

Квантовые траектории в диссипативной динамике одинокного кубита

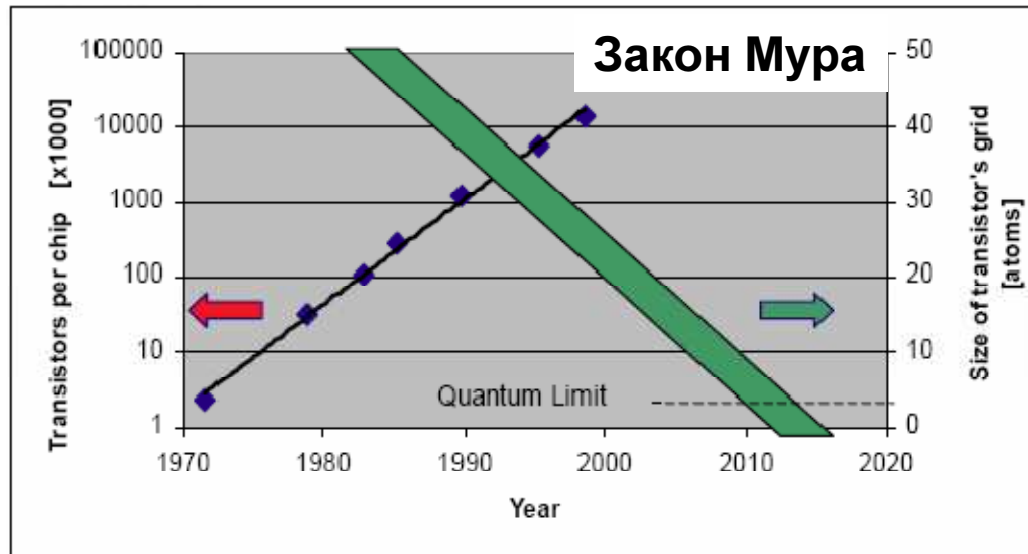
**Гельман Александр Иосифович,
нс 170 отд, ИПФ РАН, г. Н. Новгород**

Предмет исследования и актуальность темы

Квантовая оптика

Квантовая информация

Нанотехнологии



Квантовые эффекты становятся определяющими в работе современных высокотехнологичных устройств:

- ✓ Полупроводниковая техника
- ✓ Компьютеры (процессоры)
- ✓ Сверхпроводящие объекты
- ✓ Вся наноэлектроника

Сверхсовременное направление – квантовая информация

ROADMAP №1, Europe, www.europa.net, апрель 2010

ROADMAP №2, USA, www.ostp.gov, 2009, 2004

1. Квантовая криптография

Принципиально не дешифруемая передача данных, доведено до уровня готовых приборов; www.idquantique.com, www.magiqtech.com

2. Квантовый компьютер

Квантовые сверхскоростные вычисления, взлом существующих систем кодирования
Основной рабочий элемент – квантовый бит, кубит

Квантовая информация

A Quantum Information Science and Technology Roadmap

Part 1: Quantum Computation

Report of the
Quantum Information Science and Technology
Experts Panel

“... it seems that the laws of physics present no barrier to reducing the size of computers until bits are the size of atoms, and quantum behavior holds sway.”
Richard P. Feynman (1985)

Disclaimer:
The opinions expressed in this document are those of the Technology Experts Panel members and are subject to change. They should not be taken to indicate in any way an official position of U.S. Government sponsors of this research.

April 2, 2004
Version 2.0

Novelty and Innovation

To remain competitive Europe should nurture QIS technology innovation from fundamental research

Convergence

QIS research is expanding beyond its traditional boundaries as device complexity grows and many different physical QIS elements are integrated

There is a convergence of many information technologies towards QIS. Examples include, integrated photonics research both linear & nonlinear, quantum effects in nanotechnology & materials science, interfacing classical information systems with quantum-atomic systems, quantum solid-state systems, and quantum photonic-systems. Such emerging plurality of QIS is

QIPC
QUANTUM INFORMATION PROCESSING AND COMMUNICATION

Strategic report on current status, visions and goals for research in Europe

Version 1.5, February 2008

Version 1.7, April 2010

Roadmap Committee Members

Th. Beth [†] (Karlsruhe)	A. Imamoglu (ETH Zürich)	G. Rempe (MPQ Garching)
R. Blatt (Innsbruck)	A. Karlson [†] (EC Brussels)	A. Sergienko (Boston)
H. Briegel (Innsbruck)	J. Kempe (LRI Orsay)	D. Suter (Dortmund)
D. Bruss (Düsseldorf)	L. Kouwenhoven (TU Delft)	R. Thew (Geneva)
T. Calarco (Trento)	S. Kröll (Lund)	J. Twamley (Maynooth)
J.I. Cirac (MPQ Garching)	G. Leuchs (Erlangen)	G. Wendin (Göteborg)
D. Deutsch (Oxford)	M. Lewenstein (Barcelona)	R. Werner (Braunschweig)
J. Eisert (London & Potsdam)	D. Loss (Basel)	A. Winter (Bristol)
A. Ekert (Cambridge)	N. Lütkenhaus (Erlangen)	J. Wrachtrup (Stuttgart)
C. Fabre (Paris)	S. Massar (Brussels)	P. Zanardi (Torino)
N. Gisin (Geneva)	J. E. Mooij (TU Delft)	A. Zeilinger (Vienna)
P. Grangier (Orsay)	M. B. Plenio (London)	P. Zoller [*] (Innsbruck)
M. Grassl (Karlsruhe)	E. Polzik (Copenhagen)	
S. Harshbarger (ENS Paris)	S. Bravyi (Perth)	

Среднесрочные планы

	Quantum Computing	Quantum Communication
5 years goals	<p>Demonstrate:</p> <ul style="list-style-type: none">• Devices realizing quantum algorithms with up to 10 qubits• Fault tolerant computing and error correction on small scale systems• Distributed quantum algorithm• Different classes of entangled states up to 10 qubits• Quantum simulation of a system that cannot be simulated classically	<ul style="list-style-type: none">• Build a quantum repeater with two nodes• Entangle two remote quantum memories• Lab demonstration of Device Independent QKD
10 years goals	<ul style="list-style-type: none">• Large dimension quantum memory• Quantum algorithm with up to 50 qubits• Quantum simulation of a key problem in science• Quantum algorithm with fault tolerant error correction	<ul style="list-style-type: none">• Satellite quantum communication• 1000 km quantum cryptography• Multi-node quantum networks• Realization of new quantum protocols

Постановка задачи

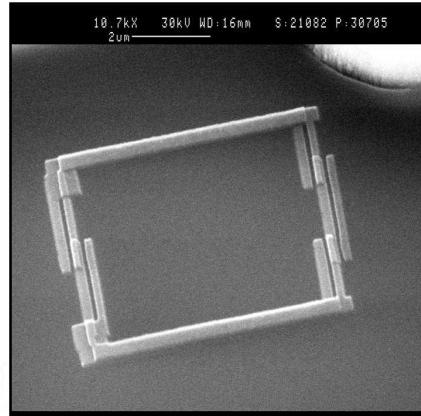
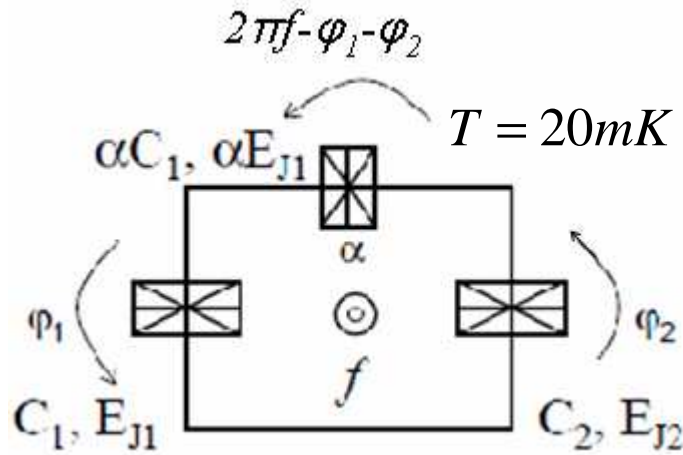
- ✓ Кубит является основным рабочим элементом квантового компьютера, физически реализуется в виде двухуровневой квантовой системы, например фотона, атома, донора в полупроводнике, ядерного спина, сверхпроводящего контура
- ✓ Важнейшей характеристикой кубита является время декогерентности
- ✓ Наиболее перспективные устройства для реализации квантового компьютера - кубиты на основе джозефсоновских переходов

M. Nakahara and T. Ohmi Quantum computing: from linear algebra to physical realizations. – London, 2008

Проблемы:

- **измерение скоростей релаксации кубита**
- **управление динамикой кубитов в сильном переменном поле**
- **измерения состояния кубита в условиях шума**

3JJ qubit: гамильтониан



J.E. Mooij, et.al, Science 285, 1036 (1999)

Yu. Makhlin, et.al., Rev. Mod.Phys. 73, 357 (2001)

$f(t) = f^{dc} + f^{ac}(t)$ – внешний магнитный поток

$$H_s = \frac{1}{2} (\varepsilon(t) \sigma_z + \Delta \sigma_x)$$

$$\varepsilon(t) = 2I_p (f - 0.5) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos \omega t$$

Δ – туннельное расщепление уровней

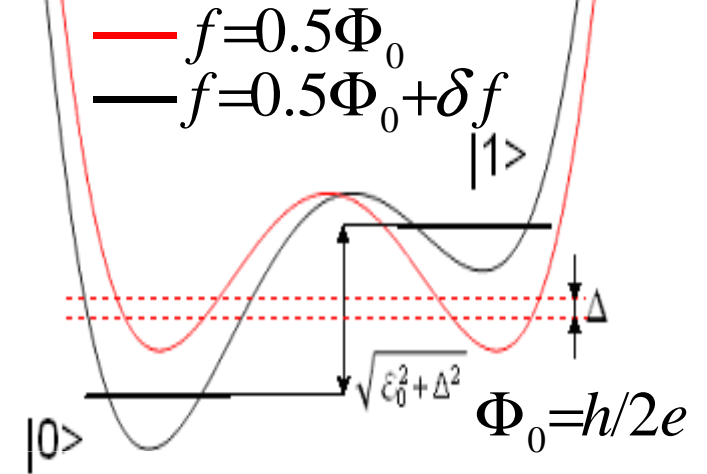
σ_z, σ_x – матрицы Паули

$$\varepsilon_0 \quad \Delta \quad |1\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$E_{1,0} = \pm \varepsilon_0 / 2 \quad |0\rangle = |\downarrow\rangle$$

Искусственный атом

W.D. Oliver, et.al., Quant inf Process 8, 261 (2009)



Данные состояния могут быть измерены, соответствуют току в кубите по- и против часовой стрелки

Шум в системе

Механизмы релаксации в кубите:

- Флуктуация заряда на джозефсоновских контактах
- Квазичастицы на островках сверхпроводимости (конечное сопротивление)
- Ядерные спины в подложке (флуктуация магнитного поля)
- Радиационное затухание, связь с управляющим полем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H_s, \rho] + \frac{1}{4} \Gamma (2\sigma_z \rho \sigma_z^+ - \rho \sigma_z^+ \sigma_z - \sigma_z^+ \sigma_z \rho)$$

$$\Gamma \gg \gamma$$

Флуктуация потока

*M.Sillanpaa, et al., PRL 96, 187002(2006), W.D.Oliver, et al., Science 310, 1653(2005),
D. M. Berns, et al., Nature 455, 51(2008)*

Метод Монте-Карло (квантовых траекторий)

1. C. W. Gardiner, P. Zoller. Quantum noise. – Berlin: Springer, 2000.
2. M. B. Plenio, P. L. Knight. Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70, №1. P. 101–143.
3. H.-P. Breuer, F. Petruccione. The theory of open quantum systems. – Cambridge: Oxford University Press, 2002.
4. А.И. Гельман, В.А. Миронов. Численное моделирование квантовой релаксации в многоуровневых атомных системах методом Монте-Карло: препринт №773; ИПФ РАН. – Н. Новгород, 2008. – 42 с

Квантовая теория релаксации: метод Монте-Карло

Общий вид уравнения для оператора плотности
в марковском приближении - форма Линдблада

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{sys}, \rho] + \sum_{j=1}^{N_c} \frac{1}{2} \gamma_j (2c_j \rho c_j^+ - \rho c_j^+ c_j - c_j^+ c_j \rho) = -\frac{i}{\hbar}(H_{eff} \rho - \rho H_{eff}^+) + \sum_{j=1}^{N_c} J_j \rho$$

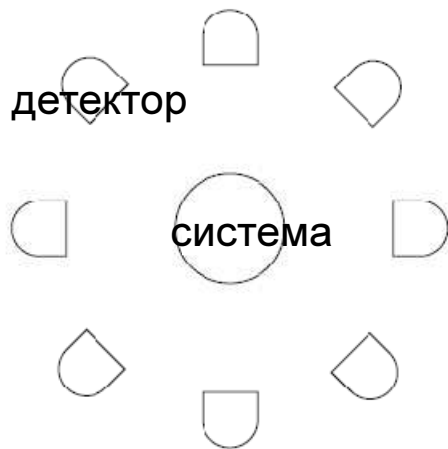
$$H_{eff} = H_{sys} - \frac{i}{2\hbar} \sum_{j=1}^{N_c} \gamma_j c_j^+ c_j$$

неэрмитов эффективный Гамильтониан N_c число скоростей релакс.
 $J_j \rho = \gamma_j c_j \rho c_j^+$ **оператор квантового скачка** c_j оператор системы, взаимодействующий с j резервуаром

Возможна следующая интерпретация

M. B. Plenio, P.L. Knight, Rev. Mod. Phys., 70(1), 101-143 (1998).

Динамика системы – в условиях эксперимента (**мысленного**)
по регистрации спонтанно испущенных системой фотонов



отсутствие
фотоотсчета

зарегистрирован
фотоотсчет

динамика под действием H_{eff}

квантовый скачок

Mollow, B.R., 1975, PRA 12, 1919 $\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}(H_{eff} \rho - \rho H_{eff}^+)$

$$\rho \rightarrow J_j \rho$$

Метод МК: алгоритм численного моделирования

Расчет ведется для волновой функции системы

Имеется волновая функция системы $\psi(t)$ в момент времени t

1. Вероятность излучения фотона $\Delta P(t) = \sum \Delta P_j(t) \ll 1$, $\Delta P_j(t) = \gamma_j \Delta t \langle \psi(t) | c_j^+ c_j | \psi(t) \rangle$
 $1 - \Delta P(t)^j$ – не излучился фотон

2. генерация **случайного** числа r , равномерно распределенного на отрезке $[0, 1]$

$r \in (\Delta P, 1]$ нет излучения
 $|\psi(t + \Delta t)\rangle = \frac{(1 - \frac{i}{\hbar} H_{eff} \Delta t) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{1 - \Delta P(t)}}$

$r \in [0, \Delta P]$ излучился фотон
 $|\psi(t + \Delta t)\rangle = |\phi_j\rangle = \frac{c_j |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\Delta P_j(t) / (\Delta t \gamma_j)}} \quad \Pi_j = \Delta P_j / \Delta P$

3. повтор шагов 1,2 для расчета эволюции за требуемое время – **квантовая траектория**

4. повтор шагов 1-3 n раз для получения статистического ансамбля квантовых траекторий – **усредненная динамика системы, соответствует уравнению для оператора плотности**

Доказательство эквивалентности

Имеется волновая функция системы $\psi(t)$ в момент времени t

$$\langle \rho(t + \Delta t) \rangle_r = (1 - \Delta P(t)) |\psi(t + \Delta t)\rangle \langle \psi(t + \Delta t)| + \sum_{j=1} \Delta P_j(t) |\phi_j\rangle \langle \phi_j| \quad \rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$$

$$\langle \rho(t + \Delta t) \rangle_r = \rho(t) - \frac{i\delta t}{\hbar} [H_{sys}, \rho] + \delta t \sum_{j=1}^{N_c} \frac{1}{2} \gamma_j (2c_j \rho c_j^+ - \rho c_j^+ c_j - c_j^+ c_j \rho)$$

Усредняем по n реализациям

Метод МК: преимущества

Расчет среднего

$$a(t) = \langle A \rangle(t) = \text{Tr}[\rho(t)A]$$

A, B - операторы системы



$$\langle A \rangle_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \psi^i(t) | A | \psi^i(t) \rangle$$

Расчет двухвременных корреляционных функций

$$C(t, \tau) = \langle A(t + \tau)B(t) \rangle$$

Квантовая теорема регрессии



K. Molmer, Y. Castin, J. Dalibard,
J. Opt. Soc. Am. B, 10, 524 (1993)

Расчет **единичных реализаций** процессов в квантовых системах
Расчет **диссипативной** динамики **одиночных** квантовых систем

Размерность системы ДУ для волновой функции N вместо N^2 для матрицы плотности

Простота и эффективность распараллеливания алгоритма

Расчет систем в **немарковском приближении**
W. T. Strunz et.al, Phys. Rev. Lett, 82, 1999

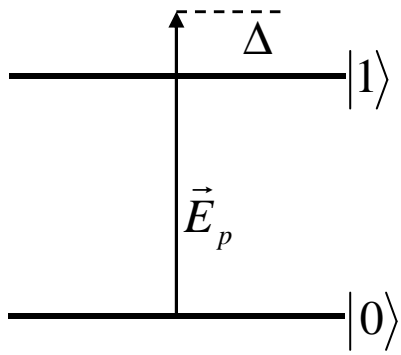
Точность

$$(\delta A)_{(n)}^2(t) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(\langle \psi^i(t) | A | \psi^i(t) \rangle - \langle A \rangle_n(t) \right)^2 \quad \delta A_{(n)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Статистически
независимые
реализации

