

На правах рукописи



Лужковский Артемий Араратович

**Самосогласованное описание нелинейного
взаимодействия квазимонохроматических волн с
резонансными частицами в неоднородной плазме**

Специальность 1.3.3. —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в Отделе физики космической плазмы Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт космических исследований Российской академии наук «ИКИ РАН».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Шкляр Давид Рувимович

Официальные оппоненты: **Демехов Андрей Геннадьевич**,
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное на-
учное учреждение «Полярный геофизический
институт» (ПГИ),
Главный научный сотрудник

Сорокина Екатерина Алексеевна,
кандидат физико-математических наук, до-
цент,
Национальный исследовательский центр
«Курчатовский институт»,
Начальник лаборатории ККТЭиПТ

Ведущая организация: Институт земного магнетизма, ионосферы и
распространения радиоволн им. Н. В. Пушко-
ва Российской академии наук (ИЗМИРАН)

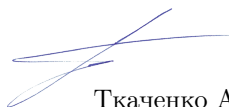
Защита состоится **19 декабря 2025 г. в 11 ч 00 мин** на заседании дис-
сертационного совета 24.1.481.01 при Институте космических исследований
Российской академии наук по адресу: Москва, Профсоюзная, 84/32, ИКИ
РАН, подъезд А2 (конференц-зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН и на сайте
<http://www.iki.rssi.ru/diss/2025/luzhkovskiy.htm>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учрежде-
ния, просьба направлять по адресу: 117997, Москва, Профсоюзная, 84/32,
ученому секретарю диссертационного совета 24.1.481.01.

Автореферат разослан «17» ноября 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.481.01,
к. ф.-м. н.



Ткаченко Алексей Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Плазма создается и исследуется в различных лабораторных установках, таких как токамаки и плазменные ускорители [1; 2], а также широко распространена в природных условиях: в атмосферах звезд [3], межзвездном пространстве [4] и магнитосферах планет [5]. Особый интерес представляет магнитосферная плазма Земли, где наблюдаются уникальные явления. К ним относятся авроральные (полярные) сияния – оптические явления в полярных регионах, возникающие при взаимодействии заряженных частиц с верхними слоями атмосферы [6]. Важным процессом в околоземной магнитосфере является формирование радиационных поясов, в которых удерживаются высокоэнергичные заряженные частицы, прежде всего электроны и протоны. Эти пояса, открытые в конце 1950-х годов [7; 8], представляют угрозу для спутников и космических аппаратов [9], поскольку их электронное оборудование подвергается воздействию высокоэнергичной радиации. Кроме того, магнитосферная плазма характеризуется сложными процессами взаимодействия волн и частиц, которые существенно влияют на ее динамику и энергетический баланс [10; 11]. Исследование этих процессов является необходимым для глубокого понимания динамики околоземной плазмы и для оценки их влияния на космическую погоду и стабильность технических систем на Земле [12].

Современные космические миссии предоставляют большой объем уникальных научных данных, способствующих детальному изучению процессов в магнитосферной плазме. Это позволяет исследовать различные волновые явления, что, в свою очередь, стимулирует развитие соответствующих теоретических моделей и повышает актуальность данного направления исследований. Важными примерами таких миссий являются RBSP (позднее переименованная в Van Allen Probes) [13] и ERG (позже переименованная в Arase) [14], направленные на изучение физических процессов в радиационных поясах Земли, а также миссия MMS, предназначенная для исследования волн и частиц в хвостовой области магнитосферы [15].

Для описания динамики магнитосферной плазмы используется система самосогласованных уравнений, объединяющая кинетическое уравнение Больцмана-Власова и уравнения Максвелла [16]. Вследствие высокой размерности фазового пространства и нелинейности взаимодействия волн и частиц эта система не допускает общего аналитического решения. В связи с этим широкое распространение получили приближенные и численные методы анализа. К числу первых, в частности, относятся линейное [17; 18] и квазилинейное приближения [19], а также приближение заданного поля волны [20]. В случае, когда амплитуды волн достаточно малы, при исследовании нелинейных процессов в плазме электромагнитное поле

часто представляют в виде совокупности линейных волн, амплитуды которых, однако, медленно изменяются во времени вследствие взаимодействия волна-волна и волна-частица. Такой подход, который принято называть теорией слабой турбулентности [21], используется в том числе и в настоящей диссертации. Помимо указанных выше аналитических подходов активно применяются численные методы, среди которых можно выделить метод частиц в ячейках (PIC) [22], а также прямое численное решение кинетического уравнения и уравнений Максвелла [23].

В магнитосфере Земли могут возбуждаться и распространяться различные волновые моды, генерация и характеристики которых определяются параметрами плазмы и конфигурацией геомагнитного поля. Одним из наиболее изученных типов волн магнитосферной плазмы являются свистовые волны – электромагнитные волны очень низкой частоты (3-30 кГц) с характерной дисперсией [24]. Эти волны могут возбуждаться как в результате естественных процессов, таких как молниевые разряды [25] и плазменные неустойчивости [10], так и под воздействием искусственных источников, например, мощных наземных ОНЧ передатчиков [26].

Теоретические и экспериментальные исследования роли наземных ОНЧ передатчиков в динамике энергичных электронов радиационных поясов начались давно и продолжаются по настоящее время [27; 28]. Недавние исследования сигналов ОНЧ передатчиков выполнены на основе данных спутников CRRES, DEMETER и Van Allen Probes [29; 30]. Эти исследования подтвердили важность дактированного распространения сигналов передатчиков и позволили оценить их амплитуды в экваториальной области магнитосферы. Резонансное взаимодействие электронов с сигналом передатчика приводит к рассеянию электронов по питч-углам, в результате чего часть из них попадает в конус потерь и высыпается в атмосферу [31]. Другим возможным следствием резонансного взаимодействия частиц с сигналами передатчиков является увеличение энергии части резонансных электронов [32]. Поэтому исследование роли сигналов передатчиков в появлении высокоэнергичных электронов в радиационных поясах Земли представляет собой важную и актуальную задачу.

В настоящее время большинство ОНЧ исследований связано с изучением различных типов свистовых излучений, наблюдаемых в магнитосфере Земли. Помимо сигналов от ОНЧ передатчиков и генерируемых молниевыми разрядами свистов [33; 34], важную роль играют когерентные хоровые волны (хоры) и широкополосный плазмосферный хисс [35–37]. Интенсивные когерентные волны типа хоров способны вступать в нелинейное резонансное взаимодействие с электронами, что может приводить как к их ускорению [38], так и к питч-угловому рассеянию [39]. В то же время волны типа хисс взаимодействуют с электронами преимущественно в квазилинейном режиме, способствуя их постепенному рассеянию в конус потерь [40; 41].

