

# АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ, ПРОГНОЗА РОЖДАЕМОСТИ И ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ

Д.т.н., профессор Горшков Вячеслав Алексеевич

## Аннотация

Прогноз численности населения является важнейшей характеристикой социально-экономического развития государства. Существующие модели прогноза (по периоду удвоения, линейные, экспоненциальные, параболические, по передвижки возрастов и др.) не учитывают такой важнейший показатель, как функция распределения продолжительности жизни, что существенно снижает их адекватность. Хотя на определенных интервалах времени они достаточно адекватно описывают динамику изменения численности населения.

Прогноз динамики численности населения основан на прогнозе двух противоположных процессов: смертности и рождаемости.

Смертность населения характеризуется функцией распределения продолжительности жизни.

Рождаемость определяется:

- количеством женщин в репродуктивном возрасте,
- функцией распределения возраста женщины при рождении детей,
- коэффициентом фертильности.

Данные характеристики позволяют аналитически рассчитать прогноз количества рождений детей.

Смертность населения характеризуется только функцией распределения возраста дожития. Средняя продолжительность предстоящей жизни не дает полной картины распределения продолжительности жизни и не может полностью характеризовать состояние общественного здоровья. В литературе и интернете отсутствуют классические вероятностные характеристики продолжительности жизни, такие как функция распределения (интегральная) и функция плотности распределения (дифференциальная).

Аналитический расчет числа рождений и функция распределения возраста дожития позволяет прогнозировать численность населения, как в отдельных возрастных группах, так и ее суммарное значение.

В данной работе рассматриваются альтернативные методы прогнозирования рождаемости и продолжительности жизни, на основании которых оценивается прогноз численности населения.

В качестве информационной базы в данной работе используются половозрастные диаграммы 1991 - 2010 гг., представленные на сайте Федеральной службы государственной статистики.

Для возможности сопоставления фактических показателей в 2011-2014 г. с прогнозируемыми по излагаемой методике использовались возрастные диаграммы 1990-2010 г. Таким образом, в работе представлен прогноз, рассчитанный в 2010 г.

Ключевые слова: демография, прогноз, рождаемость, смертность, половозрастная диаграмма, функция распределения, продолжительность жизни, сверточный алгоритм

Alternative methods of calculation of the distribution of life expectancy,  
projected fertility and population

Dr., Professor Gorshkov Vjacheslav Alekseevich

## Abstract

The forecast of the population is an important characteristic of socio-economic development of the state. Existing prediction models (period doubling, linear, exponential, parabolic, the advancing ages and others) do not take into account such important factors as the distribution function of the duration of life, which significantly reduces their adequacy. However they adequately describe the dynamics of the population at certain intervals.

Forecast of the dynamics of a population based on a forecast of two opposite processes: mortality and fertility.

Mortality is characterized by the distribution function of life expectancy.

Fertility is determined by:

- the number of women in reproductive age,
- the distribution function of woman's age at child's birth,
- the fertility rate.

These characteristics allow us to calculate the forecast number of births analytically. Mortality is characterized only by the distribution function of the age of the survivor. The average life expectancy does not give a complete picture of the distribution of life expectancy and may not characterize the state of public health completely. In the literature and in the Internet, there are no classical probabilistic characteristics of longevity, such as the distribution function (the integral) and the density function of the distribution (differential).

Analytical calculation of the amount? of births and the distribution function of the age of the survivor allows us to predict the population in the individual age groups, and its total value.

The paper discusses alternative methods for predicting fertility and life expectancy, on the basis of what is estimated forecast and population. The sex age diagrams used in this work as the information base. .

