости, связанной с термодиффузией, следующее из (1.8), (1.19), (1.22), (3.2), (5.10)-(5.13), имеет вид:

$$\langle v_i^{(A)} \rangle = - \left(\mu^{(1)} \delta_{ij} + \mu^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \mu^{(3)} B_i B_j \right) \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (5.28)$$

где

$$\mu^{(1)} = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 T n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(1)} y^{3/2} dy, \quad (5.29)$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 T n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(2)} y^{3/2} dy, \quad (5.30)$$

$$\mu^{(3)} = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 T n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) A^{(3)} y^{3/2} dy, \quad y = u^2. \quad (5.31)$$

Аналогично предыдущему параграфу при $x_0 \gg 1$, интегралы в (5.29)-(5.31), с $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ из (5.11)-(5.13), выражены аналитически с использованием разложения [53].

После интегрирования по частям мы получаем выражение, которое подходит для интегрирования по формуле (5.20):

$$\mu^{(1)} = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 T n_e} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0 \frac{d(A^{(1)} y^{3/2})}{dy} dy, \quad (5.32)$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 T n_e} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0 \frac{d(A^{(2)} y^{3/2})}{dy} dy, \quad (5.33)$$

$$B^2 A^{(3)} = A^{(1)}(B=0) - A^{(1)}. \quad (5.34)$$

Применяя (5.20) к интегралам (5.32), (5.33) мы получим:

$$\mu^{(1)} = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 T n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \left[A^{(1)}(x_0) x_0^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2(A^{(1)} y^{3/2})}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right], \quad (5.35)$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 T n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \left[A^{(2)}(x_0) x_0^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2(A^{(2)} y^{3/2})}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right], \quad (5.36)$$

$$B^2 \mu^{(3)} = \mu^{(1)}(B=0) - \mu^{(1)}. \quad (5.37)$$

Используя (5.11), (5.12) мы выпишем функции $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, и коэффициенты термодиффузии в виде:

$$A^{(1)} = \tau_d \frac{y^{3/2}}{x_0^{3/2}} \frac{y - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)}, \quad A^{(2)} = \frac{\omega \tau_d^2 y^3}{B x_0^3} \frac{y - \frac{5}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}}}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)}, \quad (5.38)$$

$$\mu^{(1)} = \frac{4\pi^3}{3} \frac{k^2 T}{n_e h^2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{1/3} \tau_d \left[\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} - 2 \frac{\omega^2 \tau_d^2}{(1 + \omega^2 \tau_d^2)^2} - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right)'' \Big|_{y=x_0} \right], \quad (5.39)$$

$$\mu^{(2)} = -\frac{4\pi^3}{3} \frac{k^2 T}{n_e h^2} \left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{1/3} \frac{\omega \tau_d^2}{B} \left[\frac{2}{1 + \omega^2 \tau_d^2} - 2 \frac{\omega^2 \tau_d^2}{(1 + \omega^2 \tau_d^2)^2} - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right)'' \Big|_{y=x_0} \right], \quad (5.40)$$

$$B^2 \mu^{(3)} = \mu^{(1)}(B=0) - \mu^{(1)}. \quad (5.41)$$

В формулах (5.39) и (5.40) последние члены, после взятия производных, оказываются более высокого порядка малости, поэтому при построении графика на рисунке 5.2 их вкладом пренебрегается. Как видно из дальнейшего, учет малых членов $\sim (1/x_0^2)$ увеличивает отличие точных формул от приближения (5.2).

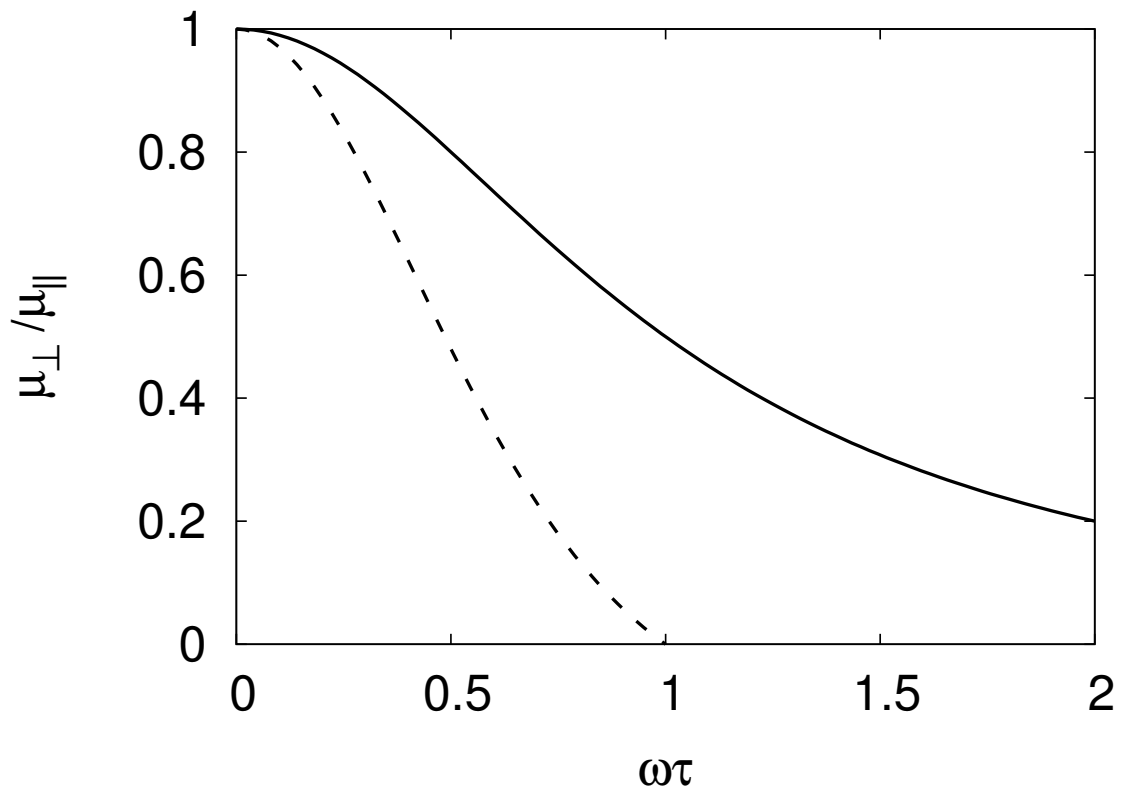


Рис. 5.2. График отношения $\mu_{\perp}/\mu_{\parallel}$ как функции $\omega\tau$. Представлены для сравнения термодиффузии, полученной феноменологическим способом (сплошная кривая), с термодиффузией, полученной из асимптотического решения уравнения Больцмана (штриховая кривая).