Другим распространенным волновым явлением являются ленгмюровские (или плазменные) волны. Они регулярно наблюдаются в солнечном ветре [42], околоземной среде [43], а также в хвосте магнитосферы [44]. Рассмотрение электростатических ленгмюровских волн позволяет свести задачу к одномерной самосогласованной системе уравнений, что делает такую модель особенно удобной для численного моделирования. Благодаря малой размерности фазового пространства, часто используется прямое численное решение уравнения Больцмана-Власова с применением сеточных методов [45; 46]. Как правило, такие расчеты выполняются для однородной плазмы, однако особый интерес представляет исследование взаимодействия ленгмюровских волн с частицами в неоднородной плазме, где возможны новые эффекты, связанные с пространственными вариациями плотности. Дополнительная мотивация исследования ленгмюровских волн в неоднородной плазме связана с их известной аналогией с волнами свистовой моды. Система уравнений движения резонансных электронов в поле ленгмюровской волны имеет такую же математическую структуру как и система уравнений, описывающая движение электронов в поле волны свистовой моды [47]. Это сходство способствует развитию единых подходов к анализу нелинейных эффектов.

Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействий волн и частиц позволили существенно продвинуться в понимании динамики магнитосферной плазмы. Тем не менее, ряд фундаментальных вопросов остается недостаточно изученным. В частности, не до конца решенными остаются проблемы нелинейного резонансного взаимодействия электронов с квазимонохроматическими волнами в условиях неоднородной магнитосферной плазмы. Описание таких процессов требует самосогласованного решения кинетического уравнения Больцмана-Власова для функции распределения и уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле.

Целью диссертационной работы является исследование самосогласованного резонансного взаимодействия квазимонохроматических пакетов волн с энергичными частицами в неоднородной плазме на основе численных методов, обеспечивающих учет взаимного влияния волновых электромагнитных полей и заряженных частиц плазмы.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи :

1. Разработать и реализовать итерационный алгоритм для нахождения самосогласованного профиля амплитуды сигнала наземного ОНЧ передатчика, распространяющегося в магнитосфере вдоль внешнего магнитного поля.
2. На основе нелинейного инкремента волны исследовать механизм передачи энергии между различными популяциями резонансных электронов в процессе их взаимодействия со свистовой волной,

распространяющейся под углом к внешнему магнитному полю в сильно неоднородной магнитосферной плазме.

3. Разработать программу для исследования самосогласованной динамики ленгмюровских волн в неоднородной плазме на основе кинетического уравнения Больцмана-Власова и закона Ампера-Максвелла.
4. Построить и проанализировать частотно-временные спектрограммы рассчитанных электрических полей для исследования динамики ленгмюровских волн в плазме.

Научная новизна:

1. Впервые определен пространственный профиль амплитуды сигнала ОНЧ передатчика, распространяющегося вдоль силовой линии магнитного поля Земли, с учетом не только геометрических факторов распространения волнового пакета, но и резонансного циклотронного взаимодействия между волной и энергичными электронами плазмы.
2. Рассмотрен новый механизм передачи энергии от менее энергичных к более энергичным электронам через свистовую волну, возбуждаемую циклотронной неустойчивостью в экваториальной области и распространяющуюся в плазме в соответствии с уравнениями геометрической оптики.
3. Предложен новый самосогласованный численный подход к решению системы уравнений Больцмана-Власова и уравнения для поля волны, в котором вклад основной части нерезонансных частиц учитывается через диэлектрическую проницаемость среды. В отличие от традиционно используемого описания поля ленгмюровских волн с помощью уравнения Пуассона, применяется закон Ампера-Максвелла, что делает систему эволюционной и, благодаря этому, наиболее адекватной для моделирования временной динамики физических процессов. Аналогичные численные методы решения системы уравнений, описывающей самосогласованную динамику ленгмюровских волн и резонансных частиц, широко применяются для случая однородной плазмы. В данном исследовании применен оригинальный численный метод, позволяющий учитывать неоднородность плазмы, что особенно важно для моделирования процессов, характерных для реальных космических условий.
4. Показано, что пространственная структура поля совокупности волновых пакетов ленгмюровских волн проявляется в виде периодических временных модуляций амплитуды поля на частотно-временной спектрограмме, регистрируемой в определенной точке.

Теоретическая и практическая значимость

Рассчитанный самосогласованный профиль сигнала ОНЧ передатчика предоставляет возможность детально исследовать динамику субрелятивистских электронов в поле сигнала передатчика. Существенно, что эти электроны ввиду их малого количества не оказывают значимого влияния на профиль амплитуды, что позволяет применять приближение заданного поля при рассмотрении их движения.

Показано, что в неравновесной неустойчивой плазме может происходить передача энергии от частиц с меньшей энергией к частицам с большей энергией через волну. Это продемонстрировано на примере возбуждения свистовых волн в экваториальной области и указывает на возможный механизм ускорения частиц в радиационных поясах Земли.

Предложенный подход для самосогласованного решения уравнения Больцмана-Власова и закона Ампера-Максвелла обеспечивает существенное снижение объема вычислений, что позволяет проводить необходимый численный расчет на персональном компьютере. Благодаря известной аналогии между свистовыми и ленгмюровскими волнами, разработанный алгоритм может быть использован не только для исследования ленгмюровских волн; этот алгоритм может быть обобщен и для описания свистовых волн в неоднородной плазме, что расширяет спектр практического применения полученных результатов.

Методы исследования и достоверность результатов

Результаты, представленные в настоящей диссертации, основаны на решении фундаментальных уравнений электродинамики и физики космической плазмы: уравнениях Максвелла и кинетическом уравнении Больцмана-Власова с самосогласованным полем. Исследование носит преимущественно теоретический характер и содержит значительный объем численного моделирования. Достоверность полученных результатов и выводов обеспечивается строгим и корректным решением указанных фундаментальных уравнений в рамках применяемых физических приближений.

Для решения основной системы уравнений применялись различные подходы. В частности, использовался метод последовательных приближений для получения самосогласованного профиля амплитуды сигнала ОНЧ передатчика, распространяющегося в магнитосферной плазме вдоль силовой линии магнитного поля и взаимодействующего с энергичными электронами радиационных поясов. Для нахождения динамики ленгмюровских волн в неоднородной плазме была поставлена задача Коши для указанной системы уравнений. Кинетическое уравнение для функции распределения резонансных частиц решалось методом Рунге-Кутты 4-го порядка, а для расчета временной эволюции электрического поля применялась стандартная разностная схема второго порядка точности.

