На правах рукописи

ГОРЕЛЫШЕВ ИГОРЬ ВИКТОРОВИЧ

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С УПРУГИМИ ОТРАЖЕНИЯМИ

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена в Институте космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН).

Научный руководитель: д.ф.-м.н. А.И. Нейштадт

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., профессор А.В. Тимофеев

д.ф.-м.н., профессор А.И. Шафаревич

Ведущая организация: Институт проблем механики РАН

Защита состоится 11 ноября 2008 г. в _____ часов на заседании Диссертационного Совета Д 002.113.03 ИКИ РАН по адресу: г. Москва, 117997, ул. Профсоюзная 84/32, 2-й подъезд, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН.
Автореферат разослан “___” _______________ 2008 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Т. М. Буринская

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

В современной теоретической физике часто встречаются системы, отличающиеся от интегрируемых малым возмущением. В качестве возмущения может выступать зависимость системы от медленно изменяющегося со временем параметра или зависимость системы от медленно меняющихся фазовых переменных. Примерами подобных систем являются системы, описывающие движение заряженных частиц в медленно меняющихся магнитных полях [1,2], распространение лучей в плавно нерегулярных волноводах [3], некоторые задачи небесной механики [4,5], возмущенное вращение твердого тела вокруг неподвижной точки [6]. Во всех этих задачах имеет место разделение движений на быстрые и медленные. Для исследования подобных систем и предназначена адиабатическая теория возмущений. Разработка методов этой теории является актуальной и важной задачей.

В основе адиабатической теории возмущений лежит наличие в системе приближенного интеграла движения, адиабатического инварианта (см. [7,8]). Понятие «адиабатический инвариант» было введено еще П. Эренфестом [9]. Однако в современном виде эта теория сформировалась совсем недавно. Методы адиабатической теории возмущений для гладких систем описаны в [10,11]. Существует важный класс систем, в которых, несмотря на отсутствие свойства гладкости, динамика может быть описана гамильтоновой системой. Это системы с упругими отражениями. Методы адиабатической теории возмущений, разработанные для гладких систем, не могут быть непосредственно применены к системам с упругими отражениями. Целью настоящей диссертации является обобщение методов адиабатической теории возмущений на системы с упругими отражениями.

Дать абстрактное определение системы с упругими отражениями и проводить исследование такой общей задачи представляется затруднительным. Поэтому был выбран другой подход: построить схему теории возмущений на примере нескольких модельных задач. Данные задачи являются важными модельными задачами в теоретической физике и имеют самостоятельный интерес.

Первая модельная задача – это хорошо известная модель Ферми – Улама. В этой модели рассматривается одномерное движение частицы между упруго отражающими стенками, которые медленно меняют свое положение. Данная модель была предложена С. Уламом [12] как попытка описать механизм ускорения заряженных частиц в космических лучах, предложенный Э. Ферми [13]. Предполагалось, что в рамках этой модели можно получить неограниченное ускорение частицы, что, в свою очередь, объясняло бы ускорение частиц в космических лучах. Однако достаточно быстро было обнаружено, что при регулярном движении стенок неограниченное ускорение частицы не имеет места (см., например, [14]). Попытки получить неограниченное ускорение в этой модели продолжаются и в настоящее время, именно, подбираются специальные режимы быстрого (случайного) движения стенок. В исходной модели движение стенок предполагалось регулярным. В диссертации показано, что формальная схема адиабатической теории возмущений может быть применена к данной системе с упругими отражениями, даны оценки точности; рассмотрены эффекты, возникающие при переходе от гладкого режима движения частицы к режиму движения с соударениями частицы со стенкой в случае, когда на частицу действует внешнее потенциальное силовое поле.

Вторая модельная задача – это задача об исследовании трассы луча в плоском плавно нерегулярном волноводе. Волноводы встречаются как в технике, так в и природе [3,14,15,16].