5.3. Диффузия и диффузионный термоэффект

вырожденных электронов в магнитном поле

5.3.1. Диффузия сильно вырожденных электронов в магнитном поле: приближение Лоренца

Для расчёта коэффициентов тензоров диффузии и диффузионного термоэффекта из уравнения (5.4) выпишем ξ_D :

$$\xi_D = \frac{1}{n_e} \frac{1}{2\pi n_N \int (1 - \cos \theta) g b d b - i\omega} \quad (5.42)$$

После интегрирования с учётом (5.9) и (2.23), получаем для функций ξ_D , $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ из (1.22) следующие выражения:

$$\xi_D = \frac{1}{n_e} \frac{1}{4\pi n_N \frac{e^4 Z^2}{m^2 u^3} \Lambda \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2} - i\omega}. \quad (5.43)$$

$$D^{(1)} = \frac{1}{n_e} \frac{4\pi n_N \frac{e^4 Z^2}{m^2 u^3} \Lambda \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2}}{\left(4\pi n_N \frac{e^4 Z^2}{m^2 u^3} \Lambda \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2}\right)^2 + \omega^2} = \frac{\tau_d y^{3/2}}{n_e x_0^{3/2}} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)}, \quad (5.44)$$

$$D^{(2)} = \frac{1}{n_e} \frac{\omega}{B} \frac{1}{\left(4\pi n_N \frac{e^4 Z^2}{m^2 u^3} \Lambda \left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2}\right)^2 + \omega^2} = \frac{\omega \tau_d^2 y^3}{n_e B x_0^3} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)}, \quad (5.45)$$

$$B^2 D^{(3)} = D^{(1)}|_{B=0} - D^{(1)}. \quad (5.46)$$

Средняя величина скорости электронов $\langle v_{iD} \rangle$, связанная с диффузией, определяется тензором η_{ij} в виде

$$\langle v_i^{(D)} \rangle = -n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left(\eta^{(1)} \delta_{ij} + \eta^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \eta^{(3)} B_i B_j \right) d_j, \quad (5.47)$$

где

$$\eta^{(1)} = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) D^{(1)} y^{3/2} dy, \quad (5.48)$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) D^{(2)} y^{3/2} dy, \quad (5.49)$$

$$\eta^{(3)} = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) D^{(3)} y^{3/2} dy. \quad (5.50)$$

Используя формулу (5.20), коэффициенты диффузии можно записать в следующем виде:

$$\eta^{(1)} = \frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \left(D^{(1)}(x_0) x_0^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2 D^{(1)}(y) y^{3/2}}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right), \quad (5.51)$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{4\pi}{3} \frac{m_e^3}{h^3 n_e} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{5/2} \left(D^{(2)}(x_0) x_0^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2 D^{(2)}(y) y^{3/2}}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right), \quad (5.52)$$

$$B^2 \eta^{(3)} = \eta^{(1)}|_{B=0} - \eta^{(1)}. \quad (5.53)$$

Тогда, с учетом выражения для τ_d из (2.23), и формул (5.44), (5.45), можно выписать выражения для тензора диффузии в виде:

$$\eta^{(1)} = \frac{kT}{n_e m_e} \tau_d \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{x=x_0} \right), \quad (5.54)$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{kT}{n_e m_e} \frac{\omega \tau_d^2}{B} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{x=x_0} \right), \quad (5.55)$$

$$B^2 \eta^{(3)} = \eta^{(1)}(B=0) - \eta^{(1)}. \quad (5.56)$$

В формулах (5.54) и (5.55) последние члены, после взятия производных, оказываются более высокого порядка малости, поэтому при построении графика

на рисунке 5.3 их вкладом пренебрегается. При этом точное асимптотическое решение совпадает с приближенным (5.2). Учет малых членов $\sim (1/x_0^2)$ на рисунке 5.3 приводит к отличию кинетического решения от приближения (5.2).