Результаты тестирования

1. Двухуровневый атом под действием резонансного поля, в вакууме



$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{sys}, \rho] + \frac{\Gamma}{2}(2\sigma_{01}\rho\sigma_{10} - \sigma_{11}\rho - \rho\sigma_{11})$$

$$\Delta = \omega_p - \omega_{10}$$

$$H_{sys} = -\hbar\Delta\sigma_{11} + \hbar\Omega(\sigma_{01} + \sigma_{10})$$

$$\Omega = \frac{\mu_{01}E_p}{\hbar}$$

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad i, j = 0, 1$$

$$H_{eff} = \hbar(-\Delta - i\frac{\Gamma}{2})\sigma_{11} + \hbar\Omega(\sigma_{01} + \sigma_{10})$$

$$c_1 = \sigma_{01}$$

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H_{eff}|\psi(t)\rangle$$

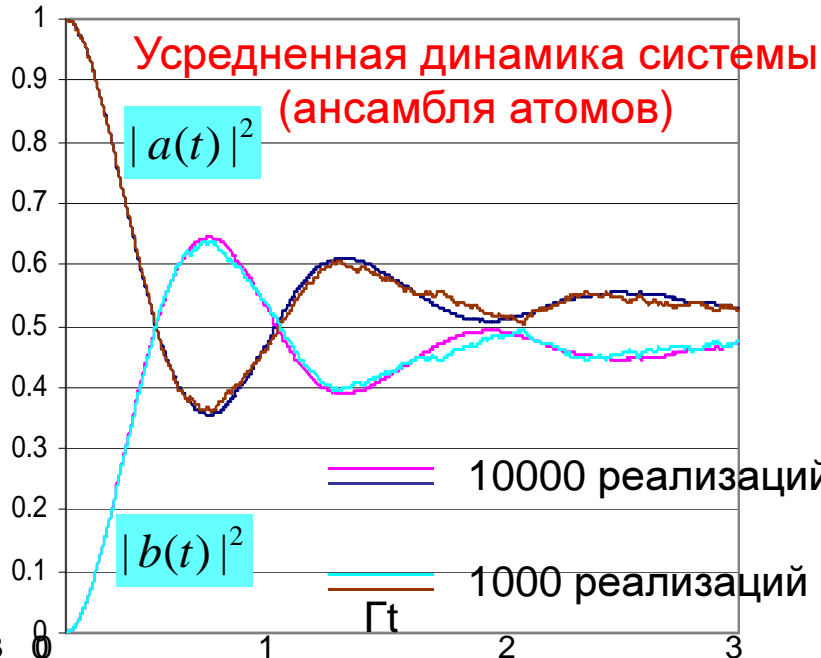
$$|\psi(t)\rangle = a(t)|0\rangle + b(t)|1\rangle$$

$$\dot{a}(t) = -i\Omega b(t)$$

$$\dot{b}(t) = -(\frac{\Gamma}{2} - i\Delta)b(t) - i\Omega a(t)$$

$$c_1|\psi(t)\rangle = b(t)|0\rangle$$

$$\Delta P_1(t) = \Gamma\Delta t |b(t)|^2$$



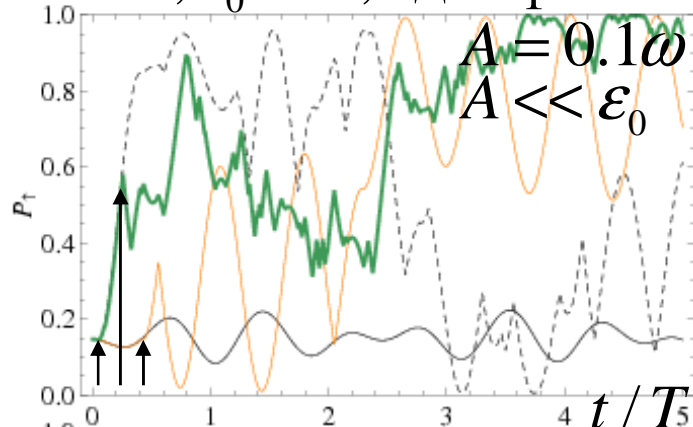
$$\Delta = 0$$

$$\Omega = \Gamma$$

3JJ qubit: квантовые траектории

$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = \omega$, однофотонный резонанс

$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = 30\omega, \varepsilon_0, A \gg \omega$



- $\Gamma = 0$
- $\Gamma = 0.09\omega$
- - - $\Gamma = 0.81\omega$
- $\Gamma = 4\omega$

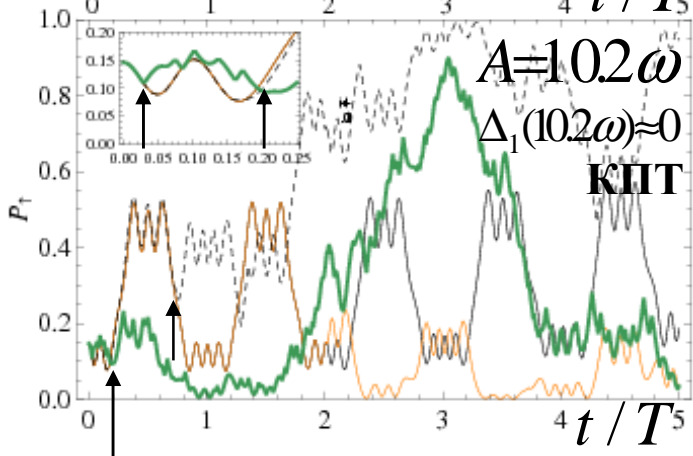
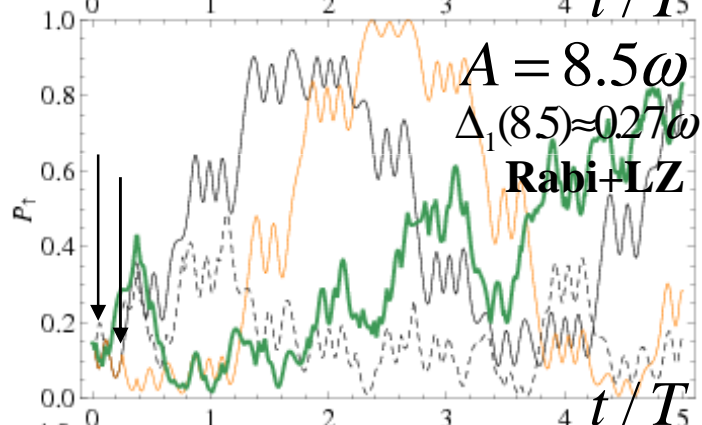
Эффективный гамильтониан в резонансном приближении

$$H'(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_n \\ \Delta_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \Delta J_n(A/\omega)$$

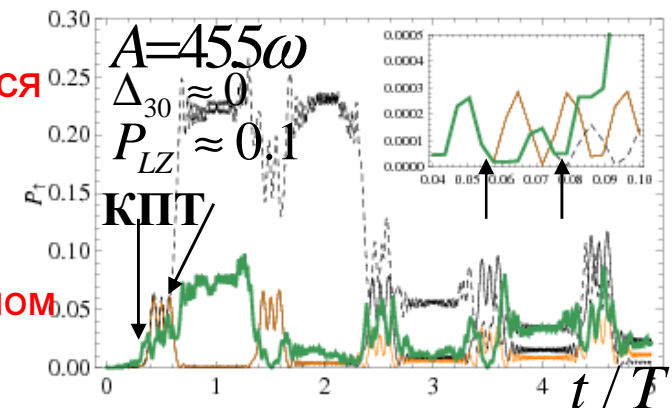
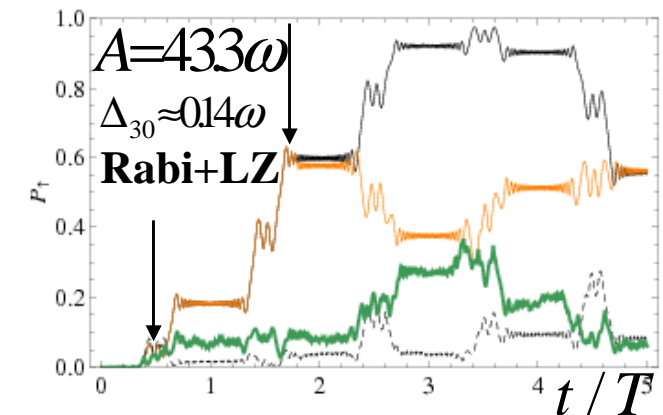
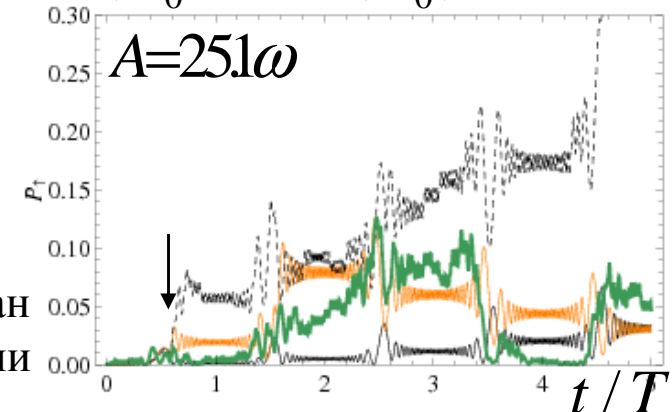
$$n\omega - \varepsilon_0 \approx 0$$

$$P_{LZ} = 1 - \exp(-2\pi\Delta^2 / \nu)$$



С увеличением Γ динамика существенно меняется.

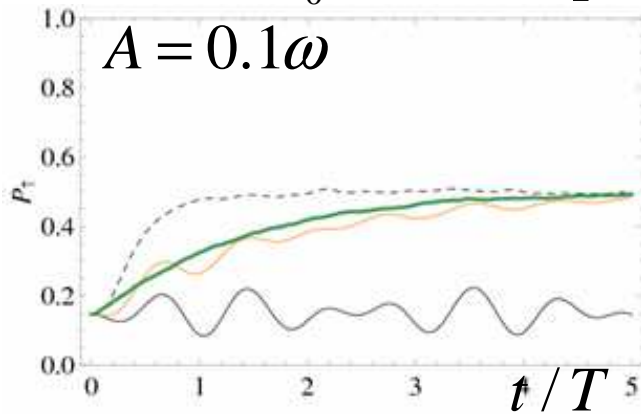
Кубит может возбуждаться на верхний уровень. Нет пленения на $\sim T/2$ (между пересечениями уровней). Даже при сильном поле влияние шума существенно



3JJ qubit: усредненная динамика

$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = \omega$, one-photon resonance

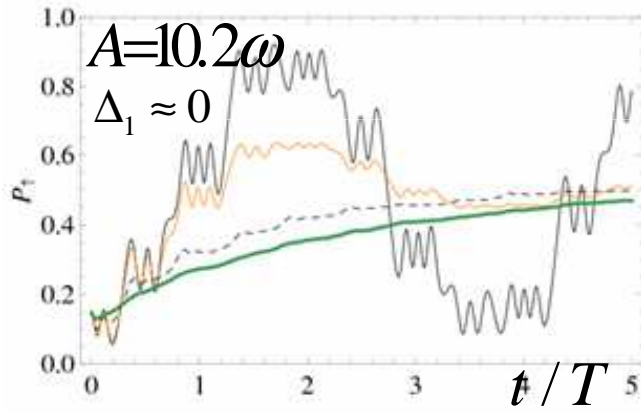
$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = 30\omega, \varepsilon_0, A \gg \omega$



После усреднения по 3000 реализация метода МК (соответствует условиям эксперимента) наблюдается классическая Раби - динамика

Видно отличие релаксационной динамики в одной реализации от усредненной динамики, когда наблюдается насыщение и выход населенности на стационарное значение

A. Gelman, A.M. Satanin, JETP lett. 91, 535-540 (2010)



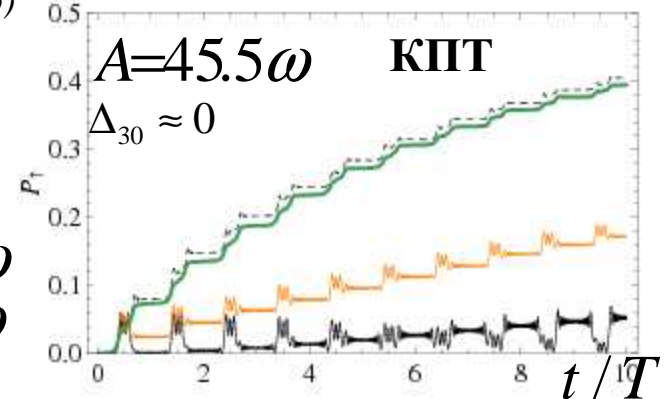
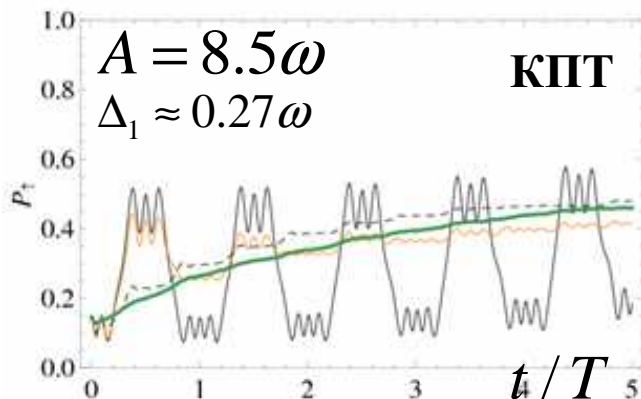
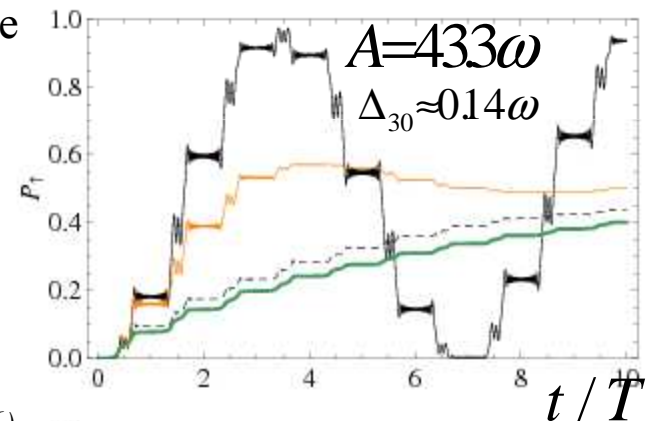
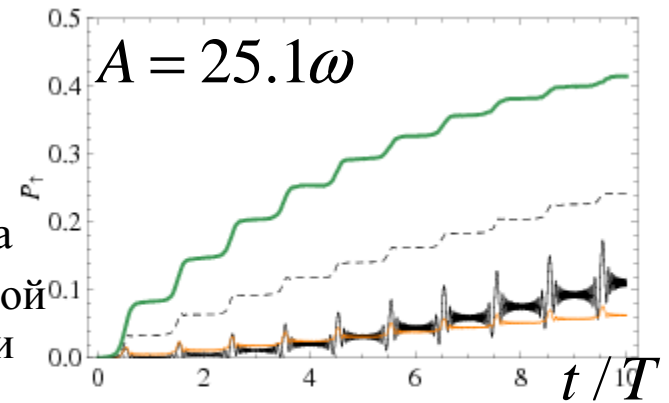
Совпадение с моделью и экспериментом:

D. M. Berns et al. PRL 97, 150502 (2006)

$$W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2}$$

$$t_{stat}^{-1} = 2W$$

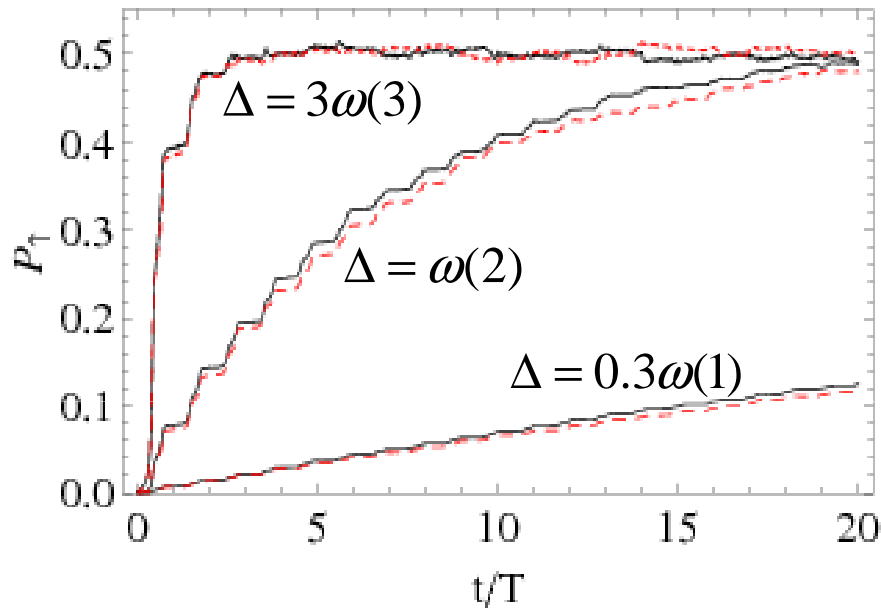
- $\Gamma = 0$
- $\Gamma = 0.09\omega$
- - - $\Gamma = 0.81\omega$
- $\Gamma = 4\omega$



3JJ qubit: усредненная динамика

При большом шуме $\Gamma = 4\omega$
 эффекты когерентности (КПТ) исчезают

Затухание поляризации на временах Γ^{-1}
 независимо от параметров поля



$\varepsilon_0 = 30\omega$

--- $A = 45.5\omega$ (CDT)
 — $A = 43.3\omega$ (Rabi)