Например, оптоволоконные световоды, приповерхностные звуковые каналы в океане и атмосферные волноводы радиоизлучения. В модельной же задаче рассматривается плоский плавно нерегулярный волновод [16]. Плавная нерегулярность означает, что расстояние между стенками и показатель преломления среды внутри волновода могут медленно меняться вдоль оси волновода. Изменение характеристик волновода может приводить, например, к изменению направления распространения лучей в волноводе, размытию исходного сигнала, к размножению мод. Адиабатическая теория возмущений позволяет с высокой точностью описывать трассу луча и, следовательно, возникающие физические эффекты.

Третья задача – это важная модельная задача статистической физики, задача об адиабатическом поршне [17]. В этой задаче рассматривается заполненный идеальным газом сосуд, разделенный на две части массивной перегородкой. Эта перегородка (поршень) может свободно (без трения) двигаться под действием легких частиц газа, упруго с ней соударяющихся. Задача состоит в описании движения поршня. Рассматриваемая система является замкнутой, в ней сохраняется энергия и вопрос о том, затухают ли колебания поршня, остается в настоящее время открытым. Адиабатическая теория возмущений позволяет с высокой точностью описывать динамику в данной системе. Это дает надежду на то, что именно методами теории возмущений данную задачу удастся решить. Данной задаче посвящено много работ (см., например, [18–24]). Модель адиабатического поршня рассмотрена в настоящей диссертации, так как она является естественным объектом для построения теории возмущений.

Четвертая задача – это задача об одномерном движении легкой частицы между стенкой и тяжелой частицей [25]. Отражения в этой задаче, как и в предыдущих задачах, считаются упругими. Данная задача отличается от предыдущих тем, что при удалении тяжелой частицы от стенки движение легкой частицы становится инфинитным. Этот факт, однако, не мешает построению адиабатической теории возмущений в данной задаче. Данная задача рассмотрена в диссертации с целью демонстрации эффективности подхода к описанию систем с упругими отражениями, основанного на адиабатической теории возмущений.

Основные цели работы

При исследовании модели Ферми – Улама и соответствующей обобщенной модели основными целями являются:

- Построение процедуры адиабатической теории возмущений;
- Исследование динамики в модели Ферми – Улама на больших интервалах времени;
- Исследование динамики в обобщенной модели Ферми – Улама, когда на частицу, колеблющуюся между стенками, действует потенциальное силовое поле;
- Исследование явлений, связанных со сменой режима движения частицы в этой задаче;

- Вывод асимптотической формулы, описывающей изменение адиабатического инварианта при смене режима движения частицы.

При исследовании задачи о плавно нерегулярном волноводе основными целями являются:

- Исследование применимости методов адиабатической теории возмущений для описания динамики в этой задаче;

- Исследование поведения трассы луча в плоском плавно нерегулярном волноводе, не заполненном средой;

- Исследование эффектов, связанных с изменением режима распространения лучей в плавно нерегулярных волноводах с комбинированным механизмом удержания лучей;

- Вывод асимптотической формулы для значения скачка адиабатического инварианта при смене режима распространения луча.

При исследовании задачи об адиабатическом поршне основными целями являются:

- Описание динамики в данной задаче методами адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями;

- Получение оценки точности главного приближения теории возмущений в этой задаче.

При исследовании задачи об одномерном движении легкой частицы между стенкой и тяжелой частицей основной целью является:

- Описание динамики в данной задаче методами адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями.

Научная новизна работы

Адиабатическая теория возмущений (АТВ) (см., например, [11], с. 260 -- 286) используется для приближенного описания динамики гладких гамильтоновых систем, содержащих быстрые и медленные переменные. Имеются оценки точности приближений, доставляемых этой теорией. Формально процедуру АТВ можно использовать в ряде случаев и для систем с разрывным гамильтонианом, в частности, для систем с упругими отражениями. Однако справедливость такого формального подхода не следует из имеющихся результатов о точности АТВ для гладких систем. Особенность рассматриваемых задач состоит в том, что при отражении «медленные» переменные меняются быстро (мгновенно).

Первое приближение процедуры АТВ приводит к выводу о наличии у системы адиабатического инварианта (приближенного интеграла). Этот вывод многократно использовался и для систем с отражениями, но его справедливость приходилось проверять непосредственными вычислениями (ср. [10], с. 236). Высшие приближения процедуры АТВ для систем с отражениями рассматривались формально ранее [26]. Теория возмущений для негладких гамильтоновых систем рассматривалась только в случае, когда фазовые переменные непрерывны [27,28]. В системах с отражениями некоторые из фазовых переменных терпят разрыв при отражении.