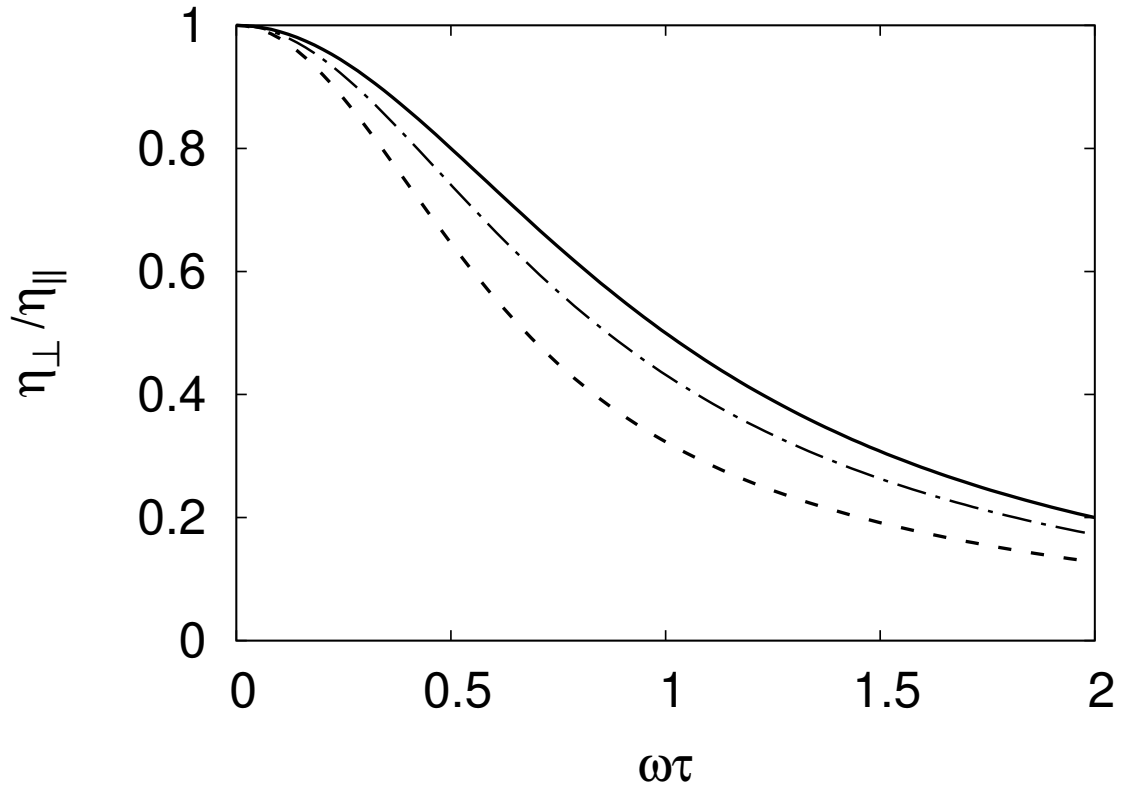


Рис. 5.3. Графики отношения $\eta_{\perp}/\eta_{\parallel}$ в зависимости от $\omega\tau$. Для диффузии кривые, полученные феноменологическим способом и из решения уравнения Больцмана, совпадают при сильном вырождении. Если в точном решении учесть члены порядка $1/x_0^2$ малости, то решение, полученное из уравнения Больцмана, будет отличаться от феноменологического (5.2). Сплошная кривая соответствует феноменологическому решению и асимптотическому решению, полученному из уравнения Больцмана, штрих-пунктирная кривая соответствует решению с учетом малых членов при $kT = 0.11E_f$ ($x_0 = 9$), штриховая кривая — при $kT = 0.2E_f$ ($x_0 = 5$).

5.3.2. Диффузионный термоэффект сильно вырожденных электронов в магнитном поле: приближение Лоренца

Аналогично расчётам коэффициентов тензора диффузии, для расчёта коэффициентов тензора диффузионного термоэффекта нужно использовать соотношения (5.44), (5.45). Поток тепла $q_i^{(D)}$, вызванный диффузионным термоэффектом, записывается в виде:

$$q_i^{(D)} = -n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left(\nu^{(1)} \delta_{ij} + \nu^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \nu^{(3)} B_i B_j \right) d_j, \quad (5.57)$$

где

$$\nu^{(1)} = \frac{2\pi m_e^4}{3 h^3} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) D^{(1)} y^{5/2} dy, \quad (5.58)$$

$$\nu^{(2)} = -\frac{2\pi m_e^4}{3 h^3} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) D^{(2)} y^{5/2} dy, \quad (5.59)$$

$$\nu^{(3)} = \frac{2\pi m_e^4}{3 h^3} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \int_0^\infty f_0(1-f_0) D^{(3)} y^{5/2} dy. \quad (5.60)$$

Используя формулу (5.20), коэффициенты диффузионного термоэффекта можно записать в виде:

$$\nu^{(1)} = \frac{2\pi m_e^4}{3 h^3} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \left(D^{(1)}(x_0) x_0^{5/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2 D^{(1)}(y) y^{5/2}}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right), \quad (5.61)$$

$$\nu^{(2)} = -\frac{2\pi m_e^4}{3 h^3} \left(\frac{2kT}{m_e} \right)^{7/2} \left(D^{(2)}(x_0) x_0^{5/2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{d^2 D^{(2)}(y) y^{5/2}}{dy^2} \Big|_{y=x_0} \right), \quad (5.62)$$

$$B^2 \nu^{(3)} = \nu^{(1)}(B=0) - \nu^{(1)}. \quad (5.63)$$

После интегрирования получаем выражения для коэффициентов диффузионного термоэффекта в виде:

$$\nu^{(1)} = \frac{kTh^2}{8m_e^2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{2/3} \tau_d \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{y=x_0} \right), \quad (5.64)$$

$$\nu^{(2)} = -\frac{kTh^2}{8m_e^2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\omega \tau_d^2}{B} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{y=x_0} \right) \quad (5.65)$$

$$B^2 \nu^{(3)} = \nu^{(1)}(B=0) - \nu^{(1)}. \quad (5.66)$$

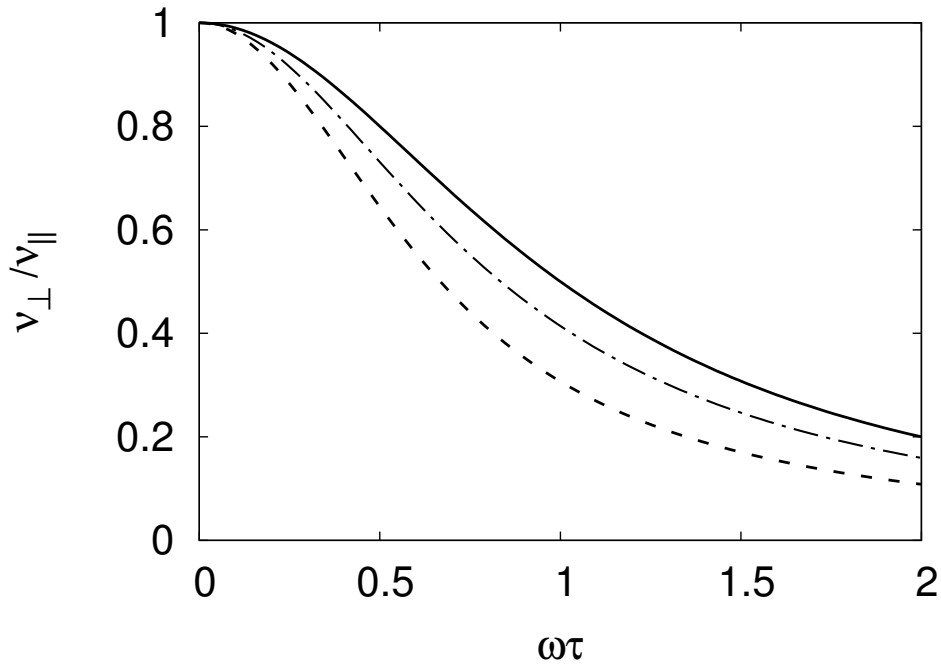


Рис. 5.4. Графики отношений $\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}$ в зависимости от $\omega\tau$. Аналогично диффузии, для диффузионного термоэффекта график асимптотического решения совпадает с феноменологическим (сплошная кривая). Если в решении, полученном из уравнения Больцмана, учесть члены $1/x_0^2$, то график отношения $\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}$ будет отличаться от феноменологического. Штрихпунктирная кривая соответствует решению при $kT = 0.11E_f$ ($x_0 = 9$), штриховая кривая — при $kT = 0.2E_f$ ($x_0 = 5$).