В третьей главе работы исследован механизм передачи энергии между различными популяциями электронов, опосредованный свистовой

волной, которая генерируется в приэкваториальной области магнитосферы. Показано, что в рамках неустойчивой неравновесной плазмы такое взаимодействие может сопровождаться передачей энергии от менее энергичных частиц к более энергичным. Этот процесс важен для понимания механизмов возрастания потоков энергичных частиц в радиационных поясах Земли, наблюдаемого на спутниках во время геомагнитных возмущений.

В четвертой и пятой главах рассматривается взаимодействие ленгмюровских волн с электронами на основе самосогласованной эволюционной системы уравнений. Разработанный метод решения данной системы дает правильные результаты в различных случаях, исследованных другими авторами, что подтверждает достоверность получаемых новых результатов. Такой подход позволяет обеспечить достаточную степень надежности и воспроизводимости полученных результатов.

В ходе выполнения исследования для проведения расчетов и моделирования применялась программная среда MATLAB, что позволило реализовать необходимые численные методы и алгоритмы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разлит подход к самосогласованному описанию резонансного взаимодействия энергичных электронов с сигналом ОНЧ передатчика, который позволил определить пространственный профиль амплитуды сигнала при его дактированном распространении в магнитосфере. Исследование основано на решении нелинейной системы, состоящей из кинетического уравнения для функции распределения резонансных частиц и уравнения для энергии волнового поля, в котором нелинейный нелокальный инкремент определяется функцией распределения резонансных частиц.
2. Эволюция квазимонохроматической волны, возбуждаемой в приэкваториальной области магнитосферы в результате развития циклотронной неустойчивости, сопровождается обменом энергией не только между волной и резонансными частицами, но и между различными группами резонансных частиц. В неравновесной неустойчивой плазме возможна опосредованная волной передача энергии от менее энергичных к более энергичным частицам, аналогичная обсуждавшемуся ранее процессу при распространении свистовых волновых пакетов, индуцированных молниевыми разрядами.
3. Разработан метод численного моделирования самосогласованной эволюции ленгмюровских волн и распределения энергичных электронов, в котором нерезонансные частицы включены в рассмотрение с помощью диэлектрической проницаемости, что позволяет существенно снизить объем вычислений и производить расчеты

на персональном компьютере. Выполненное моделирование воспроизводит известные ранее результаты для монохроматических волн в однородной плазме, а также дает ряд новых результатов по эволюции поля и функции распределения резонансных частиц в различных случаях: устойчивой и неустойчивой плазмы, монохроматической волны и спектра волн, однородной и неоднородной плазмы.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на научных семинарах в ИКИ РАН и на следующих конференциях:

1. 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Самосогласованное описание резонансного взаимодействия электронов с сигналом наземного ОНЧ передатчика”, Москва (2021)
2. 19-я конференция молодых ученых “Фундаментальные и прикладные космические исследования”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Ускорение высокоэнергичных электронов в поле монохроматического сигнала наземного ОНЧ передатчика: самосогласованный подход”, Москва (2022)
3. 19-я конференция “Физика плазмы в солнечной системе”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Перенос энергии между различными группами электронов в результате резонансного взаимодействия с волной свистовой моды”, Москва (2024)
4. 66-я Всероссийская научная конференция МФТИ
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Резонансное взаимодействие электронов со свистовыми волнами как механизм передачи энергии между различными группами частиц”, Москва (2024)
5. 20-я конференция “Физика плазмы в солнечной системе”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Самосогласованное описание ленгмюровской турбулентности в неоднородной плазме”, Москва (2025)
6. 22-я конференция молодых ученых “Фундаментальные и прикладные космические исследования”
Лужковский А.А., Шкляр Д.Р. “Эволюция ленгмюровского спектра в неоднородной плазме: самосогласованное описание”, Москва (2025)

Личный вклад.

Исследования, положенные в основу диссертационной работы, выполнены автором лично либо при его непосредственном участии. Автор принимал участие в постановке и теоретическом развитии исследуемых задач. В рамках работы совместно с соавторами были разработаны численные методы и программные средства для самосогласованного моделирования нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн с резонансными

частицами в неоднородной плазме. Кроме того, был предложен и реализован итерационный метод расчета профиля амплитуды сигнала наземного ОНЧ передатчика, распространяющегося вдоль силовой линии магнитного поля и взаимодействующего с электронами радиационного пояса. Проанализирован механизм передачи энергии между различными популяциями электронов, взаимодействующих со свистовой волной на нескольких циклотронных резонансах. Полученные результаты были интерпретированы автором самостоятельно либо в сотрудничестве с соавторами.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных работах. Все эти статьи опубликованы в периодических научных журналах, рекомендованных ВАК и индексируемых в Web of Science и Scopus.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приводится обоснование актуальности исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируются цель и задачи работы, излагается научная новизна проведенного исследования, его теоретическая и практическая значимость, перечисляются основные положения, выносимые на защиту, указываются методы исследования и степень достоверности полученных результатов, описываются структура и объем диссертации, а также приводятся сведения о публикациях и личном вкладе автора.

В **первой главе** излагаются основные уравнения и подходы, используемые в диссертационной работе для исследования нелинейного взаимодействия волн и частиц в бесстолкновительной магнитоактивной неоднородной плазме. В **разделе 1.1** представлена замкнутая нелинейная система уравнений Больцмана-Власова-Максвелла, описывающая самосогласованную эволюцию электромагнитных волн и заряженных частиц. В **разделе 1.2** приведены теоретические основы приближения заданного поля, применяемого в последующих главах работы. В рамках этого приближения частицы плазмы можно разделить на две компоненты: «холодные» частицы, определяющие дисперсионные свойства плазмы, и резонансные частицы, ответственные за изменение энергии волны. Для полноты изложения дисперсионные свойства холодной бесстолкновительной магнитоактивной плазмы приведены в **разделе 1.3**. Учитывая важную роль свистовых волн, в **разделе 1.4** описаны некоторые особенности их распространения в магнитосфере. Также представлены аналитические выражения для дисперсии свистовых волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, что обеспечивает необходимую теоретическую основу для изложения результатов в последующих главах.