В системах с отражениями для достижения результатов, аналогичных получаемым для гладких систем с помощью высших приближений АТВ, обычно рассматривалось отображение последования Пуанкаре. Оно может оказаться гладким; тогда либо к нему применяется процедура теории возмущений для гладких отображений (см., например, [29]), либо используется искусственный прием, состоящий в том, что это отображение представляется как отображение последования для некоторой вспомогательной гладкой гамильтоновой системы, и процедура теории возмущений применяется уже к этой вспомогательной системе [30].

При исследовании динамики систем с упругими отражениями также систематически использовался [31] следующий подход. Система с отражениями заменяется гладкой системой с большим отталкивающим потенциалом, действующим в тонком слое (толщина слоя $\delta << 1$, градиент потенциала $\sim 1/\delta$). Свойства системы с отражениями выводятся из свойств гладкой системы переходом к пределу при $\delta \to 0$. Следуя этому подходу, можно было бы ввести такой потенциал в задаче Ферми–Улама (и в остальных задачах, рассматриваемых в диссертации), провести процедуру теории возмущений для гладкой системы и выводить оценки точности этой процедуры для системы с отражениями из соответствующих оценок для гладкой системы. Но при этом пришлось бы рассматривать вопрос о равномерности оценок по δ (см., например, [32]). Использованный в диссертации подход позволяет обойти этот вопрос.

Преимущество излагаемого в диссертации подхода состоит в том, что он позволяет работать непосредственно с гамильтонианом исходной системы, а не с соответствующим отображением последования (которое может оказаться и не гладким), позволяет рассматривать системы с отражениями единообразно с гладкими системами и приводит к более простым вычислениям.

В каждой из модельных задач, рассмотренных в диссертации, также получены новые результаты. В модели Ферми – Улама и задаче о плавно нерегулярном волноводе построена теория возмущений до любого наперед заданного порядка по малому параметру; рассмотрены новые эффекты, возникающие при введении в модель Ферми – Улама внешнего силового поля, действующего на частицу, а в задаче о плавно нерегулярном волноводе – преломляющей среды внутри волновода. Явления, возникающие при этом, во многом аналогичны явлениям, вызываемым переходом через сепаратрису в гладких гамильтоновых системах [33–35]. Именно, может происходить существенное изменение адиабатического инварианта. В диссертации получены асимптотические формулы для описания этого изменения. В задаче об адиабатическом поршне получена оценка точности, с которой движение поршня описывается усредненной системой. В задаче об одномерном движении легкой частицы между стенкой и тяжелой частицей методами адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями дано описание динамики.

Научное и практическое значение работы

Результаты работы изложены в трех главах диссертации. Результаты, изложенные в первой главе диссертации, могут быть использованы при исследовании различных систем с упругими отражениями таких, например, как плавно нерегулярные волноводы и биллиарды, а также при исследовании такой важной модельной задачи статистической физики, как задача об адиабатическом поршне. Результаты, полученные во второй главе, могут быть применены для исследования вопроса о возникновении динамического хаоса из-за плавного регулярного изменения параметров систем с упругими отражениями. Результаты третьей главы диссертации могут быть применены для анализа размытия выходного сигнала в волноводах, а также дают оценки числа мод в сигнале на выходе из волновода по сравнению с входящим сигналом.

Объем и структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Объем диссертации – 106 страниц. Диссертация содержит 12 рисунков и 55 наименований в списке цитируемой литературы.

Апробация работы

Основные результаты работы опубликованы, они докладывались и обсуждались на Курчатовской конференции молодых ученых (Москва, 2005), конференциях молодых ученых, посвященных дню космонавтики, ИКИ РАН (Москва, 2005 – 2006), XIII научной школе "Нелинейные волны - 2006", конференции молодых ученых (Нижний Новгород, 2006), научных семинарах МГУ им. М.В. Ломоносова и «Курчатовского института», докладах в университетах г. Милан и г. Падуя, Италия.