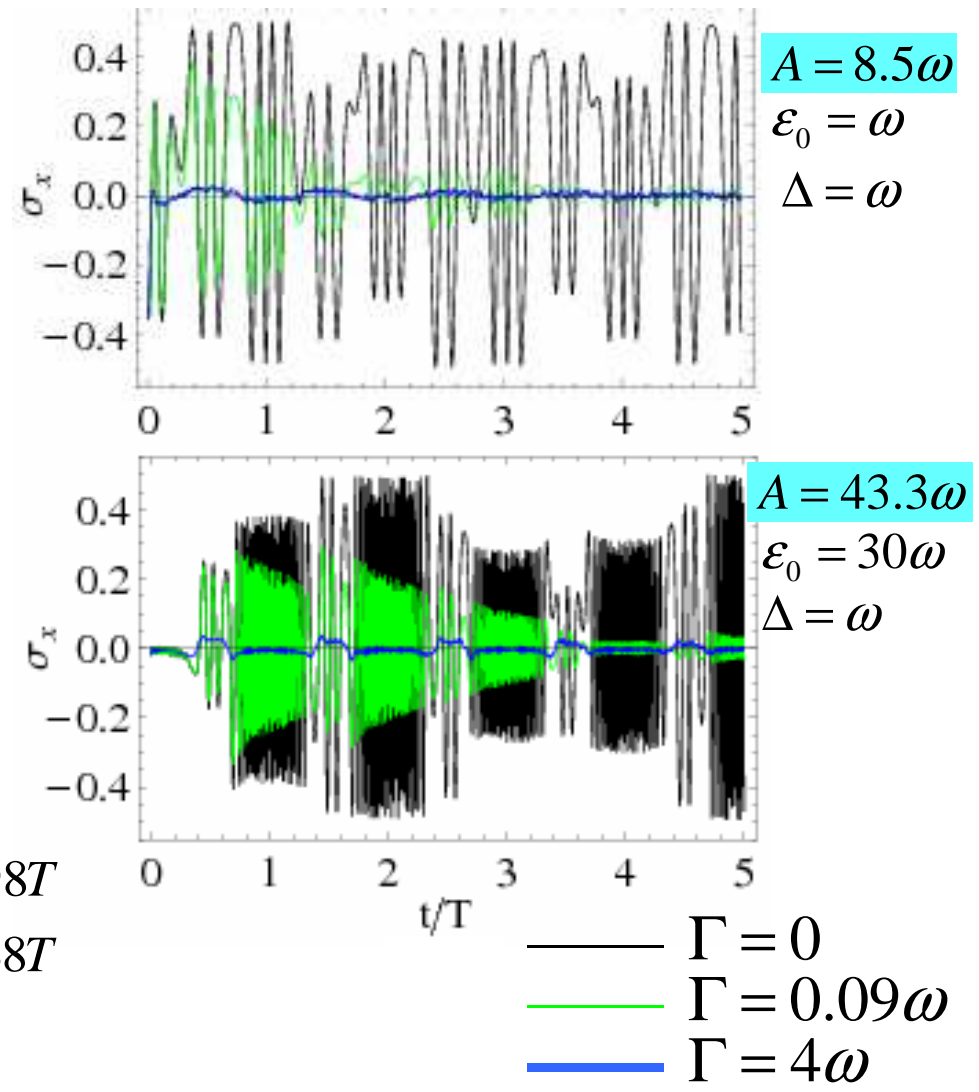
Перекрывание резонансов

$$W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2}$$

$\Delta = \omega$

$\tilde{\Gamma}^{-1}(30, 45.5) = 5.98T$
 $\tilde{\Gamma}^{-1}(30, 43.3) = 5.48T$

I. Kayanuma, Y. Phys. Rev B., 47, 9940 (1992)



Приложение к амплитудной спектроскопии

$$P_{\uparrow}(A, \varepsilon_0) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^2}{\Delta_n^2 + (\varepsilon_0 - n\omega)^2} \quad W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2}$$

$$\Delta_n = \Delta J_n(A/\omega)$$

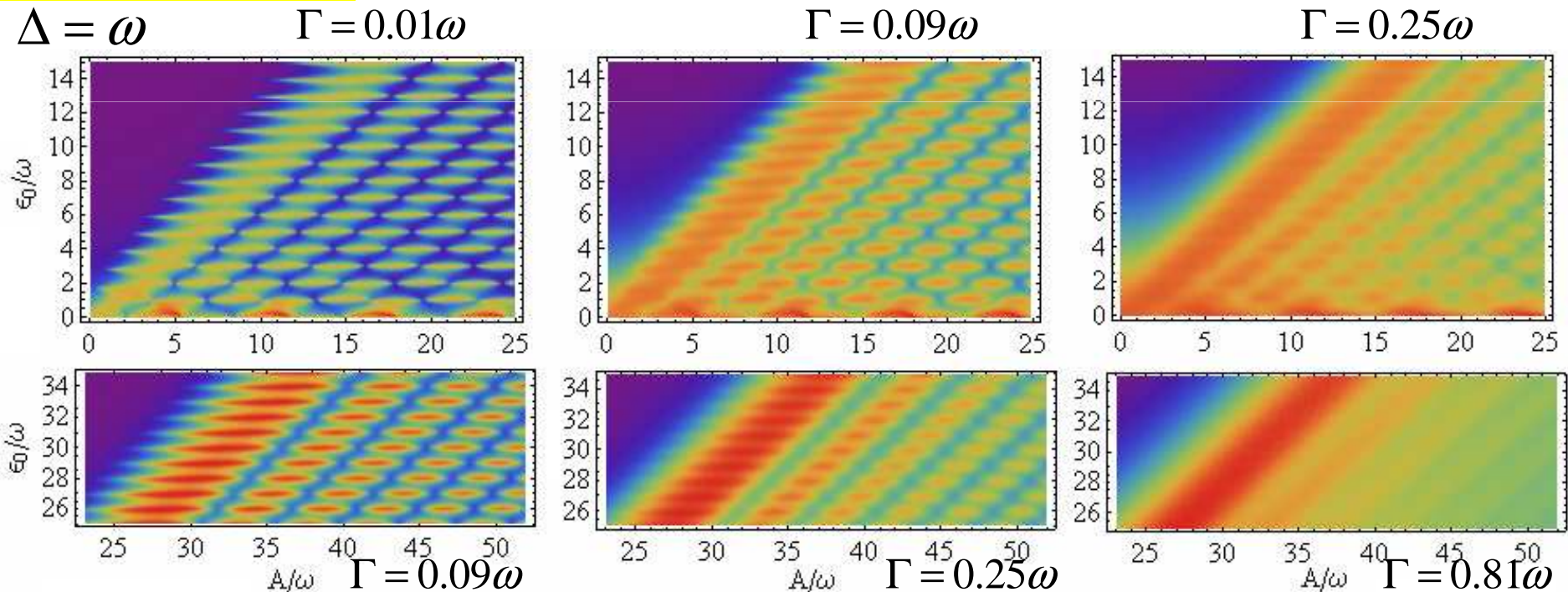
$$\delta\varepsilon = \Delta_n$$

$$\delta\varepsilon \approx \Gamma$$

Населенность верхнего уровня кубита после воздействия импульса длительностью $\tau = 10T$ постоянной амплитуды A при различных значениях шума (*D.Berns et.al., PRL 97, 150502 (2006)*)

N=3000 realizations

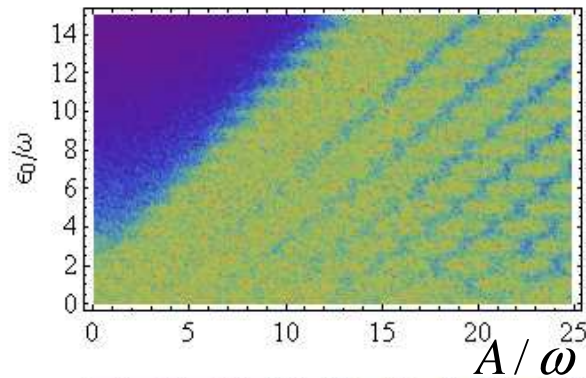
$$\Delta = 0.14\omega, A = 0 \div 50\omega, \varepsilon_0 = 0 \div 45\omega, \omega = 90\text{MHz} \Rightarrow \Gamma = (0.13 - 0.2)\omega$$



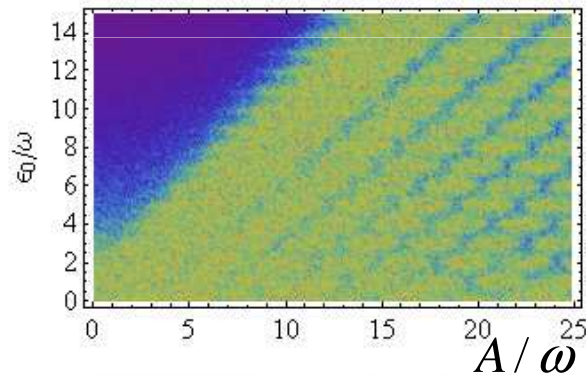
Подгонка параметров шума при прямом численном моделировании под результаты эксперимента позволит восстановить параметры образца с хорошей точностью

Приложение к амплитудной спектроскопии: измерение состояния кубита

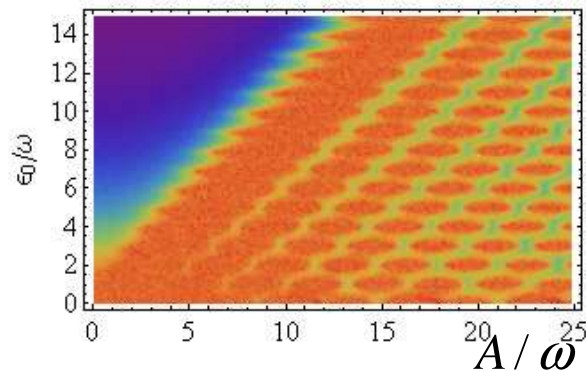
$$\Delta = \omega \quad \Gamma = 0.09\omega$$



$N = 10$ Зависимость интерференционной картины от числа реализаций метода (числа измерений в эксперименте).



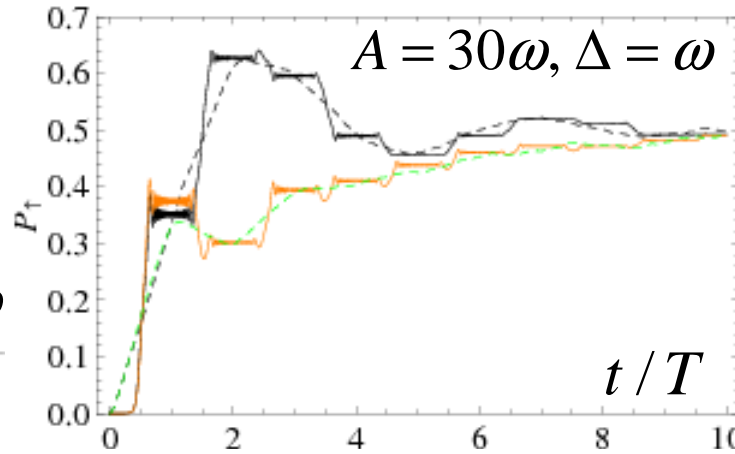
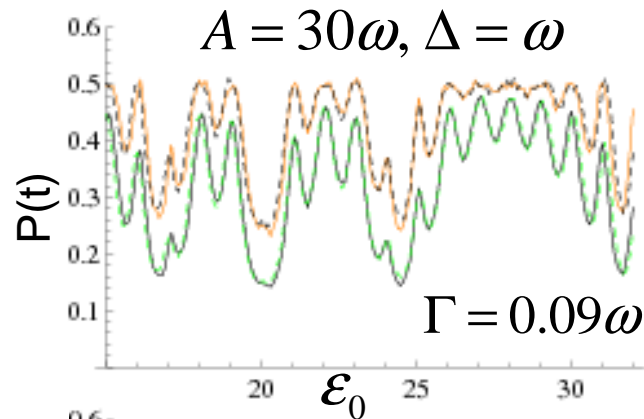
$N = 100$



$N = 500$ В хорошем соответствии с $N=3000$ в предыдущем рассмотрении и эксперименте, где обычно $N=3000-10000$.

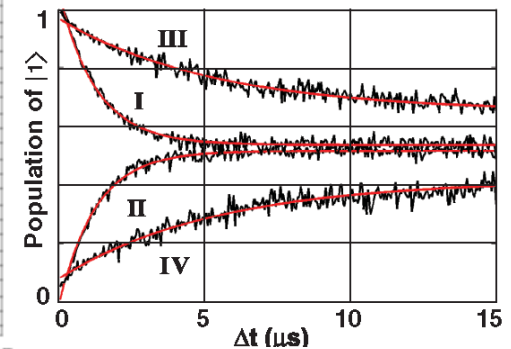
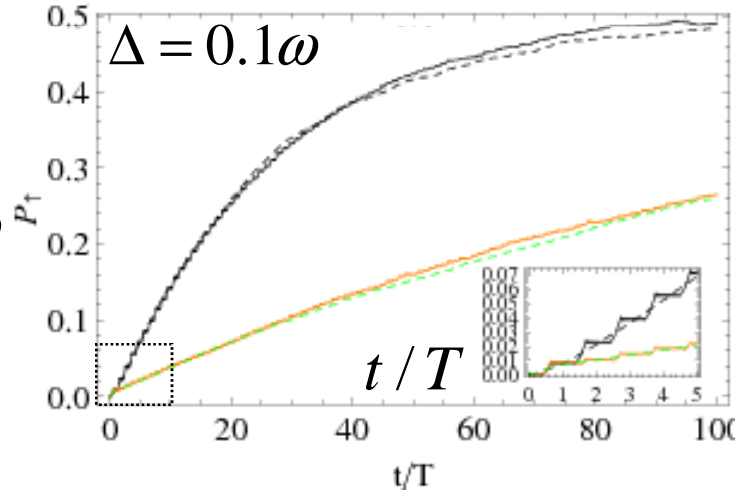
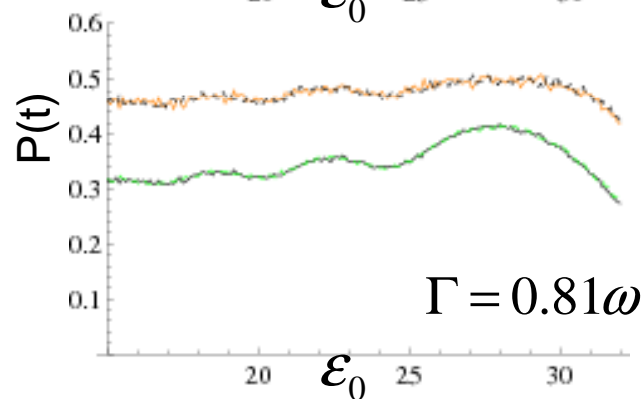
A. I. Gelman, A.M. Satanin, JETP lett. 91, 535-540 (2010).

Зависимость интерференционной картины от флуктуации начальной фазы импульса



$$\Gamma = 0.09\omega$$

D. M. Berns, et.al. Phys. Rev. Lett. 97, 150502 (2006).



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$\varphi_0 \in [0, 2\pi]$ Равномерное распределение, в каждой реализации - случайное

В условиях шума при усреднении по 2000 реализаций населенность по окончании импульса не зависит от начальной фазы импульса. Усреднение по мелкомасштабным осцилляциям Ландау-Зинера. Глобальная динамика (насыщение и выход населенности на стационарное значение) сохраняется

Основные результаты

1. Дана интерпретация переходам ЛЗ в условиях шума и методу АС на примере сверхпроводящих кубитов с точки зрения единичных реализаций, а также установлена связь с усредненной динамикой системы, наблюдающейся в экспериментах.
2. Рассмотрено влияние различного уровня шума на населенности кубитов и зависимость резкости интерференционной картины метода АС от числа измерений состояния кубитов. Показана возможность контрастного формирования интерференционной картины уже при 100 реализациях, что может быть существенным при проведении эксперимента.
3. Про моделирован процесс измерения кубита, включая в рассмотрение классический шум, вызванный флуктуациями начальной фазы возбуждающего импульса в методе АС. Показано что такой шум не влияет на усредненную по реализациям интерференционную картину.
4. Программный комплекс протестирован на известных задачах квантовой оптики, использовались вычислительные кластерные системы ИПФ РАН и ННГУ
5. Проект получил финансовую поддержку на конкурсе «У.М.Н.И.К.», 2010 г.
6. Элементы методики расчета использованы при чтении спецкурса «Квантовая оптика» автором на физическом факультете ННГУ, для студентов 4-5 курса в весеннем семестре 2010 г.
7. Диплом 15-ой Нижегородской сессии молодых ученых (естественные науки), 2010