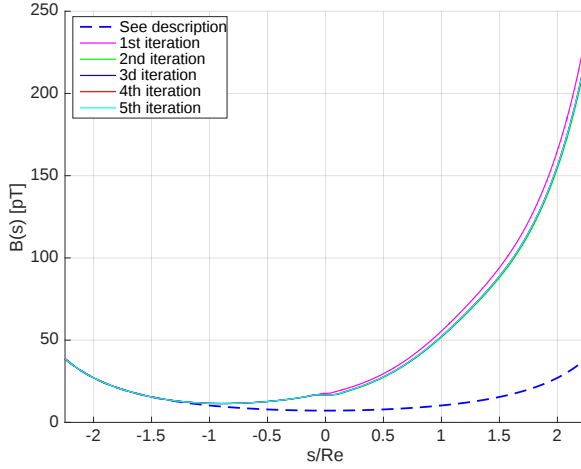


Рисунок 1 — Профиль амплитуды магнитного поля волны в зависимости от нормированной координаты вдоль силовой линии внешнего геомагнитного поля на каждом шаге итераций. Синяя пунктирная линия показывает профиль без учета усиления.

Вторая глава посвящена исследованию резонансного взаимодействия сигнала очень низкочастотного (ОНЧ) передатчика, распространяющегося вдоль силовой линии магнитного поля Земли, с энергичными электронами радиационных поясов. В **разделе 2.1** рассматривается система уравнений движения электронов в поле свистовой волны и детально описывается процедура вычисления функции распределения резонансных частиц. В частности, в **параграфе 2.1.1** эта система уравнений сводится к одномерной, описывающей движение резонансной частицы в эффективном потенциале, характеризующимся безразмерным параметром $\beta = 1/\alpha\tau^2$, который определяет конкуренцию между неоднородностью плазмы (α – параметр неоднородности) и нелинейностью взаимодействия (τ – нелинейное время задачи). Далее, в **параграфе 2.1.2** задается вид модельной невозмущенной неустойчивой функции распределения энергичных электронов и приводится соответствующее выражение для линейного инкремента свистовой волны, распространяющейся вдоль силовой линии магнитного поля. Анализ одномерной системы уравнений и определение фазового объема захваченных частиц приводится в **параграфе 2.1.3**. На основе теоремы Лиувилля и принципа сохранения фазового объема, в **параграфе 2.1.4** определяется усредненная функция распределения захваченных по фазе частиц, тогда как в **параграфе 2.1.5** представлено аналитическое выражение функции распределения пролетных электронов.

В **разделе 2.2** приводится аналитическое выражение нелинейного инкремента свистовой волны, распространяющейся вдоль внешнего

магнитного поля, для произвольного соотношения неоднородности и нелинейности. Показано, что в случае $|\beta| > 1$, когда существуют захваченные по фазе частицы, инкремент является нелокальным нелинейным функционалом профиля амплитуды волны, тогда как при $|\beta| < 1$, когда захваченные частицы отсутствуют, инкремент определяется только локальными параметрами. В **разделе 2.3** изложен и реализован подход, основанный на методе последовательных приближений и предназначенный для получения самосогласованного решения исходной системы уравнений. Решение осуществляется поэтапно: в нулевом приближении инкремент волны полагается равным нулю, вследствие чего профиль ее амплитуды определяется исключительно геометрическими факторами, такими как групповая скорость и поперечное сечение лучевой трубки. Далее, вычисленный таким образом профиль используется совместно с аналитическим выражением для нелинейного инкремента, что позволяет рассчитать профиль амплитуды уже на следующей итерации. Итерации продолжаются до тех пор, пока получаемый профиль амплитуды не совпадает с предыдущим с такой точностью, что различия не видны на графике. Профиль амплитуды магнитного поля ОНЧ сигнала на каждом шаге итераций показан на рис. 1. Численные расчеты выполнены для параметров, близких к Новосибирскому ОНЧ передатчику. Параметры невозмущенной функции распределения энергичных электронов, а также амплитуда сигнала при выходе в верхние слои ионосферы оценивались по экспериментальным данным, полученным космическими аппаратами.

В конце данной главы в **разделе 2.4** обсуждаются полученные результаты в контексте рассчитанного самосогласованного профиля амплитуды магнитного поля сигнала передатчика и исследования динамики субрелятивистских электронов радиационных поясов Земли в таком поле.

В **третьей главе** исследуется процесс передачи энергии между различными популяциями электронов. Этот процесс обусловлен взаимодействием резонансных электронов с квазимонохроматическим пакетом свистовых волн, распространяющимся в магнитосфере вдоль траектории, определяемой уравнениями геометрической оптики. В **разделе 3.1** приведен вид модельной невозмущенной функции распределения энергичных электронов, учитывающей температурную анизотропию и конус потерь. На основе этого выражения определен линейный инкремент свистовой волны, распространяющейся под произвольным углом к внешнему магнитному полю. Траектория квазимонохроматического волнового пакета свистовых волн, возбуждаемого в приэкваториальной области неустойчивым распределением электронов, определена в **разделе 3.2** в соответствии с моделью электрон-протонной холодной плазмы, дипольной моделью магнитного поля Земли и гиротропной моделью для плазменной частоты.

В **разделе 3.3** развивается теоретический подход для описания нелинейного резонансного взаимодействия свистовых волн с энергичными

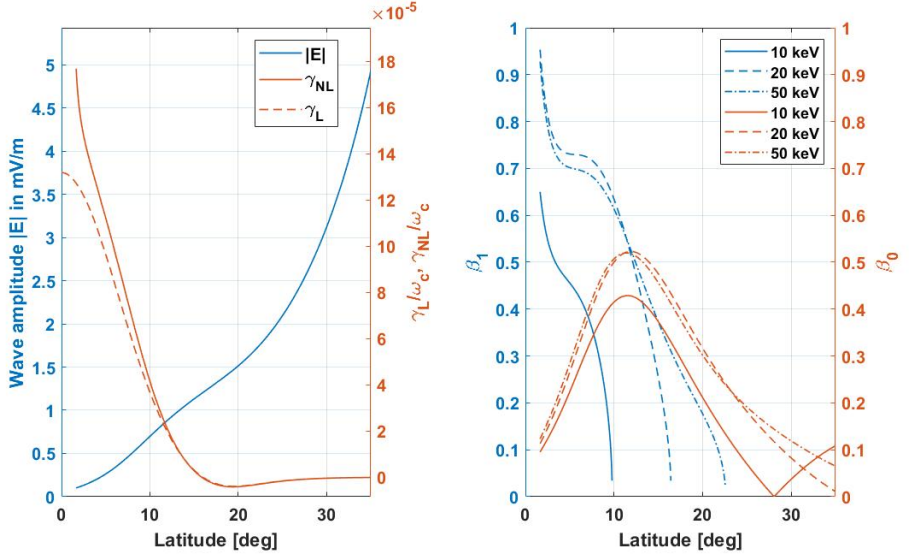


Рисунок 2 — (слева) Полный нормированный нелинейный инкремент γ/ω_c (оранжевая сплошная линия), линейный инкремент γ_L/ω_c (оранжевая пунктирная линия) и амплитуда электрического поля $|E|$ (синяя линия) вдоль лучевой траектории. (справа) Безразмерные параметры β_n вдоль лучевой траектории для частиц на первом (синие линии) и Ландау (оранжевые линии) резонансах с полной кинетической энергией $W = 10$ кэВ (сплошные линии), 20 кэВ (пунктирные линии), 50 кэВ (штрихпунктирные линии).