2 Содержание работы

В первой главе на примере трех модельных задач дается доказательство применимости формальной схемы адиабатической теории возмущений для систем с ударами и отражениями. Для каждой из задач доказывается справедливость метода теории возмущений и проводится исследование динамики системы на больших интервалах времени.

Модель Ферми -- Улама. В этой модели рассматривается одномерное свободное движение частицы между движущимися отражающими стенками. Обозначим координату частицы x, а скорость v. Движение стенок предполагается медленным по сравнению со скоростью частицы. Отношение характерной скорости движения стенок к скорости частицы дает малый параметр $\varepsilon \ll 1$. Расстояние между стенками d считается гладкой функцией медленного времени $d = d(\varepsilon t)$, ограниченной вместе со своими производными на большом интервале времени t. Эта модель является естественным объектом для построения теории возмущений.

Для применения адиабатической теории возмущений проводится переход в системе с $d=const$ от исходных переменных (x,v) к переменным «действие – угол» (I,ϕ). Действие I – это площадь, ограниченная фазовой траекторией, деленная на 2π: $I = |v|d/\pi = (2E)^{1/2}d/\pi$, где E – гамильтониан частицы, так что $E=\pi^2 I^2/(2d^2)$. Угол (фаза) ϕ – это равномерно меняющаяся со временем угловая переменная на траектории; $\phi=2\pi t/T$, где t – время движения от начального положения частицы до данного, а Т – период. Если начало отсчета фазы выбрано на левой стенке, то после замены переменных гамильтониан задачи с изменяющимся расстоянием между стенками приводится к виду:

$$H = \frac{\pi^2 I^2}{2d^2} - \frac{I\dot{d}}{d} f(\phi), \qquad f(\phi) = \begin{cases} \phi, & \phi \in (0,\pi), \\ \phi - 2\pi, & \phi \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Гамильтониан в новых переменных оказывается разрывной функцией фазы ϕ. Данный гамильтониан определяет движение частицы между соударениями в новых переменных. Остается получить условие сшивки решений при отражении частицы от стенок. При соударении с неподвижной стенкой значение переменной «действие» не изменяется.

При отражении от движущейся стенки изменение значения действия может быть вычислено исходя из формулы для изменения скорости частицы. В более же сложном случае, когда частица между соударениями движется в гладком силовом потенциальном поле, ответ дает принцип наименьшего действия. Оказывается, для того, чтобы вычислить изменение значения переменной «действие» $I_{(+)}- I_{(-)}$ при отражении от движущейся стенки, необходимо зафиксировать значение гамильтониана H при отражении, а значения фазы ϕ до и после отражения принять равными π-0 и π+0 соответственно.

Теперь можно построить ряд (замены переменных) теории возмущений и исключить зависимость гамильтониана от фазы вплоть до любого наперед заданного порядка малости ε^N по малому параметру ε. Если бы гамильтониан был гладкой функцией, то уже можно было бы утверждать, что значение переменной «действие» сохраняется на интервале времени $O(\varepsilon^{-N})$. Для того, чтобы получить подобный результат в нашем случае, воспользуемся условием сшивки – оно даст нам соответствующее условие сшивки в новых переменных. Именно, воспользуемся тем, что при канонической замене переменных с производящей функцией W, зависящей от времени t, гамильтониан задачи преобразуется как

$$H' = H + \partial W / \partial t,$$

где H' – новый гамильтониан задачи. Теперь можно перенести производную функции W в левую часть и получить условие сшивки в новых переменных. Это условие дает возможность получить оценки точности процедуры адиабатической теории возмущений в модели Ферми – Улама. Оказывается, что полученные оценки идентичны оценкам точности, получаемым в гладких системах.