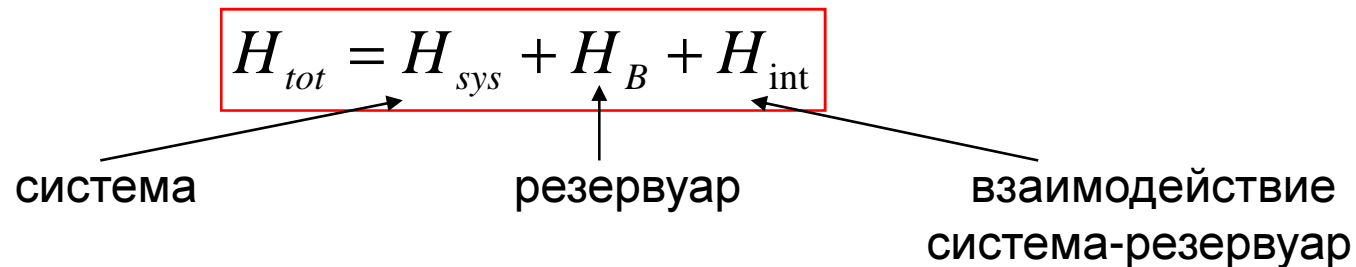
Список публикаций

1. А. И. Гельман, А. М. Сатанин. Релаксационная динамика сверхпроводящих джозефсоновских кубитов в сильном переменном поле // ФТТ. 2010. Т.52.С. 2094
2. А. И. Гельман, А. М. Сатанин. Квантовые скачки при переходах Ландау-Зинера в диссипативной динамике сверхпроводящего кубита // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. С. 584.
3. А. И. Гельман, А. М. Сатанин. Квантовые скачки при спонтанной релаксации сверхпроводящего кубита под действием сильного ВЧ поля // Вестник ННГУ. 2010.
4. А. И. Гельман, М.В. Денисенко, А. М. Сатанин. Динамический контроль квантовых состояний джозефсоновских кубитов // Вестник ННГУ. 2010.
5. А. И. Гельман, В. А. Миронов. Подавление шума в атомной системе под действием поля в сжатом когерентном состоянии // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 627.
6. A. Gelman, V. Mironov. Noise suppression in three-level atomic system driven by quantized field // Proc. SPIE. 2009. V. 7521. P. 75210F.
7. A. I. Gelman, M. V. Denisenko, A. M. Satanin, and F. Nori Amplitude and phase effects in Josephson qubits driven by a biharmonic electromagnetic field (in preparation)
8. A. Shvetsov, A. M. Satanin, A. Gelman, A. Zagoskin, S. Savel'ev, and F. Nori. Quantum photonic crystals with tuneable electromagnetic properties (in preparation)
9. A. Shvetsov, A. M. Satanin, A. Gelman, A. Zagoskin, S. Savel'ev, and F. Nori. Control of superconducting metamaterials (in preparation)
10. А. И. Гельман, Диссертация «Диссипативная динамика и контролируемая релаксация в одиночных квантовых системах», ИПФ РАН, 2010

Квантовая теория релаксации: методы исследования

Природа диссипации -

взаимодействие системы с резервуаром
с большим числом степеней свободы



Метод оператора плотности

$$\dot{\rho}_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_{tot}, \rho_{tot}(t)]$$

ρ_{tot} Оператор плотности
«система+резервуар»

$$\hat{\rho} = Tr_B(\rho_{tot})$$

Оператор плотности
системы

Метод Гейзенберга-Ланжевена

$$\dot{c}_i(t) = \frac{i}{\hbar} [H_{tot}, c_i(t)] \quad i = 1, n$$

$$\dot{b}_j(t) = \frac{i}{\hbar} [H_{tot}, b_j(t)] \quad j = 1, m$$

c_i -полный набор операторов системы

b_j -полный набор операторов резервуара

C.W.Gardiner, P.Zoller, Quantum noise, Springer, 2000

Скалли М. О., Зубайри М. С., Квантовая оптика, М., Физматлит, 2003

Квантовая теория релаксации: методы исследования

марковское приближение

времена корреляции
параметров резервуара \ll времен изменения
параметров системы

общее решение - уравнения I порядка по времени

Метод оператора плотности

Решение уравнений для элементов оператора плотности, n^2 штук

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_B ([H_{int}(t), [H_{int}(t'), \rho(t) \otimes \rho_B]]) \quad \text{в представлении взаимодействия}$$

$$U_I(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_{sys} + H_B)t} \quad \rho_I = U_I^+(t) \rho_{tot}(t) U_I(t) \quad \rho(t) = Tr_B(\rho_I(t))$$

Метод Гейзенберга-Ланжевена, квантовый шум

Решение стохастических дифференциальных уравнений для операторов

$$\dot{c}_i(t) = f(c_1, \dots, c_n) + F_{c_i}(t)$$

$F_{c_i}(t)$ - операторы шума Ланжевена

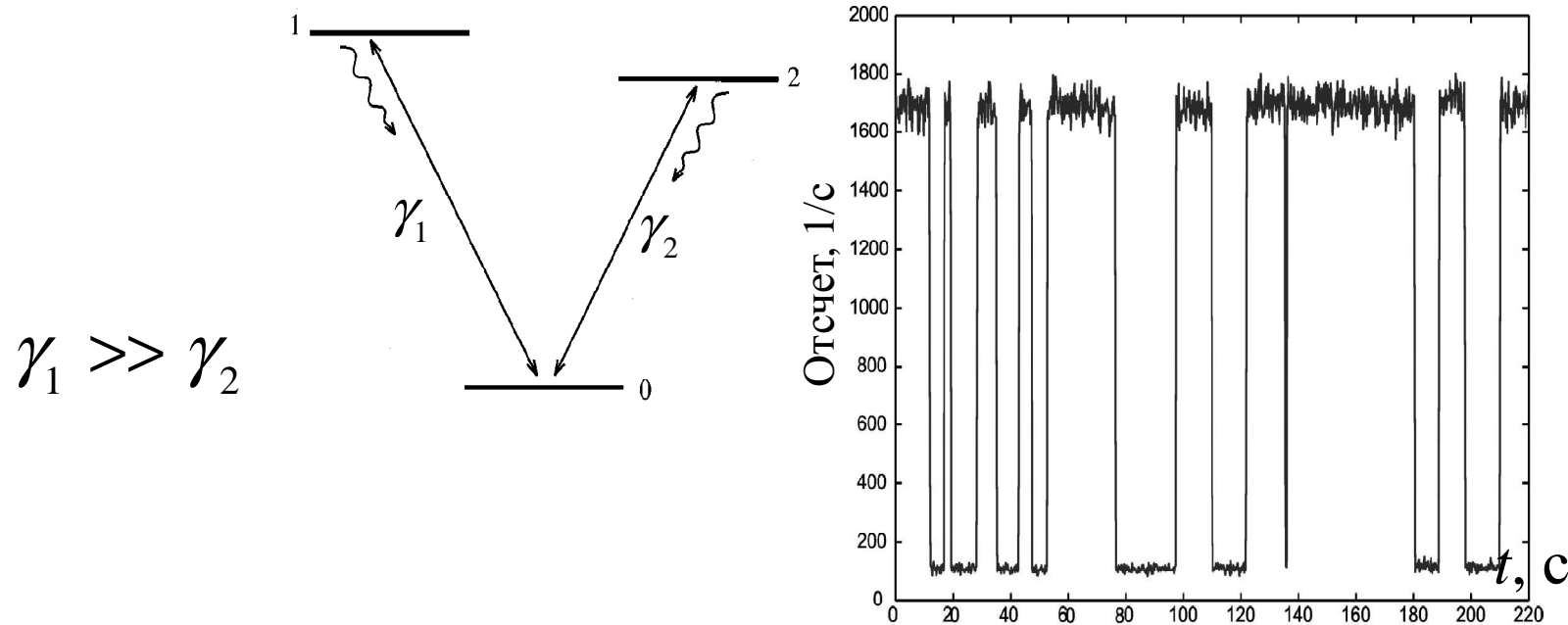
$$\langle F_{c_i}(t) F_{c_j}(t') \rangle = D_{ij}(t, t')$$

$D_{ij}(t, t') = D_{ij} \delta(t - t')$ - белый шум

Соответствует флуктуационно-диссипационной теореме

Оба метода изначально предполагают описание ансамбля систем

Одиночный V-атом: флуоресценция



Резонансная флуоресценция одиночного иона $^{138}\text{Ba}^+$ на переходе $|0\rangle\text{-}|1\rangle$. Оптические поля действуют на оба перехода. Если ион переходит в состояние $|2\rangle$ (метастабильное), флуоресценция исчезает. Через промежуток времени, обычно равный времени жизни уровня 2 (32 сек. в данном эксперименте) атом возвращается в состояние 0, и флуоресценция на переходе $|0\rangle\text{-}|1\rangle$ восстанавливается.

*Bergquist, J. C. et. al. Observation of **quantum jumps** in a single atom // PRL. 1986. V. 57. P. 1699*

*Nagourney, W. et.al Shelved optical electron amplifier: Observation of **quantum jumps** //PRL.1986,56,P.2797*

*Sauter, T. et. al. Observation of **quantum jumps** Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 1696.*

**Для описания такого поведения потребовалась новая теория
(у ансамбля атомов скачков не будет)**

Метод МК: интерпретация

Общий вид уравнения для оператора плотности системы с учетом релаксации в марковском приближении - форма Линдблада

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_{sys}, \rho] + \sum_{j=1}^{N_c} \frac{1}{2} \gamma_j (2c_j \rho c_j^\dagger - \rho c_j^\dagger c_j - c_j^\dagger c_j \rho) = -\frac{i}{\hbar} (H_{eff} \rho - \rho H_{eff}^\dagger) + \sum_{j=1}^{N_c} J_j \rho$$

$$H_{eff} = H_{sys} - \frac{i}{2\hbar} \sum_{j=1}^{N_c} \gamma_j c_j^\dagger c_j \quad \text{эфффективный Гамильтониан}$$

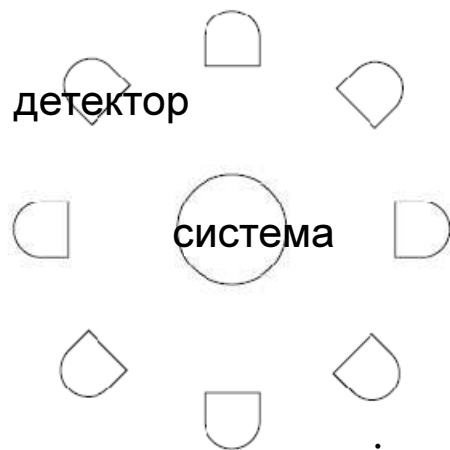
N_c число скоростей релакс. оператор системы,

$$J_j \rho = \gamma_j c_j \rho c_j^\dagger \quad \text{оператор квантового скачка}$$

c_j взаимодействующий с j резервуаром

Возможна следующая интерпретация

M. B. Plenio, P.L. Knight, Rev. Mod. Phys., 70(1), 101-143 (1998).



Динамика системы – в условиях эксперимента (**мысленного**) по регистрации спонтанно испущенных системой фотонов

отсутствие фотоотсчета

зарегистрирован фотоотсчет

динамика под действием H_{eff}

квантовый скачок

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} (H_{eff} \rho - \rho H_{eff}^\dagger) \quad \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{eff} |\varphi(t)\rangle \quad \rho \rightarrow J_j \rho \quad |\varphi(t_1 + dt)\rangle = \lambda \hat{c}_j |\varphi(t_1)\rangle$$

Метод МК: преимущества

Расчет среднего

$$a(t) = \langle A \rangle(t) = \text{Tr}[\rho(t)A]$$

A, B - операторы системы



$$\langle A \rangle_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \psi^i(t) | A | \psi^i(t) \rangle$$

Расчет двухвременных корреляционных функций

$$C(t, \tau) = \langle A(t + \tau)B(t) \rangle$$

Квантовая теорема регрессии



K. Molmer, Y. Castin, J. Dalibard,
J. Opt. Soc. Am. B, 10, 524 (1993)

Расчет **единичных реализаций** процессов в квантовых системах
Расчет **диссипативной** динамики **одиночных** квантовых систем

Размерность системы ДУ для волновой функции N вместо N^2 для матрицы плотности

Простота и эффективность распараллеливания алгоритма

Расчет систем в **немарковском приближении**
W. T. Strunz et.al, Phys. Rev. Lett, 82, 1999

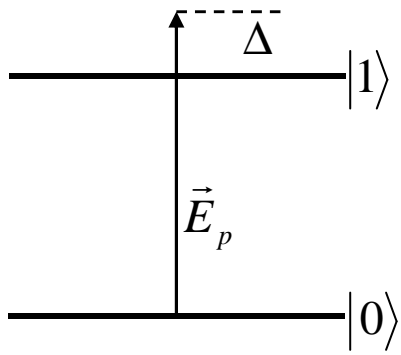
Точность

$$(\delta A)_{(n)}^2(t) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(\langle \psi^i(t) | A | \psi^i(t) \rangle - \langle A \rangle_n(t) \right)^2 \quad \delta A_{(n)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Статистически
независимые
реализации

Результаты тестирования

1. Двухуровневый атом под действием резонансного поля, в вакууме



$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_{sys}, \rho] + \frac{\Gamma}{2}(2\sigma_{01}\rho\sigma_{10} - \sigma_{11}\rho - \rho\sigma_{11}) \quad \Delta = \omega_p - \omega_{10}$$

$$H_{sys} = -\hbar\Delta\sigma_{11} + \hbar\Omega(\sigma_{01} + \sigma_{10})$$

$$\Omega = \frac{\mu_{01}E_p}{\hbar}$$

$$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad i, j = 0, 1$$

$$H_{eff} = \hbar(-\Delta - i\frac{\Gamma}{2})\sigma_{11} + \hbar\Omega(\sigma_{01} + \sigma_{10})$$

$$c_1 = \sigma_{01} = |0\rangle\langle 1|$$

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}H_{eff}|\psi(t)\rangle$$

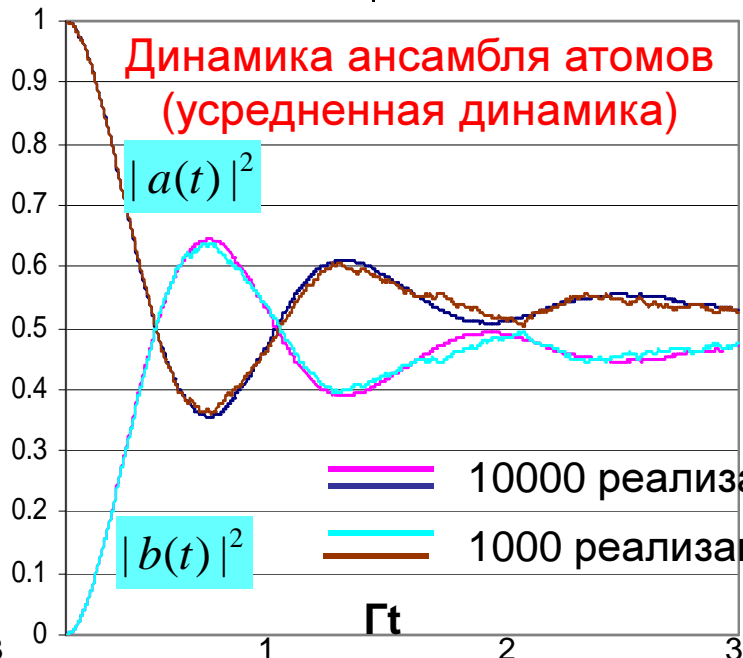
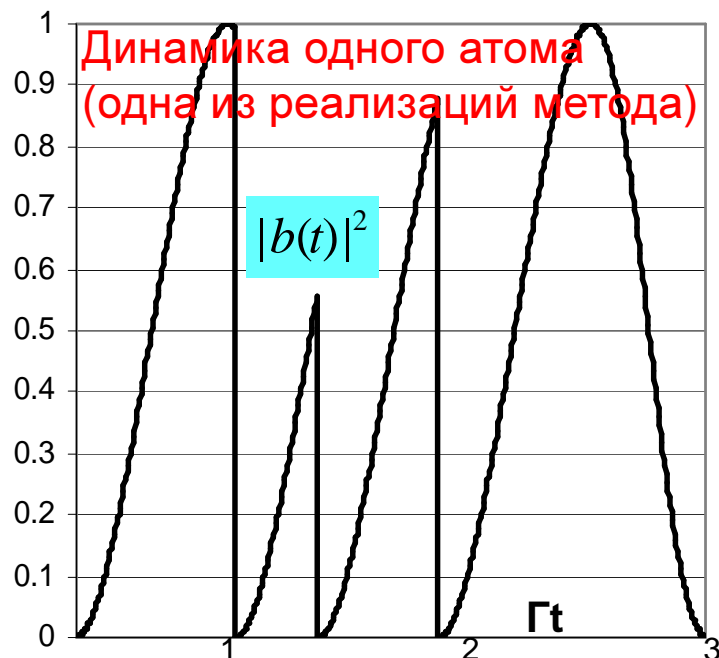
$$|\psi(t)\rangle = a(t)|0\rangle + b(t)|1\rangle$$

$$\dot{a}(t) = -i\Omega b(t)$$

$$\dot{b}(t) = -(\frac{\Gamma}{2} - i\Delta)b(t) - i\Omega a(t)$$

$$c_1|\psi(t)\rangle = b(t)|0\rangle$$

$$\Delta P_1(t) = \Gamma\Delta t |b(t)|^2$$



$$\Delta = 0$$

$$\Omega = \Gamma$$

Метод МК: алгоритм численного моделирования

Расчет ведется для волновой функции системы

Имеется волновая функция системы $\psi(t)$ в момент времени t

1. Вероятность излучения фотона $\Delta P(t) = \sum \Delta P_j(t) \ll 1$, $\Delta P_j(t) = \gamma_j \Delta t \langle \psi(t) | c_j^+ c_j | \psi(t) \rangle$
 $1 - \Delta P(t)^j$ – не излучился фотон

2. генерация **случайного** числа r , равномерно распределенного на отрезке $[0, 1]$

$r \in (\Delta P, 1]$ нет излучения
 $|\psi(t + \Delta t)\rangle = \frac{(1 - \frac{i}{\hbar} H_{eff} \Delta t) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{1 - \Delta P(t)}}$

$r \in [0, \Delta P]$ излучился фотон
 $|\psi(t + \Delta t)\rangle = |\phi_j\rangle = \frac{c_j |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\Delta P_j(t) / (\Delta t \gamma_j)}} \quad \Pi_j = \Delta P_j / \Delta P$

3. повтор шагов 1,2 для расчета эволюции за требуемое время – **квантовая траектория**

4. повтор шагов 1-3 n раз для получения статистического ансамбля квантовых траекторий – **усредненная динамика системы, соответствует уравнению для оператора плотности**

Доказательство эквивалентности

Имеется волновая функция системы $\psi(t)$ в момент времени t

$$\langle \rho(t + \Delta t) \rangle_r = (1 - \Delta P(t)) |\psi(t + \Delta t)\rangle \langle \psi(t + \Delta t)| + \sum_{j=1} \Delta P_j(t) |\phi_j\rangle \langle \phi_j| \quad \rho = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$$

$$\langle \rho(t + \Delta t) \rangle_r = \rho(t) - \frac{i\delta t}{\hbar} [H_{sys}, \rho] + \delta t \sum_{j=1}^{N_c} \frac{1}{2} \gamma_j (2c_j \rho c_j^+ - \rho c_j^+ c_j - c_j^+ c_j \rho)$$