электронами в неоднородной магнитосферной плазме на основе приближения заданного поля. Установлена применимость этого приближения в условиях рассматриваемой задачи для трех циклотронных резонансов $n = -1, 0, 1$. Проведен численный расчет изменения амплитуды волнового пакета вдоль траектории согласно модели, учитывающей геометрические факторы распространения и нелинейный инкремент волны в условиях сильной неоднородности плазмы. Показано, что для моделируемых условий магнитосферы Земли и вычисленной амплитуды волнового пакета реализуется режим сильной неоднородности практически вдоль всей рассчитанной траектории свистовой волны, за исключением узкой приэкваториальной области протяженностью около 1.66° по широте. На рис. 2 представлены результаты расчета амплитуды электрического поля волны, полного нелинейного инкремента и безразмерного параметра $\beta_n = 1/\alpha_n \tau_n^2$ вдоль траектории волнового пакета.

В разделе 3.4 на основе вычисленного нелинейного инкремента проведен детальный анализ резонансного взаимодействия на трех

основных циклотронных резонансах: $n = -1, 0, 1$. Установлено, что в неравновесной неустойчивой плазме возможна опосредованная волной передача энергии от менее энергичных к более энергичным частицам. Показано, что на низких и средних широтах существует конкуренция между первым циклотронным резонансом и резонансом Ландау, которые вносят соразмерные вклады противоположных знаков в полный инкремент волны, что приводит к значительному уменьшению его абсолютного значения. При этом на широте $\lambda = 15^\circ$ частицы первого циклотронного резонанса (~ 21.5 кэВ) теряют энергию, в то время как частицы резонанса Ландау (~ 22.5 кэВ) и минус первого резонанса (~ 55.8 кэВ) ускоряются. Проведена количественная оценка изменения энергии частиц, показавшая, что максимальное изменение энергии отдельной частицы составляет десятки эВ, тогда как среднее изменение энергии по фазовому объему не превышает долей эВ, поскольку изменение энергии частицы может быть как положительным, так и отрицательным. В заключительном **разделе 3.5** обсуждаются результаты исследования передачи энергии между различными популяциями энергичных электронов радиационных поясов Земли посредством их резонансного взаимодействия со свистовой волной.

В **четвертой главе** представлены результаты исследования самосогласованной эволюции ленгмюровских волн и резонансных электронов в пространственно-периодической системе без внешнего магнитного поля. На основе уравнения Ампера-Максвелла и выражения для электрической индукции в слабонеоднородной плазме в **разделе 4.1** получено основное уравнение для описания динамики электрического поля одномерного ленгмюровского спектра. Предполагается, что плазма может быть разделена на «холодную» компоненту, определяющую дисперсионные характеристики среды, и энергичную, ответственную за инкремент или декремент волн. В **разделе 4.2** для самосогласованного описания системы вводится внешняя потенциальная сила $\mathcal{F}$, определяющая пространственную неоднородность плотности плазмы, и как следствие, зависимость резонансной скорости от координаты. Сформулирована полная система самосогласованных уравнений, включающая помимо уравнения на векторный потенциал $\mathcal{A}(x, t)$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}(x, t)}{\partial t^2} - \frac{3v_{Tc}^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}(x, t)}{\partial x^2} + \omega_{pc}^2(x) \mathcal{A}(x, t) = -4\pi e c \int_{\Delta v_{res}} v(f - f_0) dv ,$$

кинетическое уравнение Больцмана-Власова для функции распределения резонансных электронов $f(t, x, v)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{e}{mc} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\mathcal{F}}{m} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 .$$

Здесь ω_{pc} , v_{Tc} – плазменная частота и тепловая скорость «холодных» электронов, $f_0(x, v)$ – невозмущенная функция распределения резонансных электронов, а m и $-e$ – масса и заряд электрона соответственно.

В разделах 4.3 и 4.4 детально описан переход к безразмерной системе дифференциальных уравнений эволюционного типа, заданы начальные условия для задачи Коши, установлена форма модуляции плотности плазмы, а также сформулированы граничные условия.

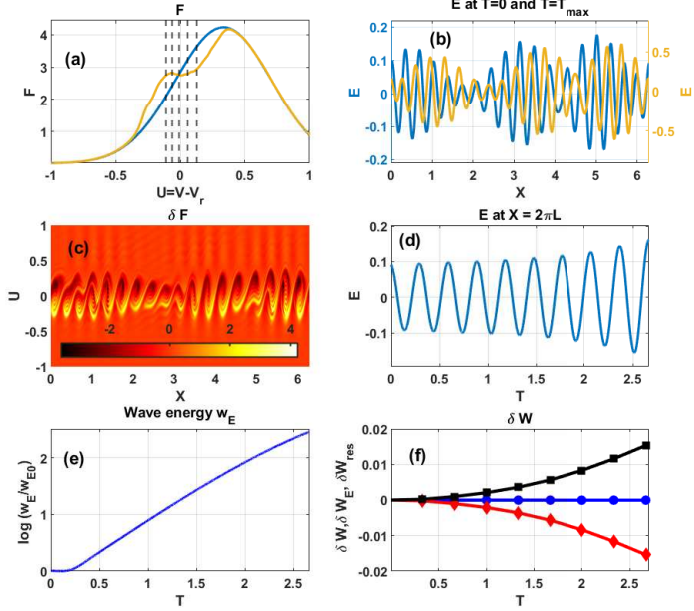


Рисунок 3 — Результаты моделирования, проведенного для случая с волновым спектром $j = 16\text{--}20$ в однородной неустойчивой плазме. (а) Начальная (синий) и усредненная по пространству конечная (оранжевый) функция распределения F в зависимости от скорости U . Вертикальные черные пунктирные линии обозначают резонансные скорости для каждой волновой гармоники. (б) Безразмерное электрическое поле E в зависимости от координаты X в начальный (синий) и конечный (оранжевый) моменты времени. (с) Конечное изменение функции распределения F на плоскости (X, U) . (д) Временная эволюция безразмерного поля E в точке $X = 2\pi L$. (е) Натуральный логарифм энергии волны w_E в зависимости от безразмерного времени T . (ф) Относительные изменения полной энергии δW (синие круги), энергии резонансных частиц δW_{res} (красные ромбы) и энергии волны δW_E (черные квадраты) в несколько моментов времени.