Плоский плавно нерегулярный волновод. В приближении геометрической оптики трасса луча на плоскости описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = p_x^{\,2} + p_y^{\,2} - n^2(x,y),$$

где x,y – координаты на плоскости, $p_{x,y}$ – направляющие луча, а $n(x,y)$ – показатель преломления. Траектории данной гамильтоновой системы, лежащие на уровне $H=0$, определяют трассу луча. Для простоты будем считать, что нижняя стенка волновода совпадает с осью x. Плавная нерегулярность означает, что расстояние между стенками и показатель преломления среды внутри волновода могут медленно меняться вдоль оси волновода, в частности $n = n(\varepsilon x,y)$. Если бы вдоль оси волновода характеристики последнего оставались неизменными, то задача была бы интегрируемой, и можно было бы произвести замену переменных, отвечающих за движение поперек волновода *(y,p_y),* перейдя к переменным «действие – угол» *(I,ϕ)*. Эта замена переменных выполняется стандартным образом при помощи некоторой производящей функции. При помощи этой функции можно сделать замену переменных в исходной задаче от переменных (x,p_x,y,p_y) к переменным $(\hat{x}, \hat{p}_x, \phi, I)$. При этом гамильтониан задачи преобразуется к виду:

$$H = \frac{\pi^2 I^2}{d^2} + \left(\hat{p}_x - \varepsilon \frac{Id'}{d} f(\phi)\right)^2 - 1,$$

где $d = d(\varepsilon x)$ – положение верхней стенки волновода, а функция $f(\phi)$ имеет тот же вид, что и в модели Ферми – Улама. Оказывается условие (сшивки) на отражение луча от верхней стенки волновода в новых переменных примет вид: значение новой направляющей луча $\hat{p}_x$ сохраняет значение при отражении. Теперь можно построить ряд теории возмущений. Условия сшивки в новых переменных получаются из формул замены переменных. Эти условия дают возможность провести оценки точности процедуры адиабатической теории возмущений. Оказывается, что эти оценки аналогичны оценкам точности, получаемым в гладких системах.

Адиабатический поршень. Рассматривается заполненный идеальным газом сосуд, разделенный на две части массивной перегородкой. Эта перегородка (поршень) может свободно (без трения) двигаться под действием легких частиц газа, упруго с ней соударяющихся. Задача состоит в описании движения поршня. Массу каждой частицы будем считать равной единице. Массу поршня обозначим M. Малый параметр задачи $\varepsilon=(M)^{-1/2}$. Будем предполагать число частиц газа конечным. Полная энергия системы запишется как

$$E = \varepsilon^2 \frac{P^2}{2} + \frac{\sum_i (p_l^{\,i})^2}{2} + \frac{\sum_j (p_r^{\,j})^2}{2}$$

где p_l^i и p_r^j – импульсы частиц слева и справа от поршня, а P – импульс поршня. При фиксированном положении поршня для каждой частицы можно ввести переменные «действие – угол». В исходной задаче при такой замене переменных гамильтониан преобразуется к виду:

$$H=\varepsilon^2\frac{1}{2}\Big(\hat{P}-\frac{\sum_i I_l^{\,i} f(\phi_l^{\,i})}{X}+\frac{\sum_j I_r^{\,j} f(\phi_r^{\,j})}{X}\Big)^2+\frac{\pi^2}{2X^2}\sum_i (I_l^{\,i})^2+\frac{\pi^2}{2(L-X)^2}\sum_j (I_r^{\,j})^2$$

здесь I_l^i и I_r^j – «действия» частиц слева и справа от поршня, ϕ_l^i и ϕ_r^j – их фазы. Будем считать, что одновременное соударение двух частиц и поршня не происходит, так как множество соответствующих начальных условий имеет меру ноль. При упругом отражении частицы от поршня условие сшивки состоит в том, что новый импульс поршня $\hat{P}$ сохраняет свое значение. Первый шаг теории возмущений, как известно, состоит в усреднении гамильтониана по быстрым фазам и пренебрежении членами $O(\varepsilon)$ в полученном гамильтониане. Это приводит в главном приближении к следующему эффективному гамильтониану

$$H = \varepsilon^2 \frac{P^2}{2} + \frac{\pi^2}{2X^2}\sum_i (I_l^{\,i})^2 + \frac{\pi^2}{2(L-X)^2}\sum_j (I_r^{\,j})^2$$

Здесь I_l^i и I_r^j – постоянные, равные значениям I_l^i и I_r^j в начальный момент времени. Итак, в главном приближении поршень совершает колебания в гладком потенциале. Этот результат справедлив на интервале времени $O(\varepsilon^{-1})$. Точность описания движения поршня посредством эффективного гамильтониана составляет $O(\varepsilon)$.