Усредняем по n реализациям

Метод МК – простейший вывод

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{Рассмотрим} \quad p_1 = 1$$

$$\dot{\rho} = \underbrace{-\frac{i}{\hbar} (H_{eff} |\psi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\psi| H_{eff}^+)}_{\text{}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_c} \gamma_j c_j |\psi\rangle\langle\psi| c_j^+}_{\text{}}$$

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} H_{eff} |\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\phi_j\rangle = c_j |\psi\rangle$$

Стохастическая эволюция. Δt -дискретное время

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = (1 - \frac{i}{\hbar} H_{eff} \Delta t) |\psi(t)\rangle \quad \text{В первом порядке по } \Delta t$$

$$\langle\psi(t + \Delta t)|\psi(t + \Delta t)\rangle = 1 - \Delta P(t)$$

$$\Delta P_j(t) = \Delta t \gamma_j \langle\psi(t)|c_j^+ c_j|\psi(t)\rangle \quad \Delta P(t) = \sum_{j=1}^{N_c} \Delta P_j(t)$$

Аналогично

$$|\tilde{\psi}(t + \Delta t)\rangle = \frac{(1 - \frac{i}{\hbar} H_{eff} \Delta t)}{\sqrt{1 - \Delta P(t)}} |\psi(t)\rangle$$

$$|\tilde{\phi}_j\rangle = \sqrt{\frac{\Delta t \gamma_j}{\Delta P_j}} |\phi_j\rangle$$

$$\rho(t + \Delta t) = (1 - \Delta P(t)) |\tilde{\psi}(t + \Delta t)\rangle\langle\tilde{\psi}(t + \Delta t)| + \sum_{j=1}^{N_c} \Delta P_j(t) |\tilde{\phi}_j\rangle\langle\tilde{\phi}_j|$$

В среднем динамика унитарна, существует строгая теория КСДУ, теория измерения

Известные приложения метода

1. Лазерное охлаждение (учет импульса) *Dalibard, J. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 580.*
2. Взаимодействие квантованного света с атомными системами
Nakano, M. // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 033407.
Гельман, А. И. // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. С. 627-636.
3. Устойчивость квантовых протоколов в зашумленной среде (одиночные системы)
Jun J. // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. P. 064301.
Goto, H. et.al.// Phys. Rev. A. 2005. V. 72. P. 054301.
Carlo, G. et.al. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 257903.
4. Динамика Бозе-конденсата в зашумленной среде
Witthout, D. et.al.// Phys. Rev. A 2009. V. 79. P. 033621
5. Динамика сверхпроводящих кубитов в условиях шума
A. Gelman, A.M. Satanin, JETP lett. 91, 535-540 (2010)

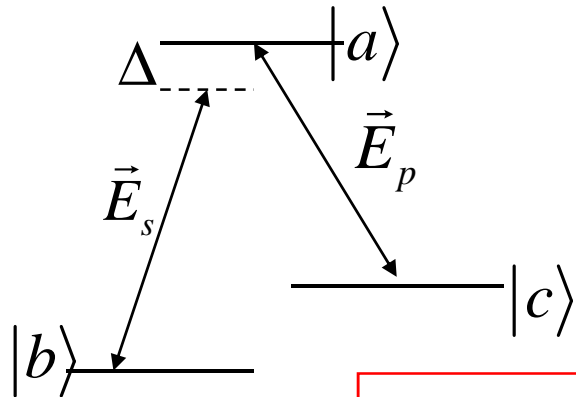
А.И. Гельман, В.А. Миронов. Численное моделирование квантовой релаксации в многоуровневых атомных системах методом Монте-Карло: препринт №773 ИПФ РАН. 2008. (42 с)

Прочитан спецкурс на Физическом факультете ННГУ, весенний семестр 2010 г. (4-5 курсы)

Победа в конкурсе УМНИК: численное моделирование динамики квантовых систем с использованием суперкомпьютерных технологий

Результаты тестирования

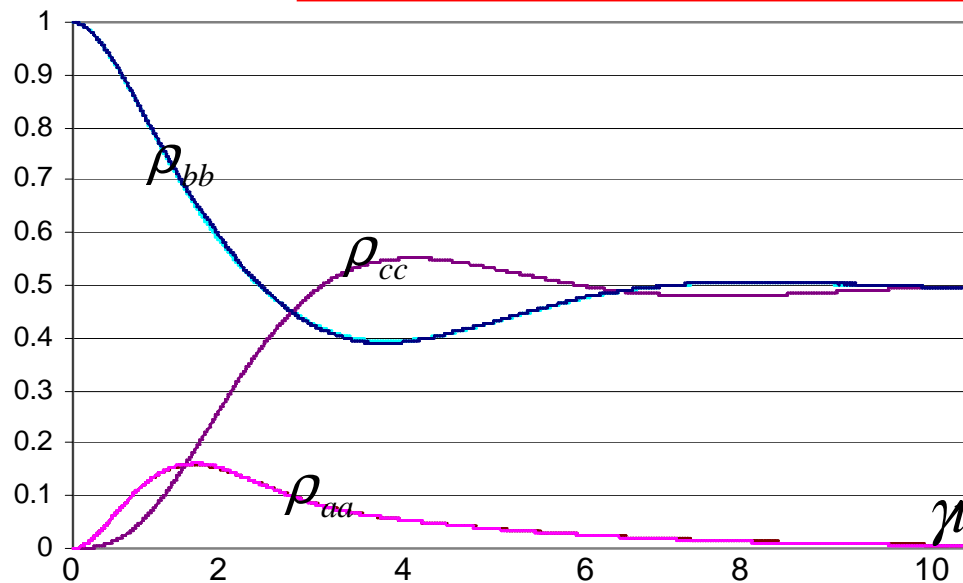
2. Трехуровневый атом с Λ -конфигурацией электронных уровней под действием резонансных полей, в вакууме



$$H_{eff} = \tilde{H} - \frac{i\hbar}{2}(\gamma_b + \gamma_c)\sigma_{aa} - \frac{i\hbar}{2} \frac{\Gamma}{2}(\sigma_{bb} + \sigma_{cc})$$

$$\begin{aligned} c_{ab} = c_1 = \sigma_{ba}; & \quad \gamma_1 = \gamma_b \\ c_{ac} = c_2 = \sigma_{ca}; & \quad \gamma_2 = \gamma_c \\ c_{cb} = c_3 = \sigma_{cc} - \sigma_{bb}; & \quad \gamma_3 = \Gamma/2 \end{aligned}$$

Эффект
когерентного пленения населенностей



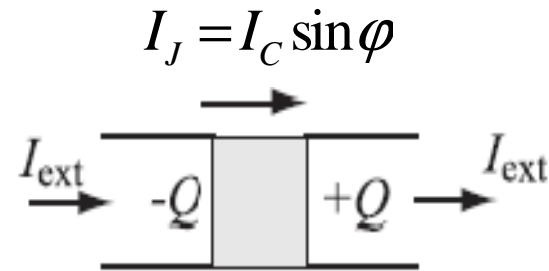
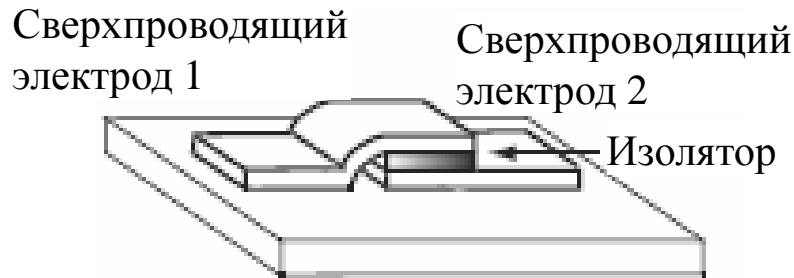
$$\Gamma = 0$$

$$\Omega_s = \Omega_p = 0.7\gamma$$

$N=5000$, $N=10000$, результат неотличим от точного решения

Агапьев Б.Д и др., УФН 163, 9 (1993)

Джозефсоновский переход



$$Q = -2Ne$$

$$\varphi = \theta_2 - \theta_1$$

$$\Psi_1 = \Psi_0 e^{i\theta_1} \quad E_J, C \quad \Psi_2 = \Psi_0 e^{i\theta_2}$$

I_C – критический ток

$$\frac{dQ}{dt} = -I_{ext} + I_C \sin \varphi$$

$$H = \frac{1}{2} E_C N^2 - E_J \left(\cos \varphi + \frac{I_{ext}}{I_C} \varphi \right)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2eV}{\hbar}$$

$$E_C = \frac{(2e)^2}{C}$$

$$E_J = \frac{I_C \hbar}{2e}$$

$$N = \frac{C \hbar}{4e^2} \frac{d\varphi}{dt}$$

Кулоновская энергия

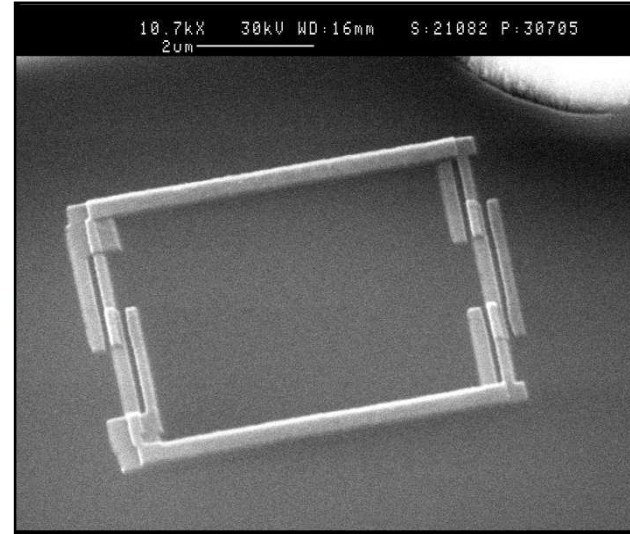
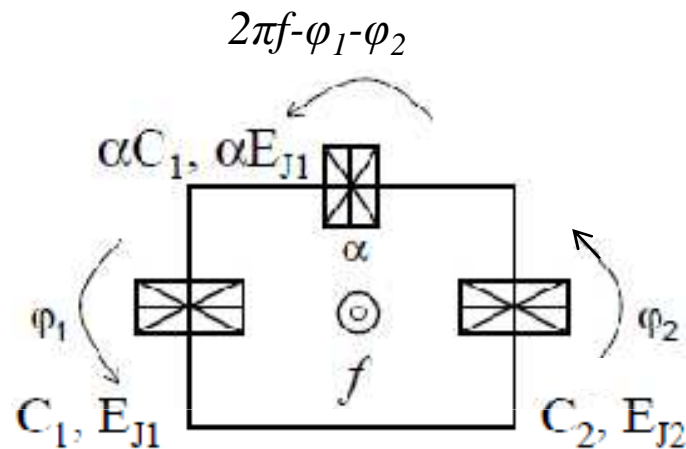
Джозефсоновская энергия

Число куперовских пар

$[N, \varphi] = -i$ Переход к квантовому описанию, соотношение неопределенностей

В зависимости от того, какая энергия больше, выделяют зарядовый и фазовый (поточковый) кубиты (определяется геометрией)

Сверхпроводящий потоковый кубит (3JJ qubit)



$$E_{J1} = E_{J2} = I_C \Phi_0 / 2\pi \quad \Phi_0 = h / 2e$$

$$E_{J3} = \alpha E_{J1} \quad \alpha I_C \quad T = 20mK$$

$f = \Phi_q / \Phi_0$ – внешний магнитный поток

φ_i – разность фаз волновой функции на i -ом переходе

J.E. Mooij, et.al, Science 285, 1036 (1999).

Yu. Makhlin, G. Schon, and A. Shnirman, Rev. Mod.Phys. 73, 357 (2001)

3JJ qubit: гамильтониан

$$H = \frac{C \Phi_0}{2 \cdot 2\pi} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \alpha \frac{C \Phi_0}{2 \cdot 2\pi} (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 - E_J \{ \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \alpha \cos(2\pi f - \varphi_1 - \varphi_2) \}$$

$$2\pi f_{tot} = \varphi_3 + \varphi_1 + \varphi_2 \quad f_{tot} = f + LI / \Phi_0, \quad LI / \Phi_0 \ll f \text{ для потокового кубита}$$

самоиндукция

$$\phi = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2 \quad \theta = (\varphi_1 - \varphi_2) / 2$$

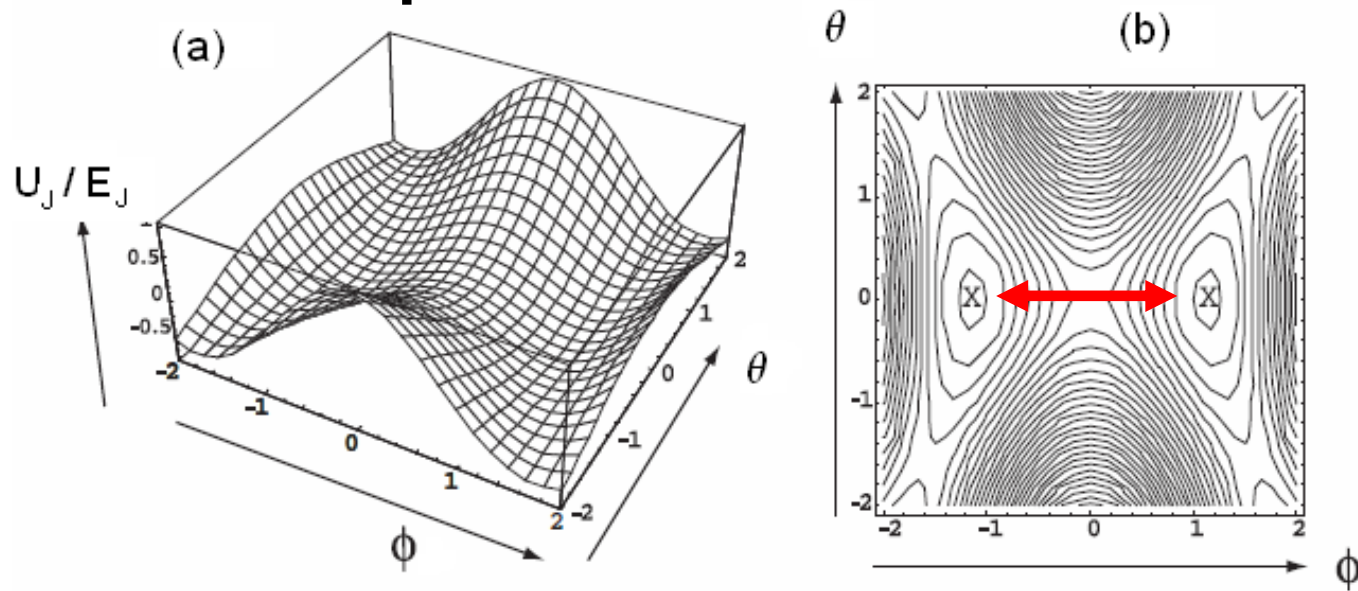
$$H = \frac{1}{2} \frac{P_\phi^2}{M_\phi} + \frac{2}{2} \frac{P_\theta^2}{M_\theta} - E_J \{ 2 \cos \theta \cos \phi + \alpha \cos(2\pi f + 2\phi) \}$$

$$P_\phi = M_\phi \dot{\phi}^2 \quad P_\theta = M_\theta \dot{\theta}^2 \quad M_\theta = (\Phi_0 / 2\pi)^2 2C(1 + 2\alpha) \quad M_\phi = (\Phi_0 / 2\pi)^2 2C$$

Частица с анизотропной массой в 2d джозефсоновском потенциале

$$U_J = -E_J \{ 2 \cos \theta \cos \phi + \alpha \cos(2\pi f + 2\phi) \}$$

3JJ qubit: гамильтониан



*J.E. Mooij, et.al,
Science 285,
1036 (1999).*

$$U_J = -E_J \{ 2 \cos \theta \cos \phi + \alpha \cos(2\pi f + 2\phi) \}$$

$f = \Phi_q / \Phi_0$ – внешний магнитный поток, может быть подстроен

При $f \approx 0.5$ минимум потенциальной энергии U_J :

$$\theta = 0 \quad I_p = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial U}{\partial \varphi_3} \quad I_p = \pm I_c \sin \phi \quad \pm \phi_0$$

$$\cos \phi_0 = \frac{1}{2\alpha}$$

$$0.5 \leq \alpha \leq 1$$

Сверхпроводящий ток в противоположных направлениях, одинаков через каждый переход

Движение возможно только в одном направлении – эффективный двухъямный потенциал

3JJ qubit: гамильтониан

$$\delta U_J = 2I_p (f - 1/2)$$

Учет нижнего уровня в каждой яме

$$H_s = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \sigma_z + \Delta \sigma_x)$$

Δ – туннельное расщепление уровней

$$\varepsilon_0 = \delta U_J = 2I_p (f - 0.5)$$

σ_z, σ_x – матрицы Паули

$$E_{1,0} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_0^2 + \Delta^2}$$

$$|0\rangle = -\sin \theta / 2 |\uparrow\rangle + \cos \theta / 2 |\downarrow\rangle$$