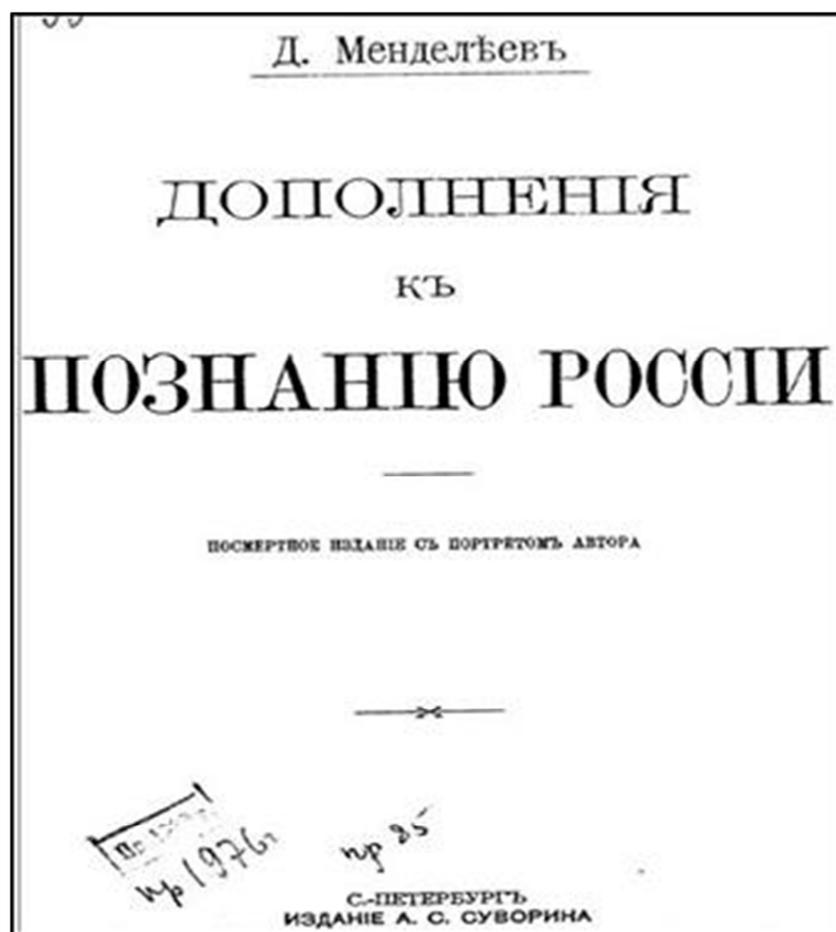
Keywords: demographics, prognosis, fertility, mortality, Sex-Age Diagram, distribution function, lifespan, convolution algorithm

## **Введение**

Сложившаяся сегодня сложнейшая демографическая ситуация в России представляет реальную угрозу ее целостности. Еще большее опасение представляет ее негативный прогноз на ближайшие 10-20 лет, ставящий под сомнение возможную модернизацию страны и ее экономический рост.

Сейчас, как никогда представляется актуальным высказывание И.Д.Менделеева *«Высшая цель политики яснее всего выражается в выработке условий для размножения людского»*, опубликованное в знаменитом демографическом труде «К познанию России» вышедшем в 1906 г.

Тезис И.Д. Менделеева в знаменитом демографическом труде «К познанию России» о том, что *высшая цель политики яснее всего выражается в выработке условий для размножения людского, представляется на сегодняшний день* как никогда актуальным. (Менделеев И.Д.«К познанию России», С-Петербург, Издание А.С. Суворина, 1906 г.



Точность метода Менделеева прогноза численности населения по отдельным регионам России, для «С.-А.С. Штатов» (США), для Кавказа (т.е. по регионам, в которых не было каких-либо значимых социальных потрясений) поражает.

Д.И.Менделеев, анализируя динамику годового прироста численности России в конце XIX в. для Европейской части России, определил, что она описывается геометрической прогрессией с коэффициентом 1,0144-1,018 (1,44-1,8%). Для своего долгосрочного прогноза Д.Менделеевым была принята не усредненная, а «осторожная и вероятная» его оценка – 1,15%.