Кроме описанных выше задач в первой главе рассматривается еще одна динамическая система. Рассматривается одномерное движение легкой частицы между стенкой и тяжелой частицей [25]. Соударения в системе считаются упругими. Принципиальное отличие этой задачи от предыдущих состоит в том, что тяжелая частица уходит на бесконечность. Однако и в такой системе возможно аналитическое описание динамики методами адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями. Примечательна простая формула для полного числа соударений в рассматриваемой задаче при условии, что в начальный момент времени легкая частица покоится, а тяжелая налетает на нее со скоростью, отделенной от нуля положительной постоянной: оно оказывается с высокой точностью равным отношению числа π и малого параметра.

Во второй и третьей главах диссертации адиабатическая теория возмущений используется для описания динамики в системах, в которых возможны различные режимы движения: на фазовом портрете невозмущенной системы существуют области движения без соударений (отражений) и области движения с соударениями. В каждом из режимов движения динамика системы с высокой точностью описывается адиабатической теорией возмущений. Задача состоит в изучении переходов от одного режима движения к другому. Явления, возникающие при таком переходе, аналогичны явлениям, возникающим в системах с переходами через сепаратрису [33,34,35]. В задачах с переходом через сепаратрису благодаря квазислучайному изменению адиабатического инварианта при каждом переходе возможна хаотизация движения [36]. Хаотичное движение в свою очередь приводит к важным физическим эффектам, таким, например, как перемешивание [14]. Поэтому аналитическое исследование подобного рода задач является важным. Детальное аналитическое исследование эффектов, связанных со сменой режимов движения, проводится впервые. Результаты, полученные во второй и третей главах диссертации, являются новыми результатами в нелинейной динамике.

Во второй главе диссертации рассмотрена обобщенная модель Ферми – Улама. В этой модели рассматривается движение частицы между упруго отражающими стенками во внешнем потенциальном поле, действующем на частицу. Системы подобного рода [37,38], как и оригинальная модель Ферми – Улама, рассматривались в попытках получить неограниченное ускорение частицы. Как правило, эти исследования представляют собой подбор специального режима движения стенок, при котором частица в ходе движения может сильно ускоряться. В настоящей диссертации подобные исследования не проводятся, а рассматривается задача общего вида с регулярным движением стенок и регулярным изменением потенциала поля со временем. На основании методов, разработанных в первой главе, можно утверждать, что в каждом режиме движения частицы (с соударениями или без) в системе существует приближенный интеграл движения (адиабатический инвариант). Оказывается, что при смене режима движения значение адиабатического инварианта может изменяться. Причиной служит тот факт, что формулы замены переменных, приближенно интегрирующей задачу в каждом из режимов движения, имеют особенность в области фазового пространства, где происходит смена режима движения. Чтобы описать динамику системы на больших временах, необходимо найти изменение адиабатического инварианта при смене режима движения. Оказывается, что изменение адиабатического инварианта мало по сравнению с колебаниями его значения, и наблюдать эффект удобно при помощи улучшенного адиабатического инварианта. Улучшенный адиабатический инвариант J связан с адиабатическим инвариантом I стандартным в теории возмущений соотношением $J = I + \varepsilon u$. Функция замены переменных $u(\cdot)$ определяется стандартным образом как функция, исключающая в гамильтониане зависимость от фазы из членов порядка ε. Во второй главе диссертации выведена асимптотическая формула, описывающая изменение улучшенного адиабатического инварианта ΔJ при смене режима движения:

$$\Delta J = A(\varepsilon\theta)^{3/2} f(\xi).$$

Здесь A и $\theta -$ некоторые постоянные, вычисляемые в момент перехода через сепаратрису. Для функции $f(\xi)$ имеется явная формула:

$$f(\xi) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-3/2} \Big(\frac{1}{2} - \xi + \frac{1}{t} - \frac{e^{-\xi \cdot t}}{1 - e^{-t}}\Big) dt.$$

Величина ξ лежит на интервале (0,1) и пропорциональна кинетической энергии частицы при первом соударении со стенкой, деленной на ε. Значение ξ очень чувствительно к выбору начальных условий и имеет смысл считать ξ случайной величиной с равномерным распределением.