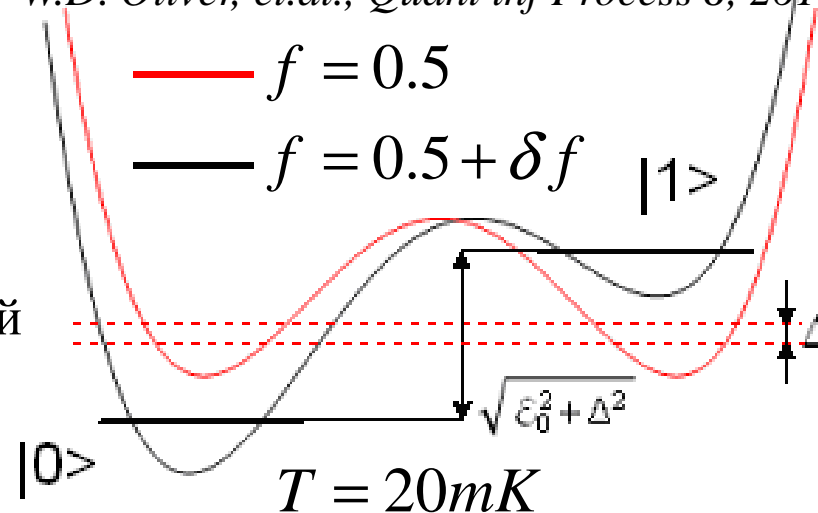
$$|1\rangle = \cos \theta / 2 |\uparrow\rangle + \sin \theta / 2 |\downarrow\rangle$$

$$\theta = \arctan \Delta / \varepsilon_0$$

$$\sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, \sigma_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$$

Искусственный атом

W.D. Oliver, et.al., *Quant inf Process* 8, 261 (2009)



$$\varepsilon_0 = 0 \quad |1\rangle = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$$

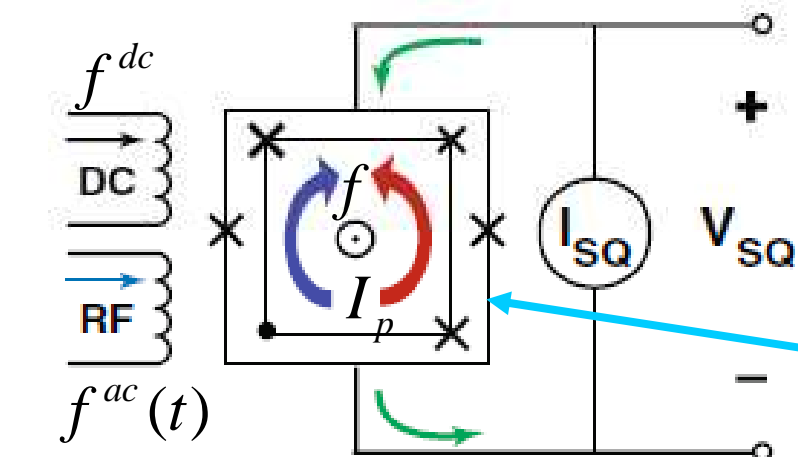
$$E_{1,0} = \pm \Delta / 2 \quad |0\rangle = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$$

$$\varepsilon_0 \quad \Delta \quad |1\rangle = (1, 0)^T = |\uparrow\rangle$$

$$E_{1,0} = \pm \varepsilon_0 / 2 \quad |0\rangle = (0, 1)^T = |\downarrow\rangle$$

Данные состояния могут быть измерены,
соответствуют току в кубите по- и против часовой стрелки

3JJ qubit: управление динамикой

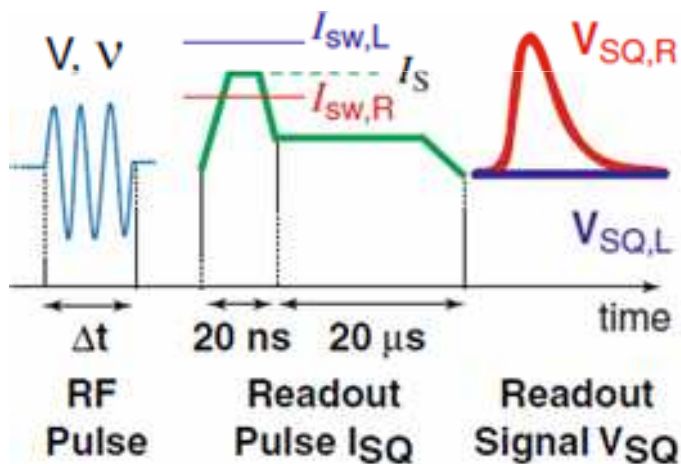


Воздействие на кубит внешними полями:

1. постоянным магнитным полем f^{dc}
2. переменным ВЧ электромагнитным полем f^{ac}

SQUID

Схема измерения состояния кубита



$$f(t) = f^{dc} + f^{ac}(t)$$

$$f^{ac}(t) \propto A \cos \omega t$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 + A \cos \omega t$$

$$f^{dc} \propto \mathcal{E}_0 = 2I_p (f - 0.5)$$

$$H_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{E}(t) & \Delta \\ \Delta & -\mathcal{E}(t) \end{pmatrix}$$

Гамильтониан справедлив для описания динамики всех типов сверхпроводящих кубитов (не только потокового)

Различие заключается в способе управления внешними параметрами

В случае 3JJ кубита – путем изменения амплитуды внешних полей f^{dc} и f^{ac}

3JJ qubit: резонансное приближение

$$H'(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Delta e^{i(A/\omega)\sin\omega t} \\ \Delta e^{-i(A/\omega)\sin\omega t} & -\epsilon_0 \end{pmatrix} \quad U(t) = \exp \left[\left(-\frac{i}{2} \frac{A}{\omega} \sin\omega t \right) \sigma_z \right]$$

Аналогичный гамильтониан широко известен в оптике:
резонансное взаимодействие 2-хуровневого атома с частотно-модулированным лазерным полем

$\Omega = \Delta$ ϵ_0 – detuning from resonance

ω – frequency of modulation

*G. S. Agarwal et.al.,
Phys. Rev. A 50, R4465 (1994)*

A / ω – index of modulation

$$e^{iA/\omega \sin\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{A}{\omega} \right) e^{in\omega t}$$

$$n\omega - \epsilon_0 \approx 0$$

отличие от оптики

$$\omega \quad \Delta$$

$$H'(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_n \\ \Delta_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \Delta J_n(A/\omega)$$

S. Ashhab, et.al.,

Phys. Rev. A 75, 063414 (2007)

$$\Omega_n = \Delta_n \text{ – Раби-динамика}$$

$\Omega_n = 0$ - Эффект когерентного подавления туннелирования (КПТ), даже в присутствии сильного поля накачки частота Раби равна нулю, кубит не возбуждается.

$$P_{\uparrow} = \frac{1}{2} \sum_n \frac{\Delta_n^2}{\Delta_n^2 + (\epsilon_0 - n\omega)^2}$$

Средняя по времени населенность верхнего уровня кубит. Ф. Бесселя приводит к интерференционной картине в зависимости населенности от амплитуды постоянного и переменного полей (для определения параметров кубита)

3JJ qubit: переходы Ландау-Зинера

Впервые исследованы при рассмотрении пересечения уровней при столкновении атомов

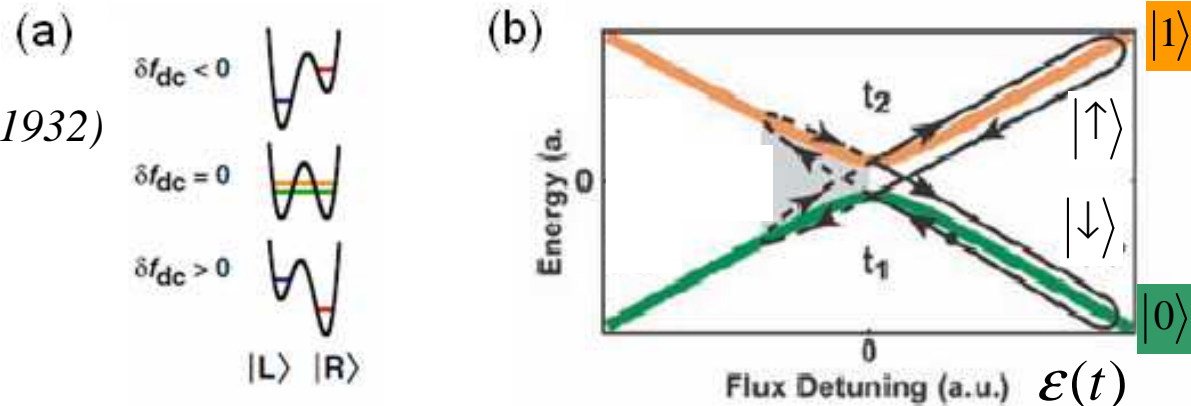
L. D. Landau,

Phys. Z. Sowjetunion 2, 46 (1932)

C. Zener. Proc. R. Soc. A137, 696 (1932)

$$H_s = \frac{1}{2} (\varepsilon(t)\sigma_z + \Delta\sigma_x)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos \omega t$$



$\varepsilon(t) = 0$ - уровни пересекаются в неадиабатическом базисе σ_z (без учета туннелирования)

Вероятность перехода $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ в пределе бесконечно большого времени

$$P_{LZ} = 1 - \exp(-2\pi\Delta^2 / \hbar v)$$

$v \equiv \partial\varepsilon(t) / \partial t_{\varepsilon(t)=0}$ $\gamma_{ZL} = \Delta^2 / \hbar v$ – коэффициент адиабатичности

Скачки населенности происходят при каждом пересечении уровней. Периодическое пересечение приводит к интерференционной картине $P_{\uparrow}(A, \varepsilon_0)$

W. D. Oliver, Y. Yu, J. C. Lee, et.al., Science 310, 1653 (2005)

**Основная цель работы –
изучение влияния шума на динамику кубита и переходы ЛЗ**

3JJ qubit: квантовый шум в системе

$$H_s = \frac{1}{2}(\varepsilon(t)\sigma_z + \Delta\sigma_x) \quad F_x \text{ – продольная релаксация (переворот спина)} \\ \text{(флуктуации заряда)}$$

$$H_{int} = F_z\sigma_z + F_x\sigma_x \quad F_z \text{ – поперечная релаксация (дефазировка)} \\ \text{(флуктуация потока)}$$

$$\gamma_\alpha(t-s) = \langle F_\alpha(t)F_\alpha^+(s) \rangle \quad \Gamma \text{ – скорость дефазировки}$$

$$\tilde{\gamma}(\omega) \approx \text{const}, \omega \in [0, \varepsilon_0] \quad \gamma \text{ – скорость релаксации энергии}$$

$\Gamma \gg \gamma$ для потокового кубита

M. Sillanpaa, et al., Phys. Rev.Lett. 96, 187002 (2006).

W. D. Oliver, et al., Science 310, 1653 (2005).

D. M. Berns, et al., Phys. Rev. Lett. 97, 150502 (2006).

D. M. Berns, et al., Nature 455, 51 (2008).

Кинетические уравнения в марковском приближении

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [H_s, \rho] + \frac{1}{4}\Gamma (2\sigma_z \rho \sigma_z^+ - \rho \sigma_z^+ \sigma_z - \sigma_z^+ \sigma_z \rho)$$

3JJ qubit: шум в системе

Leggett, A., et.al. (1987) Dynamics of the dissipative two-state system, *Rev. Mod. Phys.* 59, 1.

Schon, G., and A. D. Zaikin, 1990, *Phys. Rep.* **198**, 237; Weiss, U. (1999) *Quantum Dissipative Systems*

$$H = \frac{1}{2}(\varepsilon + \delta\varepsilon(t))\sigma_z + \frac{1}{2}\Delta\sigma_x + \sum_q \omega_q (b_q^+ b_q + 1/2)$$

$$S_\varepsilon = \frac{1}{2} \langle \delta\varepsilon(t)\delta\varepsilon(0) + \delta\varepsilon(0)\delta\varepsilon(t) \rangle_\omega = J(\omega) \coth \frac{\omega}{2k_B T}$$

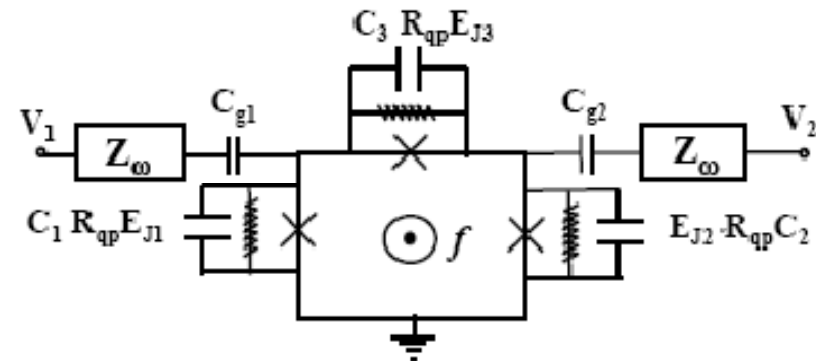
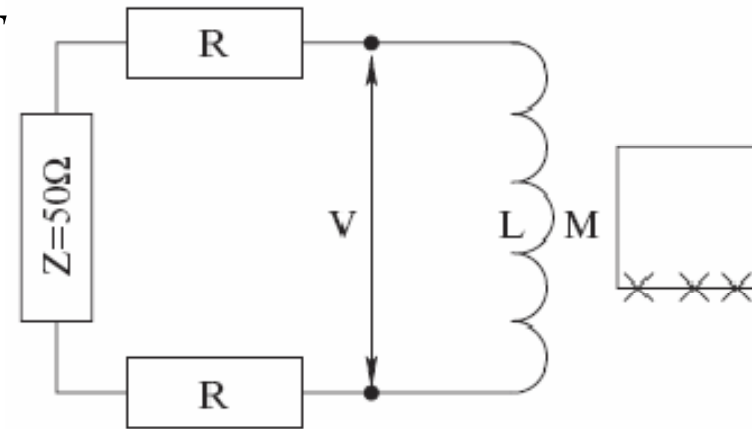
$$S_V = \frac{1}{2} \langle V(t)V(0) + V(0)V(t) \rangle_\omega = \hbar\omega \text{Re}Z_{\text{eff}} \coth \frac{\omega}{2k_B T}$$

$$Z_{\text{eff}} = \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}$$

$$\delta I = \delta V / i\omega L \quad \delta\Phi = M \delta I = \frac{M}{i\omega L} \delta V$$

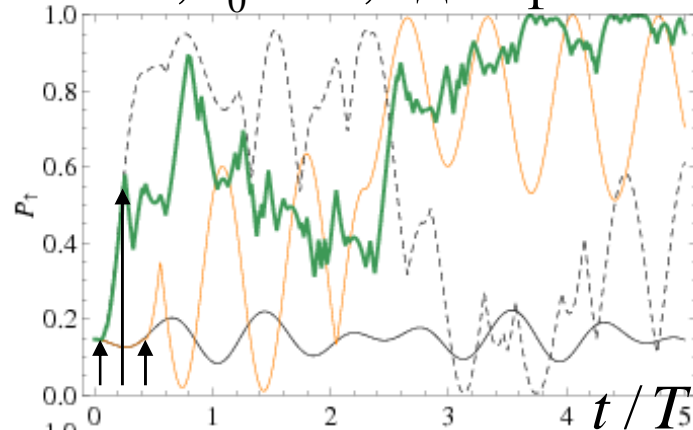
$$\delta\varepsilon = I_s \delta\Phi = \frac{MI_s}{i\omega L} \delta V \quad J(\omega) = \frac{\alpha\omega}{1 + \omega^2 / \omega_c^2}$$

$$\omega_c = L / R, \quad \alpha = 4M^2 I_s^2 / h(Z + 2R)$$



3JJ qubit: квантовые траектории

$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = \omega$, однофотонный резонанс

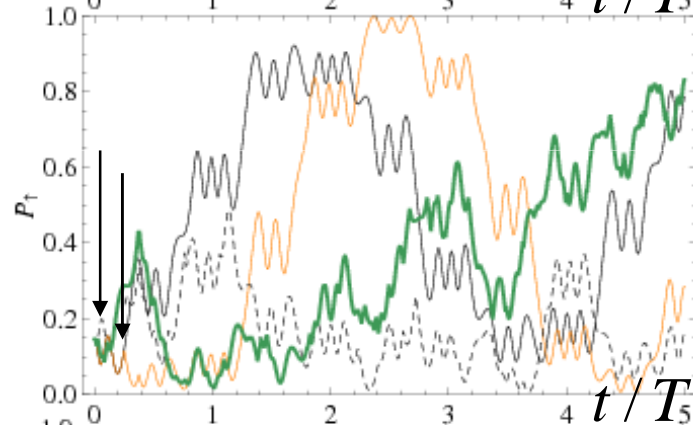


$A = 0.1\omega$
 $A \ll \varepsilon_0$

Кубит приготовлен в состоянии $|0\rangle$
J. You, et.al, Phys. Rev. Lett. 100, 047001(2008)

$$|0\rangle = -\sin \theta / 2 |\uparrow\rangle + \cos \theta / 2 |\downarrow\rangle$$

— $\Gamma = 0$ — $\Gamma = 0.09\omega$
- - - $\Gamma = 0.81\omega$ — $\Gamma = 4\omega$



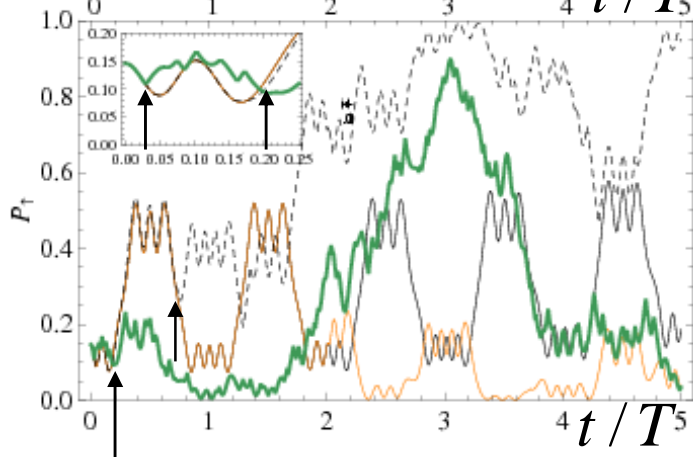
$A = 8.5\omega$

$\Delta_1(8.5) \approx 0.27\omega$ Эффективный гамильтониан в резонансном приближении