В разделе 4.5 представлены результаты численного моделирования эволюции ленгмюровских волн на основе десяти расчетов, выполненных

для различных начальных параметров плазмы и волнового поля. Исследование охватывает широкий диапазон физических условий, включая случаи устойчивой и неустойчивой функций распределения резонансных частиц в однородной и неоднородной плазме, а также различные конфигурации волнового спектра от монохроматических волн до широкого спектра возмущений. Показано, что в случае малых амплитуд в устойчивой однородной плазме наблюдается классическое затухание Ландау с экспоненциальным уменьшением энергии волны, тогда как для больших амплитуд реализуется режим О'Нила с характерными колебаниями энергии вокруг постоянного значения. Установлено, что пространственная неоднородность плазмы кардинально изменяет динамику волн и частиц. Неоднородность препятствует эргодизации функции распределения в резонансной области и связанному с этим уменьшению модуля инкремента, одновременно приводя к возникновению сложных структур электрического поля. В случаях с неустойчивой функцией распределения продемонстрирован экспоненциальный рост энергии волн, что приводит к образованию плато на профиле функции распределения вблизи резонансных скоростей. Для широкого спектра волн, когда резонансные области, соответствующие различным гармоникам, перекрываются, наблюдается (см. рис. 3) формирование плато на профиле пространственно усредненной функции распределения в области резонансных скоростей, как и предсказывает квазилинейная теория. В расчетах получено высокоточное сохранение полной энергии системы, что свидетельствует о корректности используемого численного алгоритма. **Раздел 4.6** посвящен изложению основных выводов главы.

В пятой главе продолжено исследование самосогласованной системы уравнений, описывающей динамику ленгмюровских волн в неоднородной плазме, при этом основное внимание сосредоточено на частотно-временном анализе эволюции спектра. Малая частотная дисперсия ленгмюровских волн приводит к сложностям в проведении спектрального анализа электрического поля. Предложен подход, основанный на использовании модифицированного дисперсионного соотношения, который обеспечивает выполнение условия спектрального разрешения без нарушения ключевых физических допущений модели о разделении плазмы на холодную и резонансную компоненты.

Результаты численного моделирования эволюции спектра, проведенного для случаев однородной и неоднородной плазмы, представлены в **разделе 5.1**. Выявлены характерные изменения функции распределения в области резонансных скоростей выбранных гармоник и процессы формирования вихревых структур в фазовом пространстве, что связано с нелинейным взаимодействием волн и частиц. Обнаружены квазипериодические структуры на частотно-временных спектрограммах, характеризующиеся регулярной повторяемостью и возрастанием частоты во времени (см. рис.

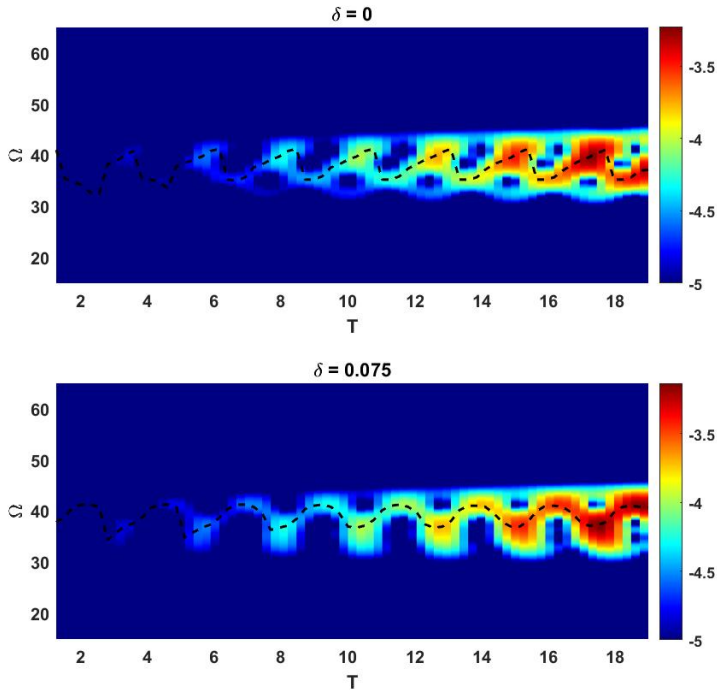


Рисунок 4 — Частотно-временная спектрограмма сигнала $E(X_0, T)$, зарегистрированного в точке $X_0 = 2\pi L$, для однородной (верхняя панель) и неоднородной (нижняя) плазмы.

4). Показано, что данные структуры формируются не вследствие нелинейных эффектов резонансного взаимодействия волна-частица, а обусловлены пространственной периодичностью амплитуды электрического поля, связанной с дискретностью волновых чисел в начальном спектре. **Раздел 5.2** посвящен изложению основных выводов главы.

В **заклучении** приведены основные результаты работы.

Заклучение

В данной работе представлено теоретическое исследование резонансного взаимодействия волн и частиц в неоднородной плазме, в котором использовались различные аналитические методы и подходы. В частности, в задаче поиска профиля амплитуды сигнала передатчика применялся метод решения кинетического уравнения Больцмана-Власова, основанный на гамильтоновых уравнениях движения частиц и теореме Лиувилля. В рамках исследования явлений, характерных для открытых неравновесных систем, на основе кинетических методов проведен анализ обмена энергией

между различными группами электронов при их резонансном взаимодействии со свистовой волной. Ключевым моментом в описании эволюции ленгмюровских волн в неоднородной среде было разделение плазмы на две компоненты: плотную «холодную», определяющую дисперсионные свойства плазмы, и высокоэнергичную, ответственную за затухание и усиление волн.