В третьей главе рассмотрена задача о смене режима распространения лучей в плавно нерегулярных волноводах с комбинированным механизмом удержания лучей (например, приповерхностный волновой канал в океане) [3]. Исследуется распространение лучей в плоском плавно нерегулярном волноводе, заполненном преломляющей средой. Лучи в волноводе могут отражаться от стенок волновода, а могут и распространяться без отражений, преломляясь средой внутри волновода. В этой задаче будут иметь место эффекты, аналогичные описанным выше для обобщенной модели Ферми – Улама. Физические следствия изменения адиабатического инварианта при смене режима распространения лучей более очевидны, чем в модели Ферми – Улама. Может, например, происходить размытие сигнала и изменение его модового состава. Эффекты, связанные со сменой режима распространения лучей, аналогичны эффектам, возникающим в задачах с переходом через сепаратрису в гамильтоновых системах с быстрыми и медленными движениями [39]. Роль сепаратрисы выполняет режим распространения, когда луч касается стенки. Как и в предыдущей главе, в этой задаче выведена асимптотическая формула для изменения улучшенного адиабатического инварианта ΔJ. Кроме того получена оценка точности асимптотической формулы.

Основные результаты и выводы

1. На примере нескольких важных модельных задач теоретической физики проведено обобщение методов адиабатической теории возмущений на системы с упругими отражениями.

2. В рассмотренных в диссертации задачах построены ряды теории возмущений и получены оценки точности, доставляемые адиабатической теорией возмущений.

3. Показано, что системы с упругими отражениями могут рассматриваться единообразно с гладкими системами

4. Исследованы эффекты, возникающие при смене режима движения: переход от гладкого движения к режиму с соударениями (отражениями). Именно, при смене режима движения происходит скачкообразное изменение адиабатического инварианта.

5. Получены асимптотические формулы для описания изменения адиабатического инварианта при смене режима движения (распространения) в обобщенной модели Ферми – Улама и задаче о плавно нерегулярном волноводе в приближении геометрической оптики.

Основные положения настоящей диссертации опубликованы в работах

1. Горелышев И.В., Нейштадт А.И. 2006 Об адиабатической теории возмущений для систем с упругими отражениями. *ПММ,* **70**:1, 6 – 19.

2. Gorelyshev I.V. 2006 On the full number of collisions in certain one-dimensional billiard problems. *Regular & Chaotic Dynamics,* **11**:1, 61 – 66.

3. Gorelyshev I.V., Neishtadt A.I. 2008 Jump in adiabatic invariant at a transition between modes of motion for systems with impacts. *Nonlinearity,* **21**, 661 – 676.

4. Горелышев И.В., Нейштадт А.И. 2008 О смене режима распространения лучей в плавно нерегулярном волноводе. *Мат. заметки*, **84**:3, 348 – 364.

Список литературы

[1] Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.

[2] Альфвен Х., Фельтхаммер К.Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967.

[3] Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.

[4] Wisdom J. 1982 The origin of the Kirkwood gaps: a mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. *Astron. J.*, **87**, 577 – 593.

[5] Wisdom J. 1983 Chaotic behaviour and the origin of the 3/1 Kirkwood gap. *Icarus*, **56**, 51 – 74.

[6] Benettin G., Fasso F., Guzzo M. 2006 Long term stability of proper rotations and local chaotic motions in the perturbed Euler rigid body. *Regul. Chaotic Dyn.*, **11**:1, 1 – 17.

[7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988.

[8] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике: Пер. с англ. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.

[9] Navarro L., Perez E. 2006 Paul Ehrenfest: The genesis of the adiabatic hypothesis. 1911 – 1914. *Arch. Hist. Exast Sci.* **60**, 209 – 267.

[10] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал, УРСС, 1999.

[11] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал, УРСС, 2002.

[12] Ulam S. 1961 On some statistical properties of dynamical systems. *In Proceedings of the 4th Berkley Symposium on Math., Stat. and Probability (University Press, Berkley, CA)* **3**, 315 – 320.