Rabi+LZ

$P_{LZ} \approx 0.45$

$$H'(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_n \\ \Delta_n & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_n &= \Delta J_n(A/\omega) \\ n\omega - \varepsilon_0 &\approx 0 \end{aligned}$$



$A = 10.2\omega$

$\Delta_1(10.2\omega) \approx 0$

КПТ

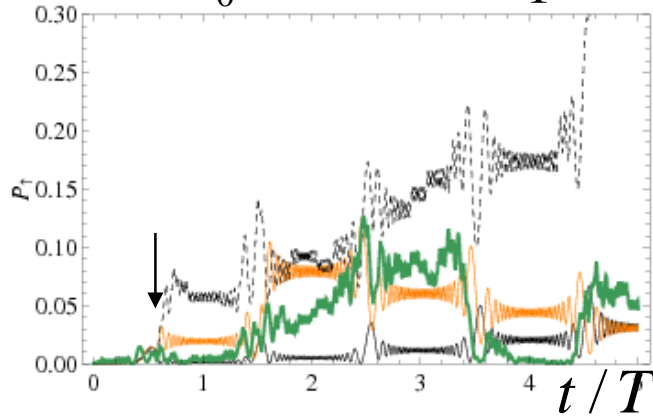
$P_{LZ} = 1 - \exp(-2\pi\Delta^2 / \nu)$

$\nu \equiv \partial\varepsilon(t) / \partial t_{\varepsilon(t)=0} \approx A$

С увеличением Γ динамика существенно меняется. Кубит может возбуждаться на верхний уровень. Нет пленения населенностей на временах $\sim T/2$ (между пересечениями уровней)

3JJ qubit: квантовые траектории

$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = 30\omega$, 30-фотонный резонанс, сильное поле: $\varepsilon_0, A \gg \omega$



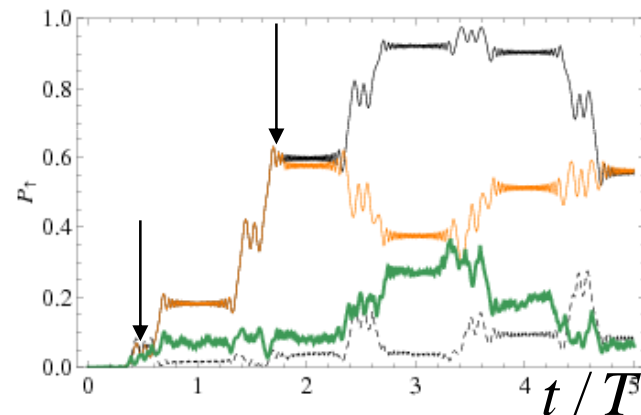
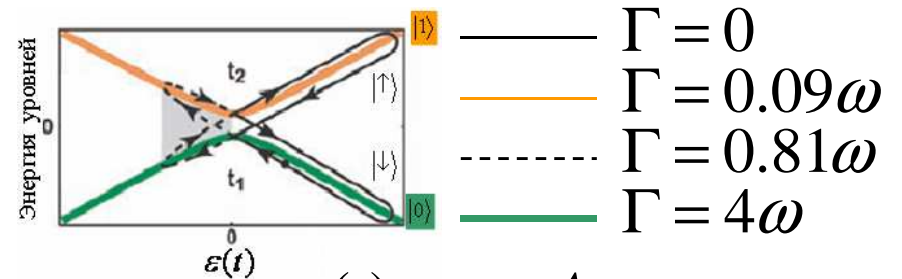
$$A = 25.1\omega$$

$$A \ll \varepsilon_0$$

Кубит приготовлен в состоянии $|0\rangle$

J. You, et.al, Phys. Rev. Lett. 100, 047001(2008)

$$|0\rangle = -\sin \theta / 2 |\uparrow\rangle + \cos \theta / 2 |\downarrow\rangle$$



$$A = 43.3\omega$$

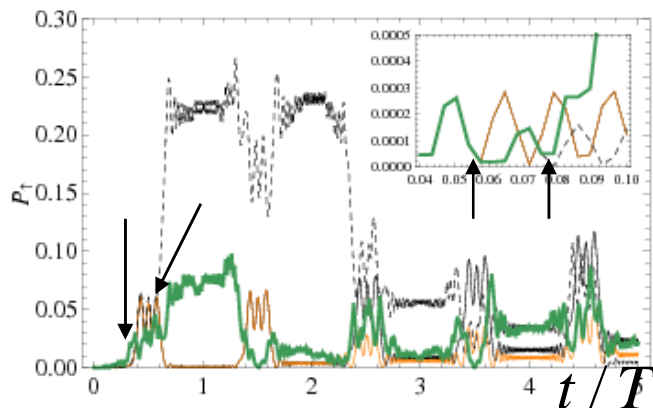
$$\Delta_{30}(43.3\omega) \approx 0.14\omega$$

Rabi+LZ

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos \omega t$$

$$T_1 = \frac{1}{\pi} \arccos \varepsilon_0 / A$$

$$T_2 = \frac{1}{\pi} (1 - \arccos \varepsilon_0 / A)$$



$$A = 45.5\omega$$

$$\Delta_{30} \approx 0 \quad \text{КПТ}$$

$$P_{LZ} \approx 0.1$$

Даже при сильном управляющем поле влияние шума существенно

С увеличением Γ динамика существенно меняется. Кубит может возбуждаться на верхний уровень. Нет пленения населенностей на временах $\sim T/2$ (между пересечениями уровней)

3JJ qubit: усредненная динамика

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A \cos(\omega t) + \delta\varepsilon(t)$$

Влияние резервуара -
классические флуктуации магнитного потока
(белый шум)

$$W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2}$$

Средняя скорость переходов ЛЗ $|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$
в рамках теории возмущений, когда $W \ll \Gamma$
(средняя по реализациям)

D. M. Berns et al. PRL 97, 150502 (2006)

$$\langle \sigma_z(t) \rangle = \langle \sigma_z^{stat} \rangle + (\langle \sigma_z^0 \rangle - \langle \sigma_z^{stat} \rangle) e^{-\tilde{\Gamma}t} \quad \text{Согласно подходу скоростных уравнений}$$

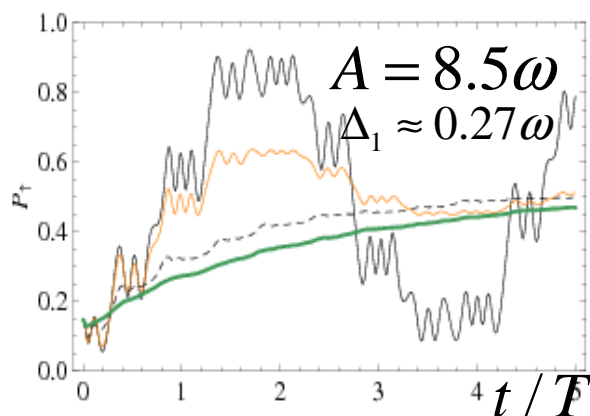
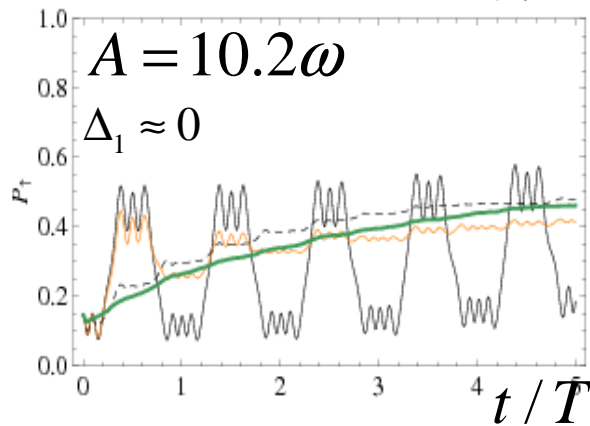
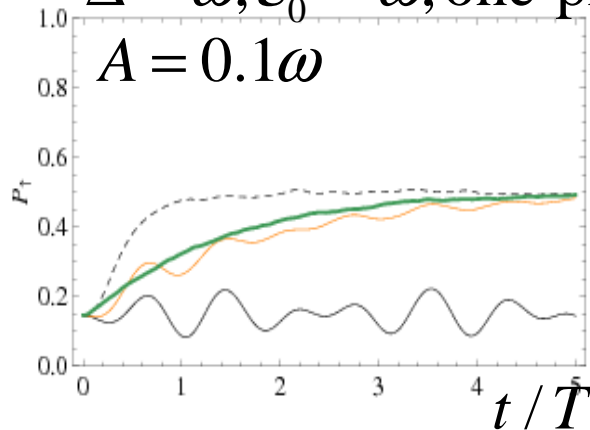
$$\langle \sigma_z^{stat} \rangle = \frac{\gamma}{2W + \gamma} \quad \tilde{\Gamma} = 2W + \gamma$$

В случае сильного внешнего воздействия:

- $W \gg \gamma \rightarrow \langle \sigma_z^{stat} \rangle \approx 0, t_{stat}^{-1} = \tilde{\Gamma}$
- $\gamma = 0 \rightarrow \langle \sigma_z^{stat} \rangle = 0, t_{stat}^{-1} = 2W$
- $W = 0 \rightarrow \langle \sigma_z^{stat} \rangle \approx 1$ (кубит на нижнем уровне)

3JJ qubit: усредненная динамика

$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = \omega$, one-photon resonance



После усреднения по 3000 реализация метода МК (что соответствует условиям эксперимента) наблюдается классическая Раби - динамика

Видно отличие релаксационной динамики в одной реализации – стохастическое случайное движение от усредненной динамики, когда наблюдается насыщение и выход населенности на стационарное значение
A. Gelman, A.M. Satanin, JETP lett. 91, 535-540 (2010)

Совпадение с моделью и экспериментом:
D. M. Berns et al. PRL 97, 150502 (2006)

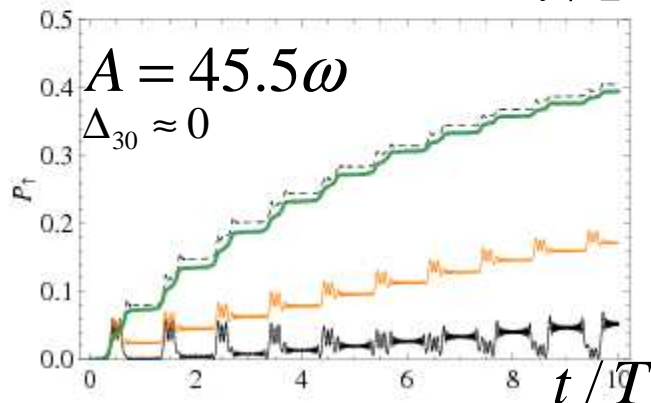
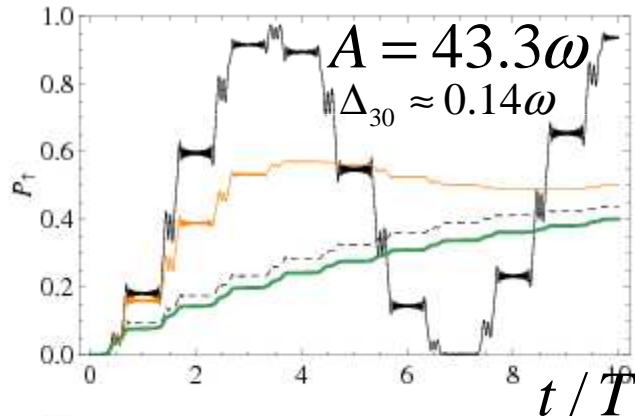
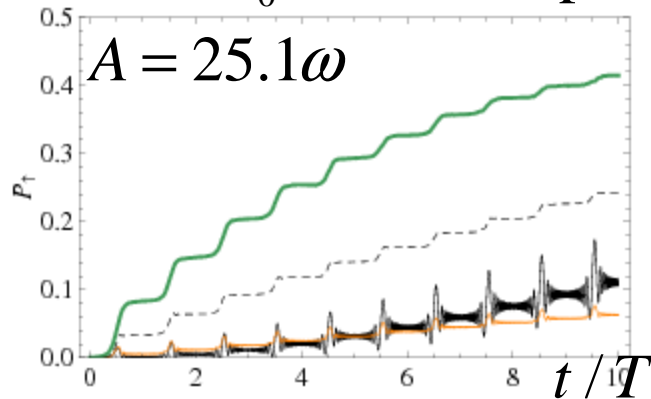
КПТ
(динамическая локализация)

$$W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2} \quad t_{stat}^{-1} = 2W$$

— $\Gamma = 0$ — $\Gamma = 0.09\omega$
- - - $\Gamma = 0.81\omega$ — $\Gamma = 4\omega$

3JJ qubit: усредненная динамика

$\Delta = \omega, \varepsilon_0 = 30\omega, 30$ -photon resonance, strong control field: $\varepsilon_0, A \gg \omega$



После усреднения по 3000 реализация метода МК (что соответствует условиям эксперимента) наблюдается классическая Раби - динамика

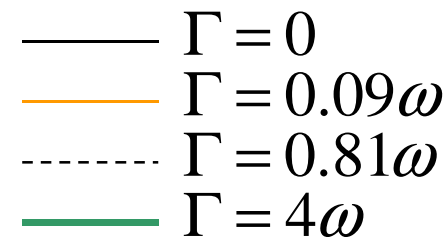
Видно отличие релаксационной динамики в одной реализации – стохастическое случайное движение от усредненной динамики, когда наблюдается насыщение и выход населенности на стационарное значение
A. Gelman, A.M. Satanin, JETP lett. 91, 535-540 (2010)

$$W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2} \quad t_{stat}^{-1} = 2W$$

PRL 97, 150502 (2006) D. M. Berns et al.

Параметры кубита могут быть получены из анализа результатов эксперимента (частота Раби, ширина резонанса, населенности уровней)

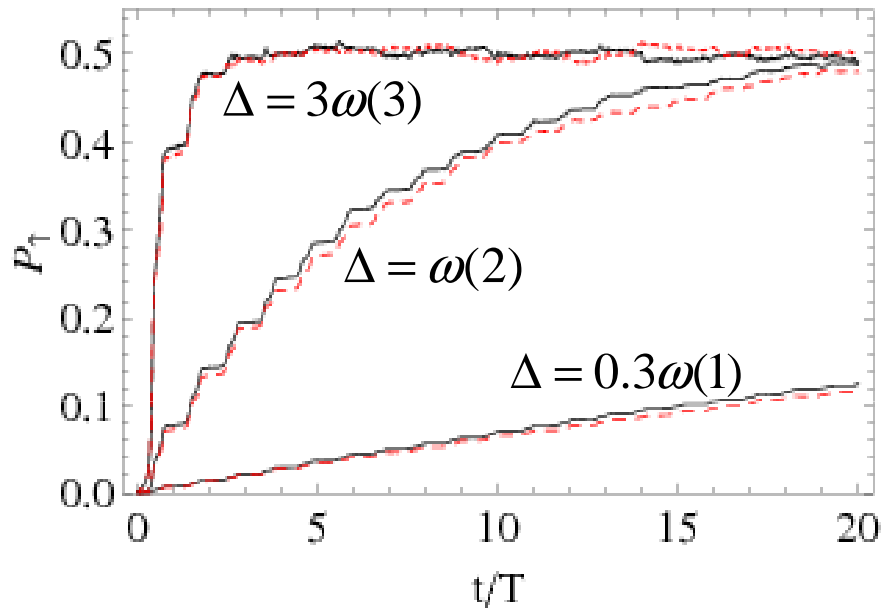
Even for CDT regime



3JJ qubit: усредненная динамика

При большом шуме $\Gamma = 4\omega$
 эффекты когерентности (КПТ) исчезают

Затухание поляризации на временах Γ^{-1}
 независимо от параметров поля



$\varepsilon_0 = 30\omega$

--- $A = 45.5\omega$ (CDT)
 — $A = 43.3\omega$ (Rabi)

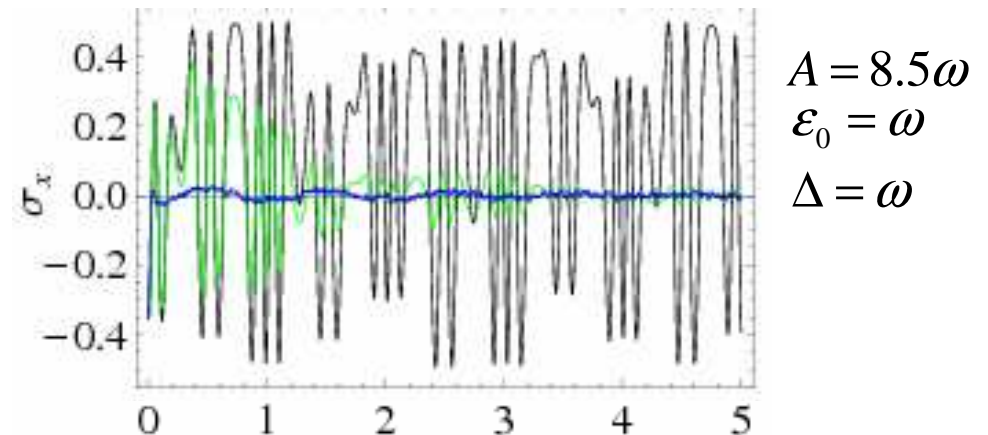
Перекрывание резонансов

$$W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2}$$

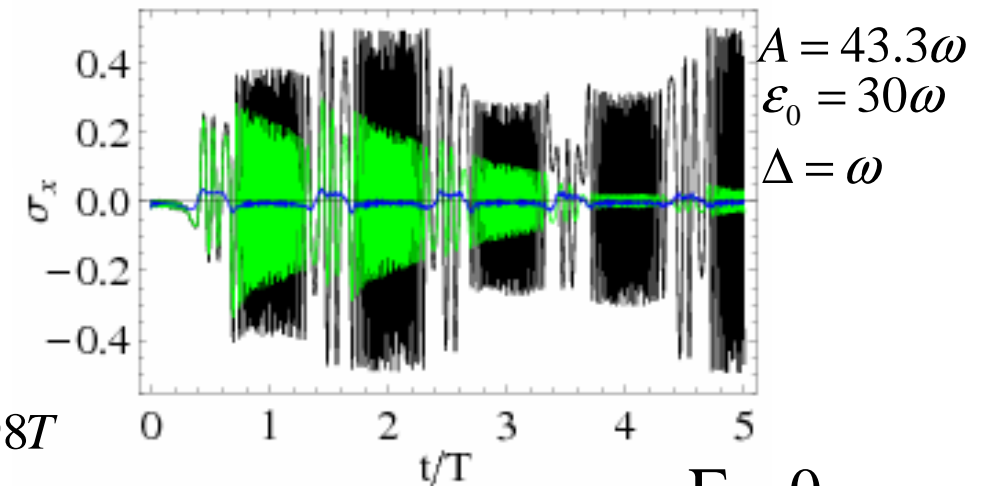
$\tilde{\Gamma}^{-1}(30, 45.5) = 5.98T$
 $\tilde{\Gamma}^{-1}(30, 43.3) = 5.48T$