В формулах (5.64) и (5.65) последние члены, после взятия производных, оказываются более высокого порядка малости, поэтому при построении графика на рисунке 5.4 их вкладом пренебрегается. При этом точное асимптотическое решение совпадает с приближенным (5.2). Учет малых членов $\sim (1/x_0^2)$ на рисунке 5.4 приводит к отличию кинетического решения от приближения (5.2).

После вычисления всех четырёх коэффициентов переноса, потоки тепла и диффузии электронов, с учётом (3.1), (3.2), (5.28), (5.47), (5.57), а также тензора теплопроводности из [80], записываются в виде:

$$q_i = q_i^{(A)} + q_i^{(D)} = - \left(\lambda^{(1)} \delta_{ij} + \lambda^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \lambda^{(3)} B_i B_j \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} - n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left(\nu^{(1)} \delta_{ij} + \nu^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \nu^{(3)} B_i B_j \right) d_j, \quad (5.67)$$

$$\langle v_i \rangle = \langle v_i^{(A)} \rangle + \langle v_i^{(D)} \rangle = -n_e \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \left(\eta^{(1)} \delta_{ij} + \eta^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \eta^{(3)} B_i B_j \right) d_j - \left(\mu^{(1)} \delta_{ij} + \mu^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \mu^{(3)} B_i B_j \right) \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (5.68)$$

При численных расчётах требуется уравнения, записанные в координатном виде. Выпишем для примера компоненты вектора потока тепла $q_i^{(A)}$ в декартовой системе $x y z$:

$$q_x^{(A)} = - \left[\lambda^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda^{(3)} B_x \left(B_x \frac{\partial T}{\partial x} + B_y \frac{\partial T}{\partial y} + B_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda^{(2)} \left(B_z \frac{\partial T}{\partial y} - B_y \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right], \quad (5.69)$$

$$q_y^{(A)} = - \left[\lambda^{(1)} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda^{(3)} B_y \left(B_x \frac{\partial T}{\partial x} + B_y \frac{\partial T}{\partial y} + B_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda^{(2)} \left(B_x \frac{\partial T}{\partial z} - B_z \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right], \quad (5.70)$$

$$q_z^{(A)} = - \left[\lambda^{(1)} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda^{(3)} B_z \left(B_x \frac{\partial T}{\partial x} + B_y \frac{\partial T}{\partial y} + B_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \lambda^{(2)} \left(B_y \frac{\partial T}{\partial x} - B_x \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]. \quad (5.71)$$

Тензорная структура выражений в скобках в формулах (5.67)-(5.68) одинакова, поэтому компоненты остальных кинетических коэффициентов $\nu^{(\alpha)}$, $\eta^{(\alpha)}$, $\mu^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$ записываются в том же виде.

Для вектора \mathbf{j} имеем выражение, следующее из (1.9),(3.2),(5.68) в виде:

$$j_i = -en_e \langle v_i \rangle = \frac{2}{5} en_e^2 x_0 \left(\eta^{(1)} \delta_{ij} + \eta^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \eta^{(3)} B_i B_j \right) d_j + en_e \left(\mu^{(1)} \delta_{ij} + \mu^{(2)} \varepsilon_{ijk} B_k + \mu^{(3)} B_i B_j \right) \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (5.72)$$

Коэффициенты $\eta^{(k)}$ даны в (5.54)-(3.133), а $\mu^{(k)}$ даны в (5.39)-(5.41). Здесь учтено, что при сильном вырождении имеет место $\frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} \approx \frac{2}{5} x_0$.

В приложениях часто используются кинетические коэффициенты в магнитном поле, определяющие локальные потоки тепла и диффузии вдоль магнитного поля q_{\parallel} , j_{\parallel} , в направлении перпендикуляром магнитному полю q_{\perp} , j_{\perp} , а также потоки, перпендикулярные плоскости, в которой располагаются вектор магнитного поля B_i , и какой нибудь из векторов $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ либо d_i . Эти потоки носят название Холловских q_{hall} , j_{hall} . Для получения выражений для локальных потоков рассмотрим магнитное поле вдоль оси x , и градиент температуры,

расположенный в плоскости (x, y) , так что:

$$B_i = (B_x, 0, 0), \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, 0 \right). \quad (5.73)$$

Тогда из уравнения (5.67) для теплового потока имеем:

$$q_{\parallel} = q_x = -(\lambda^{(1)} + B^2\lambda^{(3)})\frac{\partial T}{\partial x} - (\nu^{(1)} + B^2\nu^{(3)})d_x, \\ \lambda_{\parallel} = \lambda^{(1)} + B^2\lambda^{(3)}, \quad \nu_{\parallel} = \nu^{(1)} + B^2\nu^{(3)}, \quad (5.74)$$

$$q_{\perp} = q_y = -\lambda^{(1)}\frac{\partial T}{\partial y} - \nu^{(1)}d_y, \quad \lambda_{\perp} = \lambda^{(1)}, \quad \nu_{\perp} = \nu^{(1)}, \quad (5.75)$$

$$q_{hall} = q_z = \lambda^{(2)}B_x\frac{\partial T}{\partial y} + \nu^{(2)}B_xd_y, \quad \lambda_{hall} = \lambda^{(2)}, \quad \nu_{hall} = \nu^{(2)}. \quad (5.76)$$