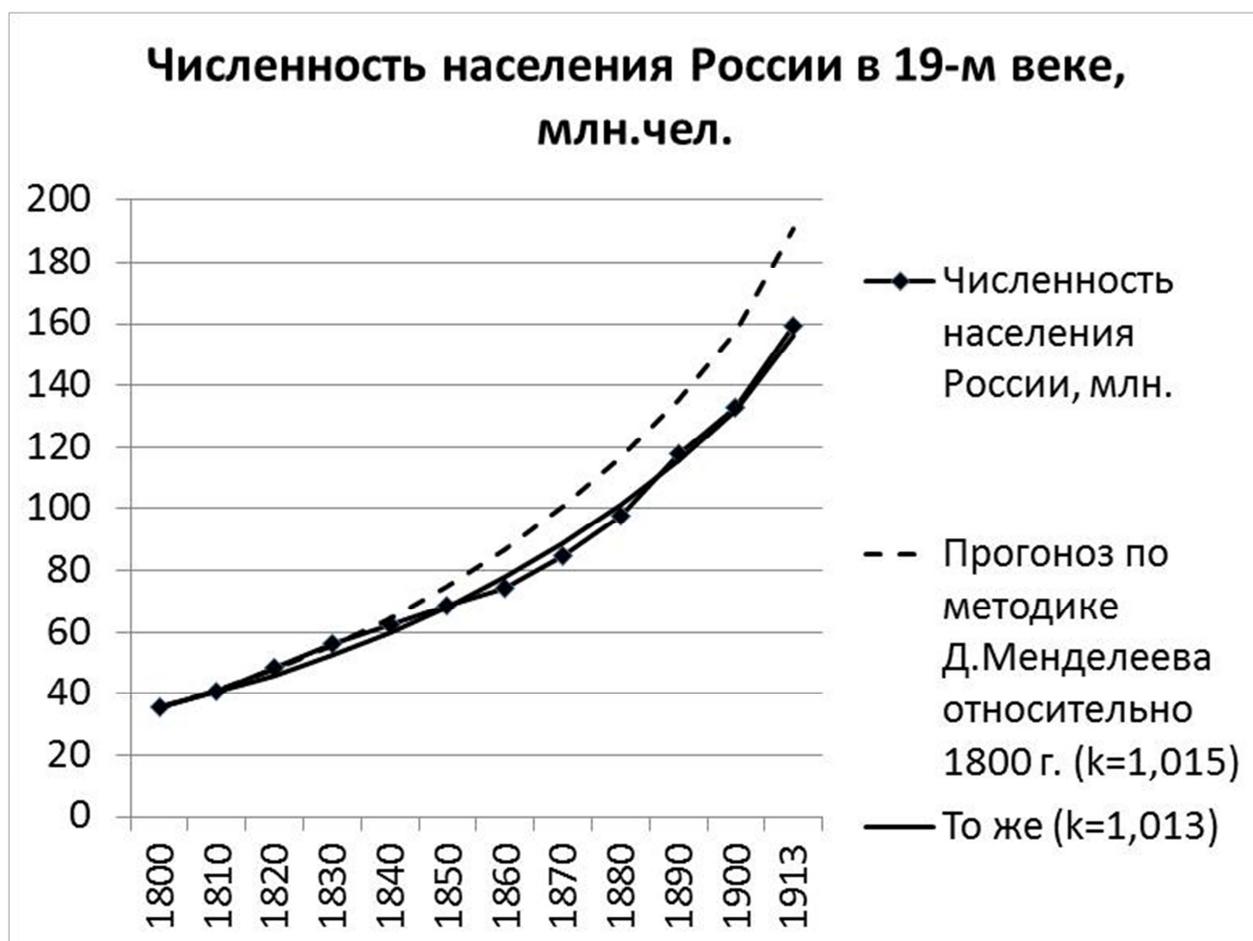


Рис.1. Рост численности населения России в период 1800-1913 г.

Если для конца 19-го в. такая модель может являться вполне адекватной, то для всего столетия, в котором нашествие Наполеона, и крымская война, и засухи, и голод и пр., прирост населения был существенно меньше.

?? Если для конца 19-го в. такая модель могла являться вполне адекватной, то для всего столетия, в котором имели место и нашествие Наполеона, и крымская война, и засухи, и голод и прочие факторы, существенно уменьшившие прирост населения, подобные усредненные коэффициенты являются не вполне приемлемыми.



Рис.2. Рост численности населения России в период 1925-2030 г.



Для Северо-Американских Соединенных Штатов (США) Д.И. Менделеев предложил регрессионное уравнение 3-го порядка. В переизданной книге

издательством «Айрис\_Пресс» в 2002 г. данная модель представлена на стр. 277, копию которой целесообразно представить полностью (рис.3).