В диссертационной работе были получены следующие основные результаты:

1. Вычислен нелинейный инкремент дактированной квазимонохроматической свистовой волны для произвольного профиля амплитуды волны в неоднородной плазме. На основе итерационного алгоритма определен самосогласованный пространственный профиль амплитуды сигнала ОНЧ передатчика с учетом геометрических факторов распространения и резонансного взаимодействия с энергичными электронами.
2. Исследован механизм передачи энергии между различными группами резонансных электронов, опосредованный квазимонохроматической свистовой волной, генерируемой циклотронной неустойчивостью в экваториальной области и распространяющейся в земной магнитосфере. Проведенный детальный анализ нелинейного инкремента показал возможность передачи энергии от менее энергичных к более энергичным электронам в неравновесной неустойчивой плазме, что имеет важное значение для понимания процессов ускорения частиц в радиационных поясах Земли.
3. Разработан и реализован эффективный численный алгоритм для самосогласованного описания эволюции ленгмюровских волн и функции распределения резонансных частиц в условиях как однородной, так и неоднородной плазмы. На его основе воспроизводятся хорошо известные явления – такие как линейное и нелинейное затухание Ландау, а также формирование плато на профиле функции распределения, предсказываемое квазилинейной теорией. Помимо этого, с использованием предложенного подхода получены новые важные результаты, касающиеся особенностей динамики спектра волн в устойчивой и неустойчивой плазме.
4. Построены частотно-временные спектрограммы электрического поля ленгмюровских волн. Анализ выявил квазипериодические временные структуры, которые отражают пространственную модуляцию амплитуды поля, связанную с постоянным шагом волновых чисел гармоник начального волнового спектра.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Shklyar, D.* Self-consistent amplitude profile of ducted VLF transmitter signal due to resonant interaction with energetic electrons in the magnetosphere / D. Shklyar, A. Luzhkovskiy // *Advances in Space Research.* — 2023. — Jan. — Vol. 71, no. 1. — P. 228—243. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2022.08.081>.
- A2. *Luzhkovskiy, A. A.* Energy Transfer Between Various Electron Populations Via Resonant Interaction With Whistler Mode Wave / A. A. Luzhkovskiy, D. R. Shklyar // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 2023. — Dec. — Vol. 128, no. 12. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2023JA031962>.
- A3. *Luzhkovskiy, A. A.* Self-consistent description of Langmuir waves in an inhomogeneous plasma / A. A. Luzhkovskiy, D. R. Shklyar // *Physics of Plasmas.* — 2025. — July. — Vol. 32, no. 7. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0266890>.

Список литературы

- 1. *Wesson, J.* Tokamaks / J. Wesson, D. J. Campbell. — 4th. — Oxford University Press, 2011. — P. 812. — (International Series of Monographs on Physics).
- 2. *Esarey, E.* Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators / E. Esarey, C. B. Schroeder, W. P. Leemans // *Reviews of Modern Physics.* — 2009. — Aug. — Vol. 81, no. 3. — P. 1229—1285. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1229>.
- 3. *Hubeny, I.* Theory of Stellar Atmospheres. An Introduction to Astrophysical Non-equilibrium Quantitative Spectroscopic Analysis / I. Hubeny, D. Mihalas. — 2015.
- 4. *Ferrière, K.* Plasma turbulence in the interstellar medium / K. Ferrière // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2019. — Nov. — Vol. 62, no. 1. — P. 014014. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6587/ab49eb>.
- 5. *Russell, C.* The dynamics of planetary magnetospheres / C. Russell // *Planetary and Space Science.* — 2001. — Aug. — Vol. 49, no. 10/11. — P. 1005—1030. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0032-0633\(01\)00017-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0032-0633(01)00017-4).
- 6. *Akasofu, S. I.* Polar and Magnetosphere Substorms. Vol. 11 / S. I. Akasofu. — 1968.

7. Observation of High Intensity Radiation by Satellites 1958 Alpha and Gamma / J. A. Van Allen [et al.] // Journal of Jet Propulsion. — 1958. — Sept. — Vol. 28, no. 9. — P. 588—592. — URL: <http://dx.doi.org/10.2514/8.7396>.
8. Измерения космического излучения на искусственном спутнике Земли / С. Н. Вернов [и др.] // Доклады Академии наук СССР. — 1958. — Т. 120, № 6. — С. 231—233.
9. Space weather impacts on satellites and forecasting the Earth's electron radiation belts with SPACECAST / R. B. Horne [et al.] // Space Weather. — 2013. — Apr. — Vol. 11, no. 4. — P. 169—186. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/swe.20023>.
10. Kennel, C. F. Limit on stably trapped particle fluxes / C. F. Kennel, H. E. Petschek // Journal of Geophysical Research. — 1966. — Jan. — Vol. 71, no. 1. — P. 1—28. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JZ071i001p00001>.
11. Thorne, R. M. Radiation belt dynamics: The importance of wave-particle interactions / R. M. Thorne // Geophysical Research Letters. — 2010. — Nov. — Vol. 37, no. 22. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2010GL044990>.
12. Pulkkinen, T. Space Weather: Terrestrial Perspective / T. Pulkkinen // Living Reviews in Solar Physics. — 2007. — Vol. 4. — URL: <http://dx.doi.org/10.12942/lrsp-2007-1>.
13. The Electric and Magnetic Field Instrument Suite and Integrated Science (EMFISIS) on RBSP / C. A. Kletzing [et al.] // Space Science Reviews. — 2013. — June. — Vol. 179, no. 1—4. — P. 127—181. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-9993-6>.
14. The Plasma Wave Experiment (PWE) on board the Arase (ERG) satellite / Y. Kasahara [et al.] // Earth, Planets and Space. — 2018. — May. — Vol. 70, no. 1. — URL: <http://dx.doi.org/10.1186/s40623-018-0842-4>.
15. Magnetospheric Multiscale Overview and Science Objectives / J. L. Burch [et al.] // Space Science Reviews. — 2015. — May. — Vol. 199, no. 1—4. — P. 5—21. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-015-0164-9>.
16. Krall, N. Principles of Plasma Physics / N. Krall, A. Trivelpiece. — McGraw-Hill, 1973. — (International series in pure and applied physics). — URL: <https://books.google.ru/books?id=b0BRAAAAMAAJ>.
17. Ландау, Л. Д. О колебаниях электронной плазмы / Л. Д. Ландау // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1946. — Т. 16. — С. 574.