Из уравнения (5.68) для средней скорости электронов имеем

$$\langle v_{\parallel} \rangle = \langle v_x \rangle = -(\eta^{(1)} + B^2\eta^{(3)})d_x - (\mu^{(1)} + B^2\mu^{(3)})\frac{\partial T}{\partial x}, \\ \eta_{\parallel} = \eta^{(1)} + B^2\eta^{(3)}, \quad \mu_{\parallel} = \mu^{(1)} + B^2\mu^{(3)}, \quad (5.77)$$

$$\langle v_{\perp} \rangle = \langle v_y \rangle = -\eta^{(1)}d_y - \mu^{(1)}\frac{\partial T}{\partial y}, \quad \eta_{\perp} = \eta^{(1)}, \quad \mu_{\perp} = \mu^{(1)}, \quad (5.78)$$

$$\langle v_{hall} \rangle = \langle v_z \rangle = \eta^{(2)}B_xd_y + \mu^{(2)}B_x\frac{\partial T}{\partial y}. \quad \eta_{hall} = \eta^{(2)}, \quad \mu_{hall} = \mu^{(2)}. \quad (5.79)$$

Учитывая, что $j_i = -n_e e \langle v_i \rangle$, электрический ток электронов в плазме записывается в виде:

$$j_{\parallel} = en_e \left(\eta_{\parallel}d_x + \mu_{\parallel}\frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad j_{\perp} = en_e \left(\eta_{\perp}d_y + \mu_{\perp}\frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ j_{hall} = -en_e \left(\eta_{hall}B_xd_y + \mu_{hall}B_x\frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (5.80)$$

Величина $[\nu^{(1)}]/[\nu^{(1)}(B=0)]$, как оценка влияния магнитного поля на диффузионный термоэффект представлена на рисунке 5.4. При учёте членов $\sim 1/x_0^2$ порядка малости формулы (5.54), (5.55) для диффузии могут быть выписаны

в более подробном виде:

$$\eta^{(1)} = \frac{kT}{n_e m_e} \tau_d \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{1}{x_0^2} \frac{\pi^2}{1 + \omega^2 \tau_d^2} - \frac{1}{x_0^2} \frac{3\pi^2 \omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau_d^2)^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{y=x_0} \right) \quad (5.81)$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{kT}{n_e m_e} \frac{\omega \tau_d^2}{B} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{21\pi^2}{8x_0^2} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} - \frac{9\pi^2}{2x_0^2} \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{y=x_0} \right), \quad (5.82)$$

и формулы (5.64), (5.65) соответственно для диффузионного термоэффекта:

$$\nu^{(1)} = \frac{kT h^2}{8m_e^2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{2/3} \tau_d \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{1}{x_0^2} \frac{2\pi^2}{1 + \omega^2 \tau_d^2} - \frac{1}{x_0^2} \frac{4\pi^2 \omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau_d^2)^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{y=x_0} \right) \quad (5.83)$$

$$\nu^{(2)} = -\frac{kT h^2}{8m_e^2} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\omega \tau_d^2}{B} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2} + \frac{33\pi^2}{8x_0^2} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} - \frac{11\pi^2}{2x_0^2} \frac{\omega^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_d^2 (y^3/x_0^3)} \right) \Big|_{y=x_0} \right) \quad (5.84)$$

На рисунках 5.3 и 5.4 отношения между величинами, которые перпендикулярны и параллельны к магнитному полю, рассчитаны для $kT = 0.11E_f$, $kT = 0.2E_f$, а также дана кривая, соответствующая феноменологическому соотношению (5.2), которое при сильном вырождении совпадает с точным решением.

Выводы к пятой главе

В данной главе найдены коэффициенты теплопроводности, диффузии, диффузионного термоэффекта и термодиффузии для сильно вырожденных электронов в магнитном поле. Коэффициенты получены асимптотически точно в

приближении Лоренца, когда электрон-электронными столкновениями можно пренебречь по сравнению с электрон-ядерными столкновениями при невырожденных ядрах. Тензоры получены для произвольного направления магнитного поля и градиента температуры в декартовой системе координат, согласно [62]. В большинстве работ, рассматривающих теплопроводность и электропроводность в астрофизических объектах, в частности, в нейтронных звездах, следуя Флоуерсу и Ито [48], влияние магнитного поля на проводимость учитывается феноменологически с коэффициентом $1/(1 + \omega^2\tau^2)$, который уменьшает проводимость в направлении, перпендикулярном направлению магнитного поля. Представленные в этой главе результаты, полученные путем решения уравнения Больцмана, показывают, что влияние магнитного поля на кинетические коэффициенты оказывается более сильным и имеет более сложный характер см. рисунки 5.1, 5.2, 5.3, 5.4.

Для всех коэффициентов теплопроводности $\lambda_i(x_0)$ в присутствии магнитного поля можно предложить простую линейную интерполяцию между «точными» результатами для невырожденных и сильно вырожденных электронов

$$\lambda_i(x_0) = \lambda_i^{(nd)} \frac{1 - x_0}{2 - x_0} + \lambda_i^{(sd)} \frac{1}{2 - x_0}, \quad \text{при } x_0 \leq 0, \quad (5.85)$$

$$\lambda_i(x_0) = \lambda_i^{(nd)} \frac{1}{2 + x_0} + \lambda_i^{(sd)} \frac{1 + x_0}{2 + x_0}, \quad \text{при } x_0 \geq 0. \quad (5.86)$$

Здесь индексы (nd), (sd) относятся к невырожденным и сильно вырожденным значениям соответственно.

Данные вычисления были сделаны для нерелятивистских электронов, в то время как в глубоких слоях нейтронной звезды становятся существенными релятивистские эффекты. Главный релятивистский эффект — увеличение эффективной электронной массы — приближенно можно учесть, согласно [49], вводя во всех выражениях релятивистскую электронную массу $m_{e*} = (m_e^2 + p_{Fe}^2/c^2)^{1/2}$

ВМЕСТО МАССЫ ПОКОЯ m_e .