ностью. Из отчета об 11-м цензусе 1890 г. заимствуем следующую таблицу общего числа жителей Штатов, выраженную в миллионах:

Перепись	Год	Число жителей, млн
1-я	1790	3,9
2-я	1800	5,3
3-я	1810	7,2
4-я	1820	9,6
5-я	1830	12,9
6-я	1840	17,1
7-я	1850	23,2
8-я	1860	31,4
9-я	1870	38,6
10-я	1880	50,2
11-я	1890	62,6

Для этих чисел, как и для всякого рода наблюдаемых естественных величин, во-первых, замечается естественность правильного их изменения, и, во-вторых, по существу дела необходимо допустить некоторую погрешность, доходящую, по всей вероятности, до сотен тысяч, т. е. до десятых миллиона. Принимая это во внимание, можно искать эмпирическую зависимость между изменением времени и измеренным числом жителей по способу наименьших квадратов. Указанный ряд чисел выражается следующей зависимостью:

$$y = 17,4843 + 5,10198 \left( \frac{n - 1840}{10} \right) + 0,633540 \left( \frac{n - 1840}{10} \right)^2 + 0,30407 \left( \frac{n - 1840}{10} \right)^3.$$

Рис. 3. Копия стр. 277 книги Д.И. Менделеева, переизданной издательством «Айрис\_Пресс»

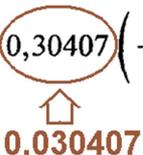
Необходимо отметить, что в представленном виде модель абсолютно не адекватна реальной динамике численности населения США. Ошибка доходит до 400%.

В своей демографической работе Д.И. Менделеев не только детально описывает предложенные модели, но и приводит все необходимые исходные данные для их получения. К сожалению, в большинстве современных отечественных работах такая информация отсутствует, что не дает оценить адекватность приводимых в них прогнозов.

Приведенные в работе исходные таблицы позволяют определить причину такой значительной ошибки.

Данная досадная ошибка обусловлена последним коэффициентом регрессионного уравнения, который должен быть в 10 раз меньше, т.е. формула должна иметь вид? имеет вид

$$y = 17,4843 + 5,10198 \left( \frac{n - 1840}{10} \right) + 0,633540 \left( \frac{n - 1840}{10} \right)^2 + 0,30407 \left( \frac{n - 1840}{10} \right)^3$$

  
0,030407

Конечно, это ошибка не Д.И. Менделеева, а издательства, чему свидетельством является отличие шрифтов текста и формулы. Очевидно, текст отсканирован, а формула с ошибками набрана вновь. Подобное неаккуратное отношение к переизданию наших великих исследований недопустимо.

Для современного читателя, вооруженного компьютерной техникой, такая модель, а именно представление аргумента, как разность текущего года и его среднего значения, поделенная на 10, может являться несколько непривычной. ,

При получении коэффициентов регрессионного уравнения методом наименьших квадратов, необходимо было вычисление 4-х значений годов во 2-й, 3-й,...,6-й степени. В арсенале вычислительных средств у Д.И. Менделеева был лишь арифмометр Однера. Этим и объясняется необходимость снижения значения аргумента в 40 раз.



Рис.4. Рост численности населения США в период 1890-2014 г.

Рис. 4 представляет фактическое изменение США и прогнозируемое изменение по модели Д.И. Менделеева. Как видно, модель достаточно адекватно описывает динамику численности населения в период 1890-1930 г. Однако, после 30-х годов, несмотря на значительный прирост населения за счет иммиграции, численность населения все же значительно отстает от прогнозируемой.

Следует отметить, что существующие модели прогноза (по периоду удвоения, линейные, экспоненциальные, параболические, по передвижки возрастов и др.) не учитывают такой важнейший показатель, как функция распределения продолжительности жизни, что существенно снижает их адекватность. Хотя на определенных интервалах времени они достаточно точно описывают динамику изменения численности населения.

Прогноз динамики численности населения основан на прогнозе двух противоположных процессов: смертности и рождаемости.

Смертность населения характеризуется функцией распределения продолжительности жизни.

Рождаемость определяется:

- количеством женщин в репродуктивном возрасте,
- функцией распределения возраста женщины при рождении ребенка,
- коэффициентом фертильности.