$\Delta = \omega$

I. Kayanuma, Y. Phys. Rev B., 47, 9940 (1992)



$A = 8.5\omega$
 $\varepsilon_0 = \omega$
 $\Delta = \omega$



$A = 43.3\omega$
 $\varepsilon_0 = 30\omega$
 $\Delta = \omega$

— $\Gamma = 0$
 — $\Gamma = 0.09\omega$
 — $\Gamma = 4\omega$

Приложение к амплитудной спектроскопии

$$P_{\uparrow}(A, \varepsilon_0) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^2}{\Delta_n^2 + (\varepsilon_0 - n\omega)^2} \quad W = \frac{\Delta^2}{2} \sum_n \frac{\Gamma J_n^2(A/\omega)}{(\varepsilon_0 - \omega n)^2 + \Gamma^2}$$

$$\Delta_n = \Delta J_n(A/\omega)$$

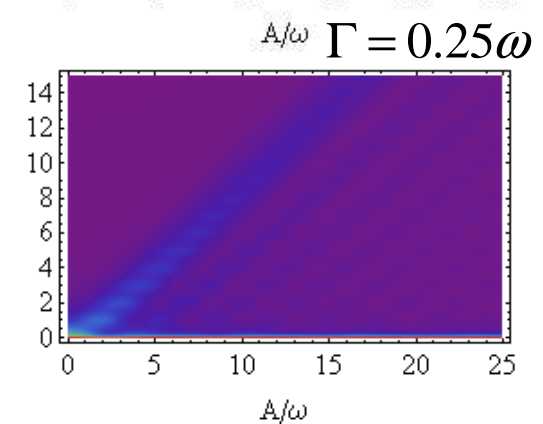
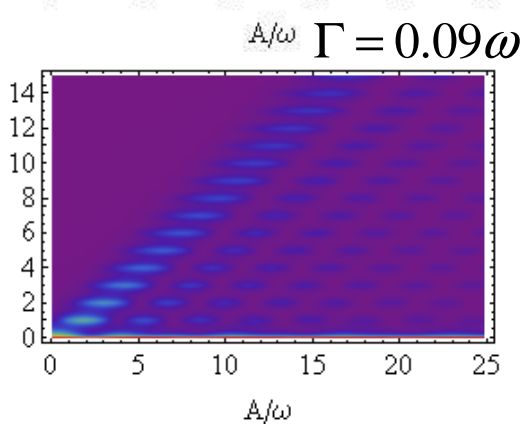
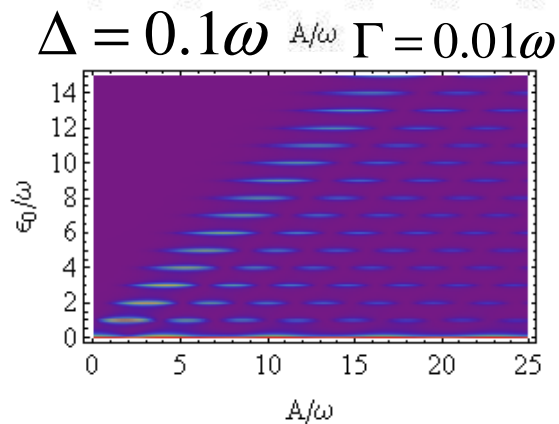
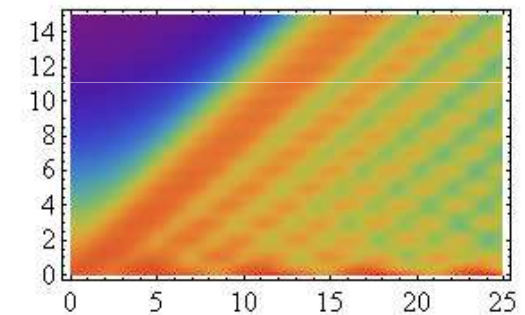
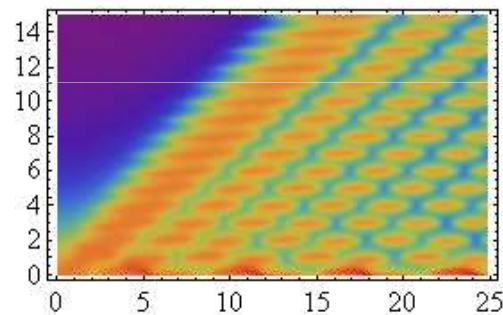
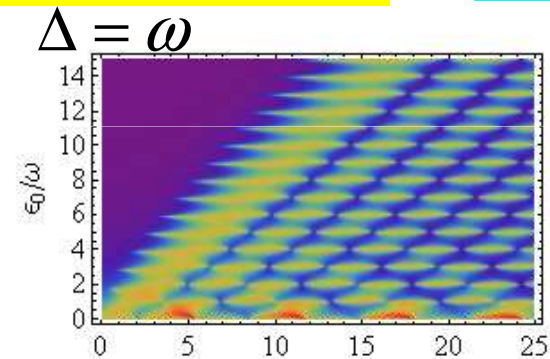
$$\delta\varepsilon = \Delta_n$$

$$\delta\varepsilon \approx \Gamma$$

Населенность верхнего уровня кубита после воздействия импульса длительностью $\tau = 10T$ постоянной амплитуды A при различных значениях шума (*D.Berns et.al., PRL 97, 150502 (2006)*)

N=3000 realizations

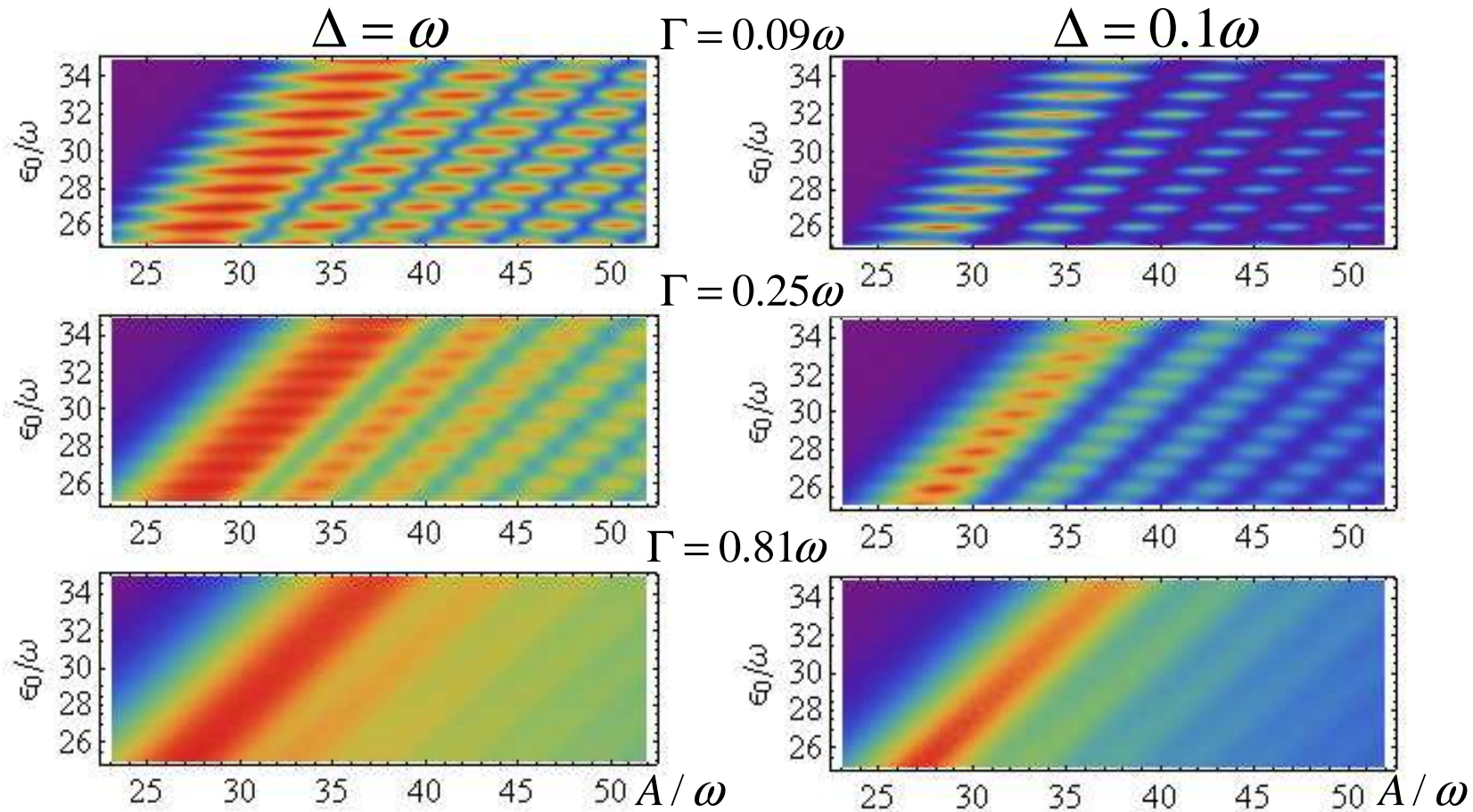
$$\Delta = 0.14\omega, A = 0 \div 50\omega, \varepsilon_0 = 0 \div 45\omega, \omega = 90\text{MHz} \Rightarrow \Gamma = (0.13 - 0.2)\omega$$



Приложение к амплитудной спектроскопии

Более контрастная картина наблюдается для резонансов высокого порядка.
Хорошее совпадение с экспериментом (*D.Berns et.al., PRL 97, 150502 (2006)*)

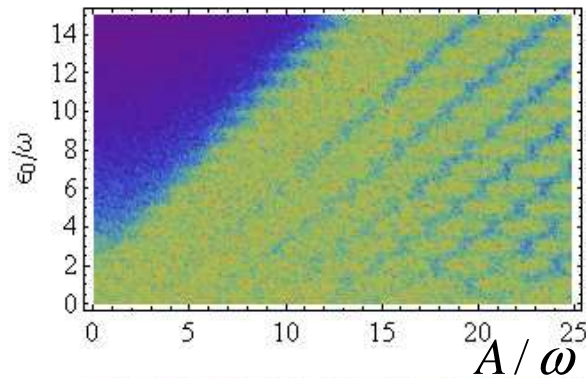
$$\Delta = 0.14\omega, A = 0 \div 50\omega, \varepsilon_0 = 0 \div 45\omega, \omega = 90\text{MHz} \Rightarrow \Gamma = (0.13 - 0.2)\omega$$



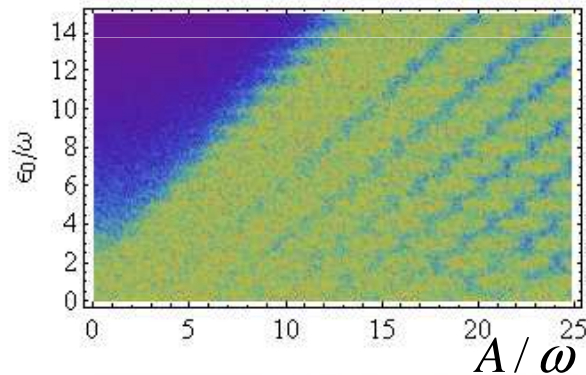
Подгонка параметров шума при прямом численном моделировании под результаты эксперимента позволит восстановить параметры образца с хорошей точностью

Приложение к амплитудной спектроскопии: измерение состояния кубита

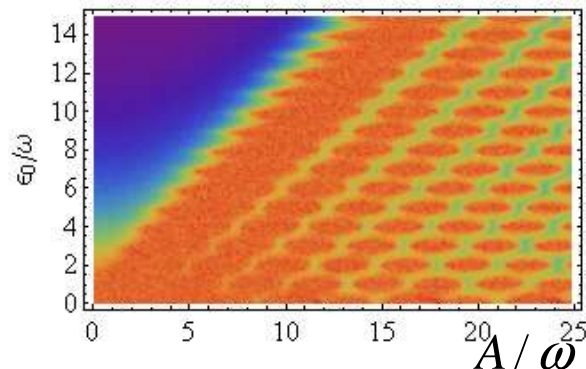
$$\Delta = \omega \quad \Gamma = 0.09\omega$$



$N = 10$ Зависимость интерференционной картины от числа реализаций метода (числа измерений в эксперименте).
Расчет без усреднения по времени.



$N = 100$

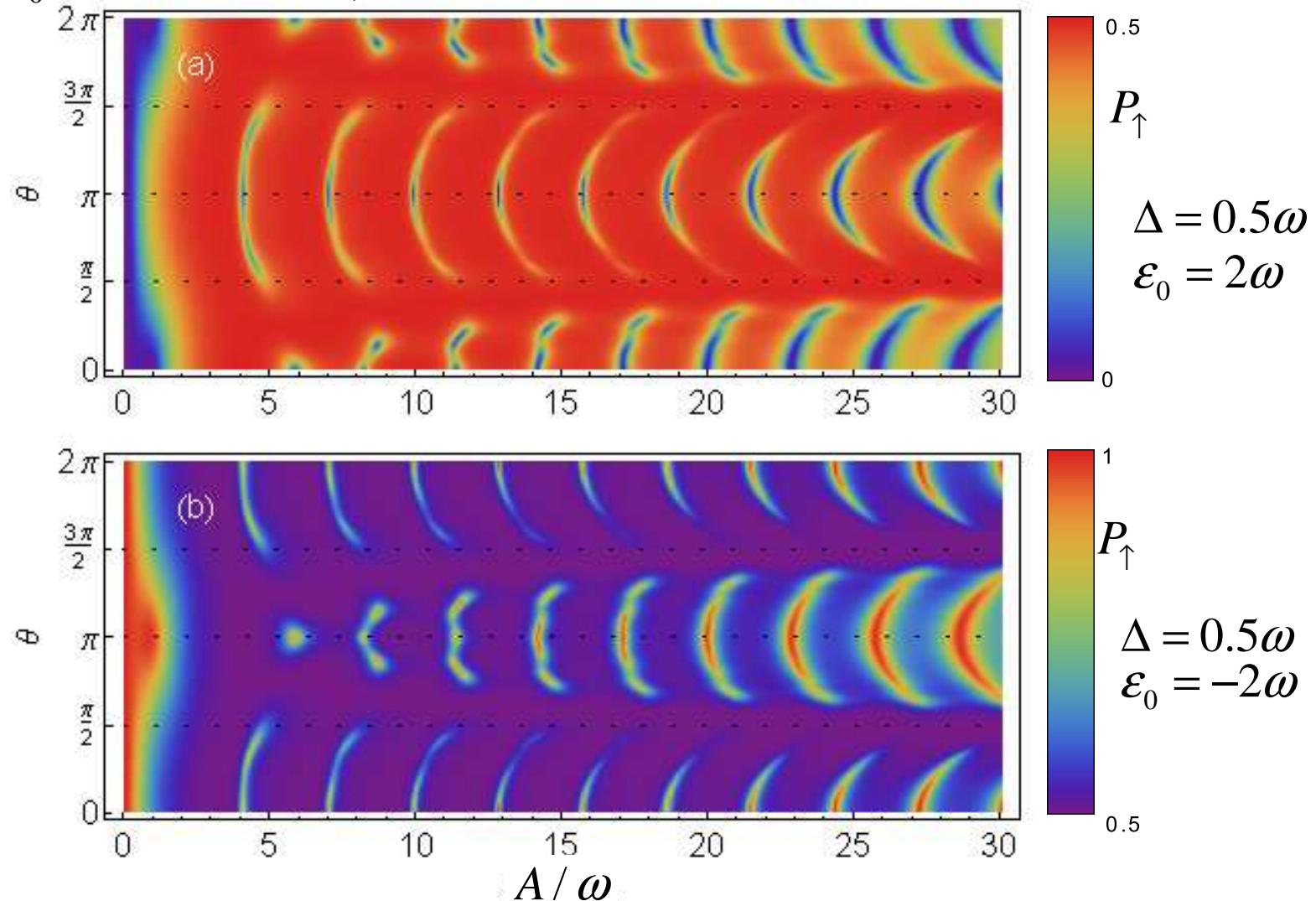


$N = 500$ In good correspondence with $N=3000$ in previous consideration and experiments. In experiments usually $N=3000-10000$.

A. I. Gelman, A.M. Satanin, JETP lett. 91, 535-540 (2010).

Приложение к амплитудной спектроскопии: фазовый контроль населенности

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + A(\cos \omega t + \mu \cos(2\omega t + \theta)) \quad \mu = 1/2$$



M. V. Denisenko, A. I. Gelman, A. M. Satanin (in preparation).