По результатам пятой главы были опубликованы следующие статьи:

1. *Бисноватый-Коган Г. С., Глушихина М. В.*, Вычисление коэффициентов теплопроводности в замагниченном плотном веществе // Физика Плазмы, т. 44, с. 355-374, 2018
2. *Бисноватый-Коган Г. С., Глушихина М. В.*, Четыре тензора, определяющие тепло- и электропроводность вырожденных электронов в замагниченной плазме // Физика Плазмы, т. 44, с. 971-982, 2018
3. *Glushikhina M. V., Bisnovatygi-Kogan G. S.*, Kinetic coefficients of degenerate electrons in magnetized neutron star crust // The Fourteenth Marcel Grossmann Meeting On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories, held 12-18 July 2015 in Rome, Italy., 2015, pp. 1102-1107, Edited by Massimo Bianchi, Robert T. Jansen and Remo Ruffini.
4. *Glushikhina M. V., Bisnovatygi-Kogan G. S.*, Calculation of thermal conductivity coefficients of electrons in magnetized dense matter // INTERNATIONAL JOURNAL OF MODERN PHYSICS D, 2017, v. 27, article id.1844008-1-8.
5. *Glushikhina M. V., Bisnovatygi-Kogan G.S.* Four Tensors Determining the Heat and Electro-Conductivities of Degenerate Electrons in the Dense Magnetized Matter // High Energy Phenomena in Relativistic Outflows VII. 9-12 July 2019. Facultat de Fisica, Universitat de Barcelona, Spain, 2019, id.79

Заключение

В диссертационной работе найдены кинетические коэффициенты теплопроводности, термодиффузии, диффузии и диффузионного термоэффекта для произвольно вырожденных нерелятивистских электронов в неквантующем магнитном поле.

В Главе 1 описан метод Чепмена-Энскога для решения уравнения Больцмана для произвольно вырожденных электронов в магнитном поле. Получены уравнения переноса, записаны выражения для интегралов столкновений. Выписаны полиномы обобщающие полиномы Сонина вплоть до третьего члена. Получены системы уравнений для нахождения кинетических коэффициентов.

В Главе 2 рассчитаны матричные элементы связанные с электрон-электронными и электрон-ядерными столкновениями. Для интеграла столкновений электрон-ядро получены выражения для произвольно вырожденных электронов с учётом разложения по первым трём полиномам, обобщающим полиномы Сонина. Рассчитаны точные значения матричных элементов для случаев невырожденных электронов, частично вырожденных при $\epsilon_{Fe}/kT = 1.011$ и сильно вырожденных электронов. Для матричных элементов интеграла столкновений электрон-электрон получены выражения в явном виде в случае невырожденных электронов, для случая сильного вырождения получены оценки.

В Главе 3 в приближении невырожденных электронов четыре тензора кинетических коэффициентов записаны в явном виде с использованием разложения на полиномы Сонина и учетом двух и трех членов в разложении. Учитываются электрон-ядерные и электрон-электронные столкновения. Полученные результаты для невырожденных электронов в 2-полиномиальном случае точно согласуются с результатами предыдущих работ [31, 32, 81] по данной тематике. Аналитическое решение в 3-полиномиальном приближении прежде не было получено. Значение коэффициента теплопроводности, полученное в известной

работе Брагинского [41, 81] в 2-полиномиальном приближении, в два раза меньше, чем наше соответствующее значение. Это связано с тем, что в работе [41], считалось, что половина теплового потока скрыта в так называемой "тепловой силе" таким образом, что результирующий тепловой поток в сопутствующей системе отсчета одинаков в рассмотренных и [41, 81] и [21].

В Главе 4 рассчитаны кинетические коэффициенты в случае частичного вырождения $\epsilon_{Fe}/kT = 1.011$ без учёта магнитного поля. На примере приближения Лоренца было показано, что точность приближения рядом ортогональных функций, аналогичных полиномам Сонина, уменьшается с увеличением степени вырождения.

В Главе 5 кинетические коэффициенты для сильно вырожденных электронов в магнитном поле получены асимптотически точно в приближении Лоренца, когда электрон-электронными столкновениями можно пренебречь по сравнению с электрон-ядерными столкновениями при невырожденных ядрах.

В большинстве работ, рассматривающих проводимость в астрофизических объектах, в частности, в нейтронных звездах, следуя Флоуерсу и Ито [48], влияние магнитного поля на потоки тепла и заряда учитывается феноменологически с коэффициентом $1/(1 + \omega^2\tau^2)$, который уменьшает потоки в направлении, перпендикулярном направлению магнитного поля. Результаты, представленные в этой работе, показывают, что влияние магнитного поля на кинетические коэффициенты оказывается более сильным и имеет более сложный характер, рис. 5.1, 5.3, 5.2, 5.4.

Метод Чепмена-Энскога можно использовать для достаточно плотного газа (плазмы), где время между столкновениями частиц есть наименьшая величина среди других характерных времен. В присутствии магнитного поля в дополнение ко времени жизни системы и характерному времени изменений параметров в плазме добавляется время вращения по ларморовскому кругу $\tau_L = 2\pi/\omega$. Это время должно быть намного меньше, чем τ , порядка τ_{nd} или τ_d , что приво-

дит к условию, при котором можно пользоваться методом Чепмена–Энскога, в виде

$$\omega\tau \ll 2\pi. \quad (5.87)$$

Поэтому результаты данной работы можно успешно применять при $\omega\tau \lesssim 1$, а для больших $\omega\tau$ могут быть получены только качественные оценки.

Коэффициенты переноса, рассчитанные здесь, определяют тепловой поток, который создают электроны в случае нулевого вектора диффузии d_i . В общем случае ненулевого вектора диффузии d_i и градиента температуры $\partial T/\partial x_i$, тепловой и диффузионный (электрический ток) потоки связаны друг с другом и определены четырьмя кинетическими коэффициентами [21], имея структуру тензора в присутствии магнитного поля.

Новые коэффициенты могут использоваться для вычисления потоков тепла и заряда в белых карликах, на поверхности и в коре замагниченной нейтронной звезды [52], а также для замагниченной материи в аккреционной области вблизи замагниченной нейтронной звезды.

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю Г. С. Бисноватому-Когану за терпение и большую помощь.