[13] Fermi E. 1949 On the origin of the cosmic radiation. *Phys. Rev.* **75**, 1169 – 1174.

[14] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

[15] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.

[16] Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974.

[17] Lieb E. 1999 Some problems in statistical mechanics that I would like to see solved. *Physica A.*, **263**:1 – 4, 491 – 499.

[18] Синай Я.Г. 1999 Динамика массивной частицы, окруженной конечным числом легких частиц. *Теорет. и мат. физика.*, **121**:1, 110 – 116.

[19] Neishtadt A.I., Sinai Ya.G. 2004 Adiabatic piston as a dynamical system. *J. Statist. Phys.*, **116**, 815 – 820.

[20] Чернов Н.И., Лебовиц Д.Л., Синай Я.Г. 2002 Динамика массивного поршня, погруженного в идеальный газ. *УМН*, **57**:6, 3 – 86.

[21] Chernov N. and Lebowitz J. L. 2002 Dynamics of a massive piston in an ideal gas: Oscillatory motion and approach to equilibrium. *J. Statist. Phys.*, **109**, 507 – 527.

[22] Gruber C. 1999 Thermodynamics of systems with internal adiabatic constraints: time evolution of the adiabatic piston. *European J. Phys.*, **20**, 259 – 266.

[23] Gruber C. and Frachebourg L. 1999 On the adiabatic properties of a stochastic adiabatic wall: Evolution, stationary non-equilibrium, and equilibrium states. *Phys. A*, **272**, 392 – 428.

[24] Gruber C. and Piasecki J. 1999 Stationary motion of the adiabatic piston. *Phys. A*, **268**, 412 – 423.

[25] Galperin G.A. 2003 Playing pool with π (the number π from a billiard point of view). *Regular & Chaotic Dynamics*, **8**:4, 375 – 394.

[26] Нейштадт А.И. 1982 Распространение лучей в плавно нерегулярных волноводах и теория возмущений гамильтоновых систем. *Изв. вузов. Радиофизика*, **25**:2, 218 – 226.

[27] Маркеев А.П. 1985 О движении твердого тела с идеальной неудерживающей связью. *ПММ*, **49**:5, 707 – 716.

[28] Маркеев А.П. 1989 О качественном анализе систем с идеальной неудерживающей связью. *ПММ*, **53**:6, 867 – 872.

[29] Zharnitsky V. 2000 Invariant tori in Hamiltonian systems with impacts. *Comm. Math. Phys.*, **211**:2, 289 – 302.

[30] Нейштадт А.И. 1984 О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой. *ПММ*, **48**:2, 197 – 204.

[31] Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ. 1991.

[32] Rapoport A., Rom-Kedar V., Turaev D. 2007 Approximating multi-dimensional Hamiltonian flows by billiards. *Comm. Math. Phys.*, **272**:3, 567 – 600.

[33] Тимофеев А.В. 1978 К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения. *ЖЭТФ*, **75**:4, 1303 – 1308.

[34] Cary J.R., Escande D.F., Tennyson J.L. 1986 Adiabatic invariant change due to separatrix crossing. *Phys. Rev. A*, **34:**5, 4256 – 4275.

[35] Нейштадт А.И. 1986 Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису. *Физика плазмы*, **12**:8, 992 – 1001.

[36] Neishtadt A.I. 1991 Probability phenomena due to separatrix crossing. *Chaos* **1**, 42 – 48.

[37] Leonel E.D. and McClintock P.V.E. 2005 A hybrid Fermi--Ulam-bouncer model. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 823 – 839.

[38] Kruger T., Pustyl'nikov L.D. and Troubetzkoy S.E. 1995 Acceleration of bouncing balls in external fields. *Nonlinearity* **8**, 397 – 410.

[39] Нейштадт А.И. 1987 Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису в системах с двумя степенями свободы. *ПММ*, **51**:5, 750 – 757.

Ротапринт ИКИ РАН
Москва, 117997, Профсоюзная, 84/32

Подписано к печати

Заказ 2150 Формат 70x108/32 Тираж 100 0,8 уч.-изд.л.