Эти характеристики позволяют аналитически рассчитать прогноз количества рождений детей.

В данной работе рассматриваются альтернативные методы прогнозирования рождаемости и продолжительности жизни, на основании чего оценивается прогноз и численности населения.

В качестве информационной базы в данной работе используются **половозрастные диаграммы** 1991 - 2010 гг., представленные на сайте Федеральной службы государственной статистики.

Для возможности сопоставления фактических показателей в 2011-2014 г. с прогнозируемыми по излагаемой методике использовались возрастные диаграммы 1990-2010 г.

## 1. Половозрастные диаграммы

Половозрастная диаграмма представляет распределение женского и мужского населения по возрасту. Ось абсцисс представляет количество людей, по оси ординат – возраст.

На рис.5 представлены распределения населения по возрасту в 2005 г. в Анголе, в стране, в которой на протяжении 20-ого в. не было каких-либо значимых социальных катаклизмов. Для такой страны вполне естественно, что чем больше возраст, тем меньшая численность населения.

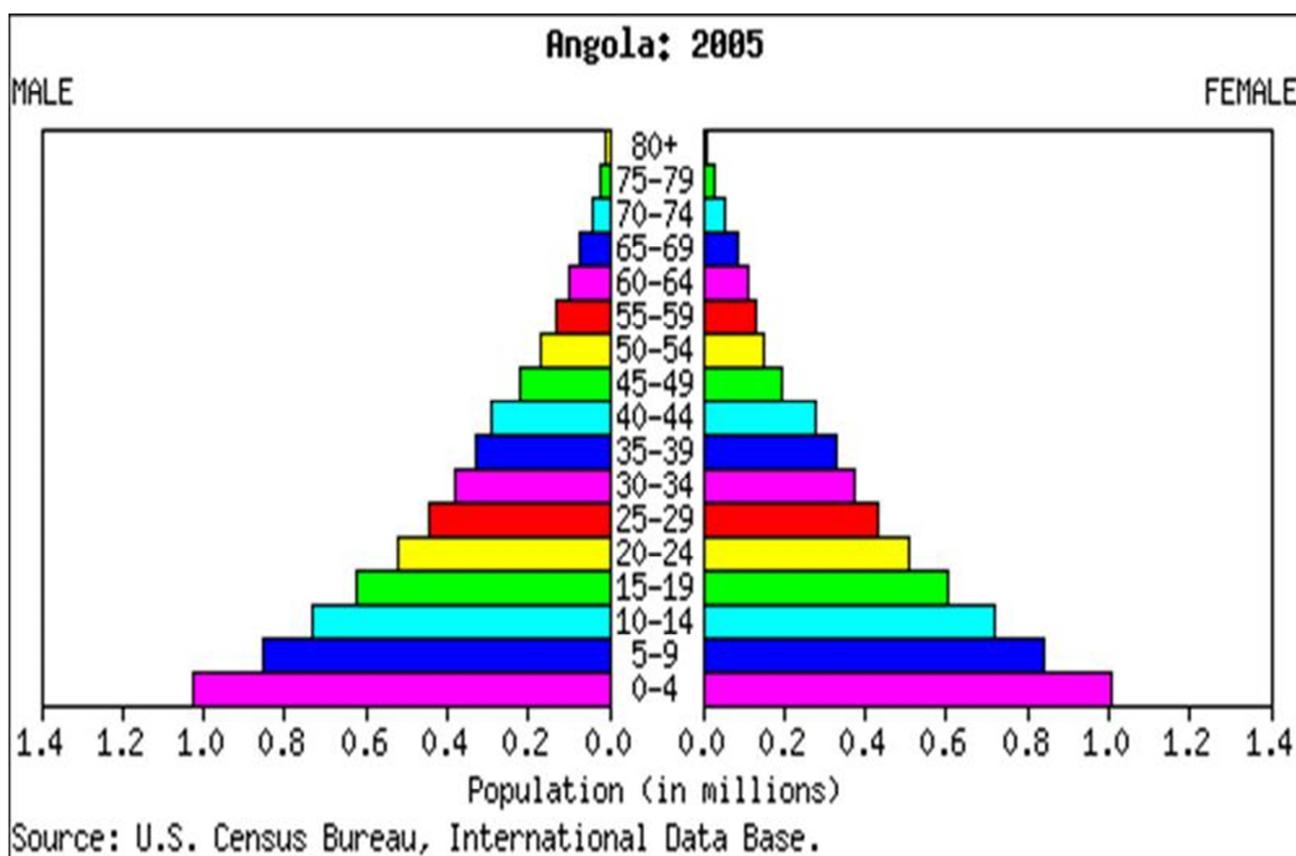


Рис.5. Половозрастная диаграмма Анголы в 2005 г.