Цитируемая литература

1. *Бисноватый-Коган Г. С., Моисеенко С. Г.* Гравитационные волны и сверхновые с коллапсирующим ядром // *Успехи физических наук*. 2017. Т. 187. С. 906–914.
2. *Арделян Н. В., Бисноватый-Коган Г. С., Космачевский К. В., Моисеенко С. Г.* Двумерный расчёт динамики коллапса вращающегося ядра с образованием нейтронной звезды на адаптивной треугольной сетке в лагранжевых переменных // *Астрофизика*. 2004. Т. 47. С. 47–64.
3. *Moiseenko S. G., Bisnovatyj-Kogan G. S., Ardeljan N. V.* A magnetorotational core-collapse model with jets // *MNRAS*. 2006. Vol. 370. P. 501–512.
4. *Шкловский И. С.* Звёзды: их рождение, жизнь и смерть. Москва: Наука, 1975.
5. *Засов А., Постнов К.* Общая астрофизика. Фрязино: Век, 2006.
6. *Treves A., Popov S. B., Colpi M. et al.* The Magnificent Seven: Close-by Cooling Neutron Stars? // *X-ray Astronomy 2000, ASP Conference Proceeding Vol. 234. Edited by Riccardo Giacconi, Salvatore Serio, and Luigi Stella. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific*. 2001. Vol. 1. P. 225–231.
7. *Popov S.* The Zoo of Neutron Stars // *Physics of Particle and Nuclei*. 2008. Vol. 39. P. 1136–1142.
8. *Popov S. B.* Evolution of Isolated Neutron Stars // *Astrophysical sources of high energy particles and radiation, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute and 12th Course of the International School of Cosmic Ray Astrophysics, held in Erice, Italy, 10-21 November 2000 Dordrecht: Kluwer Academic Publishers*. 2001. Vol. 44. P. 101–111.
9. *Popov S. B., Turolla R., Possenti A.* A tale of two populations: Rotating Radio Transients and X-ray Dim Isolated Neutron Stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2006. Vol. 369. P. 23–26.

10. *Walter F., Wolk S. J., Neuhauser R.* Discovery of a nearby isolated neutron star // *Letters to Nature*. 1996. Vol. 379. P. 233–235.
11. *Haberl F.* The Magnificent Seven: Magnetic fields and surface temperature distributions // *Astrophysics and Space Science*. 2006. Vol. 777. P. 497.
12. *Turolla R.* Neutron Stars and Pulsars. Berlin: Springer, 2009.
13. *Popov S. B., Colpi M., Treves A. et al.* Neutron Star Census // *Astrophysical Journal*. 2000. Vol. 530. P. 896–903.
14. *Rigoselli M., Mereghetti S., Suleimanov V. et al.* XMM-Newton observations of PRS J0726-2612, a radio-loud XDINS // *Astron. and Astrophys.* 2019. Vol. 379. P. 233–235.
15. *Pons J., Walter F., Lattimer J. et al.* Towards a mass and radius determination of the nearby isolated neutron star RX J185635-3754 // *Astrophysical Journal*. 2002. Vol. 564. P. 981–1046.
16. *Zavlin V. E.* First X-ray observations of the young pulsar J1357-6429 // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 665. P. 143.
17. *А.В. Кузнецов Н. М.* Электрослабые процессы во внешней активной среде. Ярославль: Из-во Ярославского гос. университета им. П.Г. Демидова, 2010.
18. *Яковлев Д., Левенфиш К., Шибанов Ю.* Остывание нейтронных звёзд и сверхтекучесть в их ядрах // *УФН*. 1999. Т. 169. С. 825–868.
19. *Salpeter E. E.* Energy and pressure of a zero-temperature plasma // *Astrophys. J.* 1961. Vol. 134. P. 669.
20. *Бисноватый-Коган Г.* Релятивистская астрофизика и физическая космология. Москва: КРАСАНД, 2010.
21. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. Москва: Иностранная литература, 1960.
22. *Uehling E., Uhlenbeck G.* Transport Phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac Gases. I // *Physical review*. 1933. Vol. 552. P. 43.
23. *Uehling E.* Transport Phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac Gases. II //

- Physical review*. 1934. Vol. 46. P. 917.
24. Tomonaga S. Z. Innere Reibung und Wärmeleitfähigkeit der Kernmaterie // *Z. Phys.* 1938. Bd. 110. S. 573.
 25. Бисноватый-Коган Г., Романова М. Перенос тепла и диффузия нейтронов в коре нейтронных звёзд // *ЖЭТФ*. 1982. Т. 83. С. 449.
 26. Имшенник В. О теплопроводности плазмы // *Астрономический журнал*. 1961. Т. 38. С. 652.
 27. Ландау Л. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // *ЖЭТФ*. 1937. Т. 7. С. 203.
 28. Chandrasekhar S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy // *Rev. Modern Phys.* 1943. Vol. 15. P. 1.
 29. Spitzer L., Harm R. Transport phenomena in a completely ionized gas // *Physical Review*. 1953. Vol. 89. P. 977–981.
 30. Spitzer L., Cohen R., McRoutly P. The electrical conductivity of ionized gas // *Physical Review*. 1950. Vol. 80. P. 230–232.
 31. Landshoff R. Transport phenomena in a completely ionized gas in presence of a magnetic field // *Physical review*. 1951. Vol. 82. P. 442.
 32. Marshall W. Kinetic theory of an ionized gas // *At. Energy Res Estable*. 1960. Vol. -. P. 2419.
 33. Бисноватый-Коган Г. С. Перенос тепла и диффузия в частично ионизованной двухтемпературной плазме // *Прикладная механика и техническая физика*. 1964. Т. 3. С. 43.
 34. Rosenbluth M., Macdonald W., Judd D. Fokker-Planck equations for the inverse square forces // *Physical review*. 1957. Vol. 107. P. 1.
 35. Трубников Б. А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме // *Вопросы теории плазмы*. 1963. Т. 1. С. 98.
 36. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // *Communications on pure and applied mathematics*. 1949. Vol. 2. P. 331–407.

37. Самохин М. В. Определение коэффициентов переноса в плазме методом Грэда // *Журнал технической физики*. 1962. Т. 32. С. 1055–178.
38. Самохин М. В. Токи и потоки тепла в двухтемпературной плазме // *Журнал технической физики*. 1963. Т. 33. С. 667–674.
39. Самохин М. В. Потоки частиц и тепла в многокомпонентной плазме // *Журнал технической физики*. 1963. Т. 33. С. 675–682.
40. Силлин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. Москва: Издательство Физического Института имени Лебедева РАН, 1998.
41. Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме // *ЖЭТФ*. 1958. Т. 33. С. 459.
42. Боброва Н. А., Сасоров П. В. МГД уравнения для полностью ионизованной плазмы сложного состава // *Физика плазмы*. 1993. Т. 19. С. 789.
43. Bobrova N. A., Lazarro E., Sasorov P. V. Magnetohydrodynamic two-temperature equations for multicomponent plasma // *Physics of Plasmas*. 2005. Vol. 12. P. 022105–1–19.
44. Epperlein E. M., Haines M. G. Plasma transport coefficients in a magnetic field by direct numerical solution of the Fokker-Planck equation // *Phys. Fluids*. 1986. Vol. 29. P. 1029.
45. Kaneko S., Taguchi M. Electrical conductivity of a high-temperature plasma in a uniform magnetic field // *J. Phys. Soc. Japan*. 1978. Vol. 45. P. 4.
46. Wyller A. On thermal conductivity in degenerate stellar cores // *Astrofisica Norvegica*. 1964. Vol. 9. P. 79–88.
47. Lampe M. Transport coefficients of degenerate plasma // *Physical review*. 1968. Vol. 170. P. 306.
48. Flowers E., Itoh N. Transport properties of dense matter // *Astrophys. J.* 1976. Vol. 206. P. 218–242.
49. Яковлев Д., Урнин В. А. Тепло- и электропроводность в белых карликах и нейтронных звёздах // *Астрономический журнал*. 1980. Т. 57. С. 526.