18. *Гинзбург, В. Л.* Волны в магнитоактивной плазме / В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе. — Москва : Наука, 1975.
19. *Vedenov, A.* Quasi-linear theory of plasma oscillations / A. Vedenov, E. Velikhov, R. Sagdeev // Nucl. Fusion Suppl. — 1962. — Vol. Pt. 2. — P. 465—475.
20. *O'Neil, T.* Collisionless Damping of Nonlinear Plasma Oscillations / T. O'Neil // The Physics of Fluids. — 1965. — Dec. — Vol. 8, no. 12. — P. 2255—2262. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1761193>.
21. *Галеев, А. А.* Нелинейная теория плазмы / А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев // Вопросы теории плазмы. Том 7 / под ред. М. А. Леонтович. — М. : Атомиздат, 1973. — С. 3—144.
22. *Dawson, J. M.* Particle simulation of plasmas / J. M. Dawson // Reviews of Modern Physics. — 1983. — Apr. — Vol. 55, no. 2. — P. 403—447. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.55.403>.
23. A Numerical Scheme for the Integration of the Vlasov–Maxwell System of Equations / A. Mangeney [et al.] // Journal of Computational Physics. — 2002. — July. — Vol. 179, no. 2. — P. 495—538. — URL: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2002.7071>.
24. *Helliwell, R.* Whistlers and Related Ionospheric Phenomena / R. Helliwell. — Stanford, CA : Stanford University Press, 1965.
25. *Storey, L.* / L. Storey // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1953. — July. — Vol. 246, no. 908. — P. 113—141. — URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1953.0011>.
26. *Helliwell, R. A.* VLF wave injection into the magnetosphere from Siple Station, Antarctica / R. A. Helliwell, J. P. Katsufakis // Journal of Geophysical Research. — 1974. — June. — Vol. 79, no. 16. — P. 2511—2518. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA079i016p02511>.
27. The modulated precipitation of radiation belt electrons by controlled signals from VLF transmitters / W. L. Imhof [et al.] // Geophysical Research Letters. — 1983. — Aug. — Vol. 10, no. 8. — P. 615—618. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/GL010i008p00615>.
28. *Inan, U. S.* Nonlinear pitch angle scattering of energetic electrons by coherent VLF waves in the magnetosphere / U. S. Inan, T. F. Bell, R. A. Helliwell // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1978. — July. — Vol. 83, A7. — P. 3235—3253. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA083iA07p03235>.

29. Ground-based transmitter signals observed from space: Ducted or non-ducted? / M. A. Clilverd [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2008. — Apr. — Vol. 113, A4. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2007JA012602>.
30. VLF waves from ground-based transmitters observed by the Van Allen Probes: Statistical model and effects on plasmaspheric electrons / Q. Ma [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2017. — July. — Vol. 44, no. 13. — P. 6483—6491. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/2017GL073885>.
31. Precipitation signatures of ground-based VLF transmitters / P. Kulkarni [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2008. — July. — Vol. 113, A7. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2007JA012569>.
32. Cyclotron acceleration of radiation belt electrons by whistlers / V. Y. Trakhtengerts [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2003. — Mar. — Vol. 108, A3. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2002JA009559>.
33. *Smith, R. L.* Magnetospheric properties deduced from OGO 1 observations of ducted and nonducted whistlers / R. L. Smith, J. J. Angerami // Journal of Geophysical Research. — 1968. — Jan. — Vol. 73, no. 1. — P. 1—20. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA073i001p00001>.
34. *Shklyar, D. R.* Characteristic properties of Nu whistlers as inferred from observations and numerical modelling / D. R. Shklyar, J. Chum, F. Jiříček // Annales Geophysicae. — 2004. — Nov. — Vol. 22, no. 10. — P. 3589—3606. — URL: <http://dx.doi.org/10.5194/angeo-22-3589-2004>.
35. *Беспалов, П.* Альфвеновские мазеры / П. Беспалов, В. Трахтенгерц. — Горький : ИПФ АН СССР, 1986. — С. 190.
36. *Демехов, А. Г.* О генерации ОНЧ излучений с повышающейся и понижающейся частотой в магнитосферном циклотронном мазере в режиме лампы обратной волны / А. Г. Демехов // Известия вузов. Радиофизика. — 2010. — Т. 53, № 11. — С. 679—694.
37. Statistics of whistler mode waves in the outer radiation belt: Cluster STAFF-SA measurements / O. Agapitov [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2013. — June. — Vol. 118, no. 6. — P. 3407—3420. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/jgra.50312>.
38. *Omura, Y.* Relativistic turning acceleration of resonant electrons by coherent whistler mode waves in a dipole magnetic field / Y. Omura, N. Furuya, D. Summers // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 2007. — June. — Vol. 112, A6. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/2006JA012243>.

39. *Summers, D.* Pitch-angle scattering rates in planetary magnetospheres / D. Summers, R. L. Mace, M. A. Hellberg // Journal of Plasma Physics. — 2005. — May. — Vol. 71, no. 3. — P. 237—250. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022377804003186>.
40. *Lyons, L. R.* Pitch-angle diffusion of radiation belt electrons within the plasmasphere / L. R. Lyons, R. M. Thorne, C. F. Kennel // Journal of Geophysical Research. — 1972. — July. — Vol. 77, no. 19. — P. 3455—3474. — URL: <http://dx.doi.org/10.1029/JA077i019p03455>.
41. Modeling inward diffusion and slow decay of energetic electrons in the Earth's outer radiation belt / Q. Ma [et al.] // Geophysical Research Letters. — 2015. — Feb. — Vol. 42, no. 4. — P. 987—995. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL062977>.
42. Correlated whistler and electron plasma oscillation bursts detected on ISEE-3 / C. F. Kennel [et al.] // Geophysical Research Letters. — 1980. — Vol. 7, no. 2. — P. 129—132.
43. Parametric instabilities of Langmuir waves observed by Freja / K. Stasiewicz [et al.] // Journal of Geophysical Research: Space Physics. — 1996. — Vol. 101, A10. — P. 21515—21525.
44. Modulated electron plasma waves observed in the tail lobe: Geotail waveform observations / H. Kojima [et al.] // Geophysical Research Letters. — 1997. — Vol. 24, no. 23. — P. 3049—3052.
45. *Fijalkow, E.* A numerical solution to the Vlasov equation / E. Fijalkow // Computer Physics Communications. — 1999. — Feb. — Vol. 116, no. 2/3. — P. 319—328. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(98\)00146-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(98)00146-5).
46. *Umeda, T.* Vlasov simulation of Langmuir wave packets / T. Umeda // Nonlinear Processes in Geophysics. — 2007. — Oct. — Vol. 14, no. 5. — P. 671—679. — URL: <http://dx.doi.org/10.5194/npg-14-671-2007>.
47. *Karpman, V.* Effects of Nonlinear Interaction of Monochromatic Waves with Resonant Particles in the Inhomogeneous Plasma / V. Karpman, J. Istomin, D. Shklyar // Physica Scripta. — 1975. — May. — Vol. 11, no. 5. — P. 278—284. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/11/5/008>.

Лужковский Артемий Араратович

Самосогласованное описание нелинейного взаимодействия
квазимонохроматических волн с резонансными частицами в неоднородной
плазме

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____