50. *Itoh N., Hayashi H., Kohyama Y.* Electrical and Thermal Conductivities of Dense Matter in the Crystalline Lattice Phase. III. Inclusion of Lower Densities // *Astrophys. J.* 1993. Vol. 418. P. 405–413.
51. *Yakovlev D., Gnedin O., Kaminker A. et al.* Neutron star cooling: theoretical aspects and observational constraints // *Adv. Space Res.* 2004. Vol. 33. P. 523.
52. *Kondratyev I. A., Moiseenko S. G., Bisnovaty-Kogan G. S., Glushikhina M. V.* 3D Simulation of Anisotropic Heat Transfer in Outer Layers of Magnetized Neutron Stars // *Astronomy Reports.* 2020. Vol. 64. P. 226–243.
53. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е.* Статистическая физика. Москва: Физматлит, 2002.
54. *Tamm I. E.* Basics of the theory of electricity, 9th ed. Moscow: Nauka, 1976.
55. *Burnett D.* The Distribution of Molecular Velocities and Mean Motion in a Non-Uniform Gas // *Proceedings of London Mathematical Society.* 1936. Vol. 40. P. 382.
56. *Бисноватый-Коган Г. С., Куликов Ю. Н., Чечёткин В. М.* Выделение ядерной энергии в оболочках нейтронных звёзд и рентгеновские источники // *Астрономический журнал.* 1976. Т. 53. С. 975.
57. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Москва: Мир, 1978.
58. *Бисноватый-Коган Г. С.* Физические основы теории звездной эволюции. Москва: Наука, 1988.
59. *Bisnovaty-Kogan G. S.* Stellar Physics I: Fundamental Concepts and Stellar Equilibrium. Berlin: Springer, 2001.
60. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме. Москва: Наука, 2013.
61. *Yanke E., Emde F., Losch F.* Tafeln Hoherer Funktionen. Berlin: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 2013.
62. *Калихман Л. Е.* Элементы магнитной газодинамики. Москва: Атомиздат,

- 1964.
63. *Schatzman E.* White dwarfs. Amsterdam: North Holland, 1958.
 64. *Wyller A. A.* Thermal conductivity of partially degenerate magnetoplasmas in stellar cores // *Astrophysical. Journal.* 1973. Vol. 184. P. 517.
 65. *Sodha M. S.* Transport Phenomena in Slightly Ionized Gases: Low Electric Fields // *Physical Review.* 1959. Vol. 118. P. 486–488.
 66. *Sodha M. S.* Transport Phenomena in Slightly Ionized Gases: High Electric Fields // *Physical Review.* 1960. Vol. 118. P. 378–381.
 67. *Zivanovic S., Sodha M. S.* Transport phenomena in a nonuniform slightly ionized gas // *Progress of Theoretical Physics.* 1962. Vol. 27. P. 1128–1136.
 68. *Ландау Л. Д., Луфшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Москва: Физматлит, 2005.
 69. *Kovetz A., Shaviv G.* The electrical and thermal conductivities of stellar degenerate matter // *Astronomy and Astrophysics.* 1973. Vol. 28. P. 315.
 70. *Canuto V., Chiuderi C.* Transverse electrical conductivity of a relativistic gas in an intense magnetic field // *Physical Review D.* 1970. Vol. 1. P. 2219–2226.
 71. *Canuto V.* Electrical conductivity and conductive opacity of a relativistic electron gas // *Astrophysical journal.* 1970. Vol. 159. P. 641–652.
 72. *Wiranata A., Prakash M.* Shear viscosities from the Chapman-Enskog and the relaxation time approaches // *Physical review.* 2012. Vol. 85. P. 5.
 73. *Wiranata A., Prakash M., Chakraborty P.* Comparison of viscosities from the Chapman-Enskog and relaxation time methods // *Central European J. Phys.* 2012. Vol. 10. P. 1349.
 74. *Potekhin A. Y.* Electron conduction in magnetized star envelope // *Astronomy and Astrophysics.* 1999. Vol. 351. P. 787.
 75. *Pons J. A., Walter F. M., Lattimer J. M. et al.* Towards a mass and radius determination of the nearby isolated neutron star RX J185635-3754 // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 564. P. 981.

76. *Page D., Geppert U., Weber F.* The cooling of compact stars // *Nuclear Phys. A.* 2006. Vol. 777. P. 497.
77. *Aguilera D., Pons J., Miralles J.* 2D Cooling of magnetized neutron stars // *Astron. Astrophys.* 2008. Vol. 486. P. 271–288.
78. *Pons J. A., Miralles J. A., Geppert U.* Magneto-thermal evolution of neutron stars // *Astronomy and Astrophysics.* 2009. Vol. 496. P. 207–216.
79. *Page D., Geppert U., Kuker M.* Cooling of Neutron Stars with Strong Toroidal Magnetic Fields // *Astrophysics and Space Science.* 2007. Vol. 308. P. 403–412.
80. *Бисноватый-Коган Г., Глушихина М.* Вычисление коэффициентов теплопроводности в замагниченном плотном веществе // *Физика Плазмы.* 2018. Т. 44. С. 355–374.
81. *Брагинский С. И.* Вопросы теории плазмы. Вып.1. Под редакцией М. А. Леонтовича. Москва: Госатомиздат, 1963.