Для США на половозрастной диаграмме достаточно наглядно представлено снижение рождаемости после 70-х годов (рис.6).

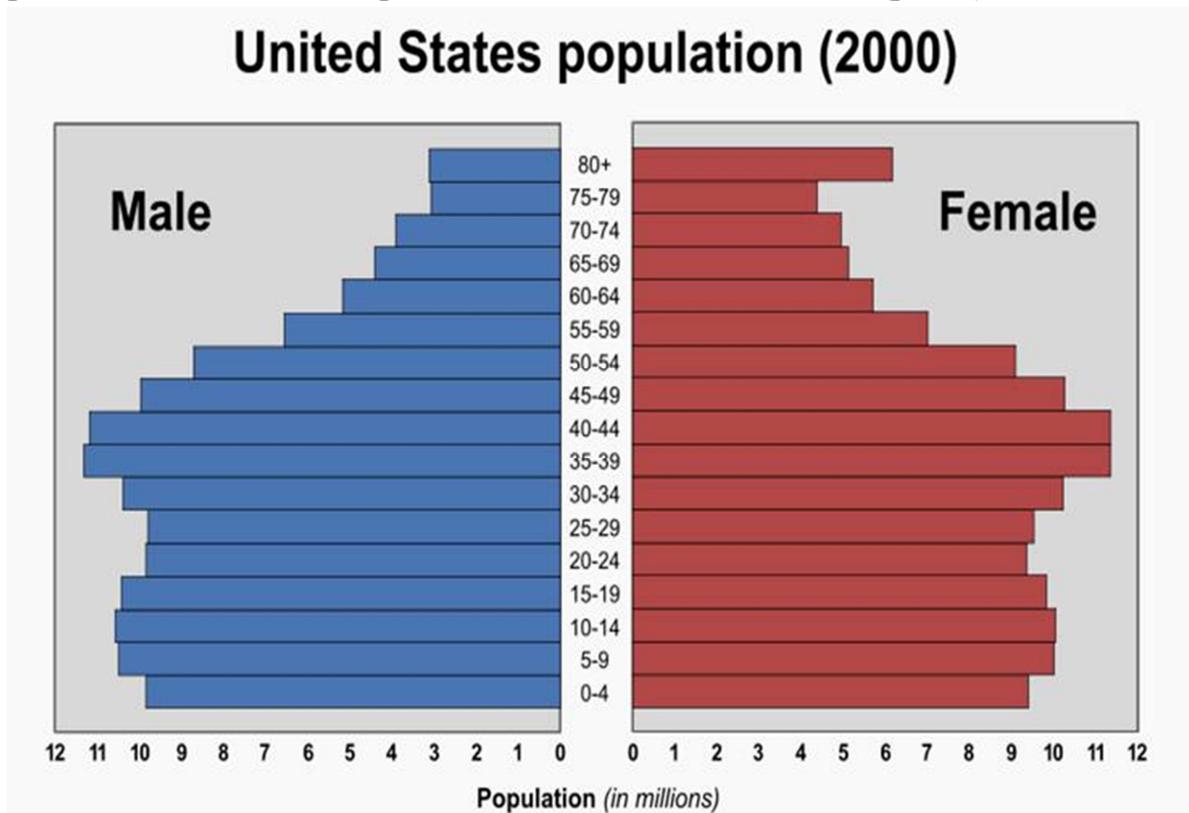


Рис. 6. Половозрастная диаграмма США в 2000 г

На диаграмме Германии 1997 г. видно снижение числа людей в возрасте 50-54 лет, что обусловлено 2-й мировой войной.

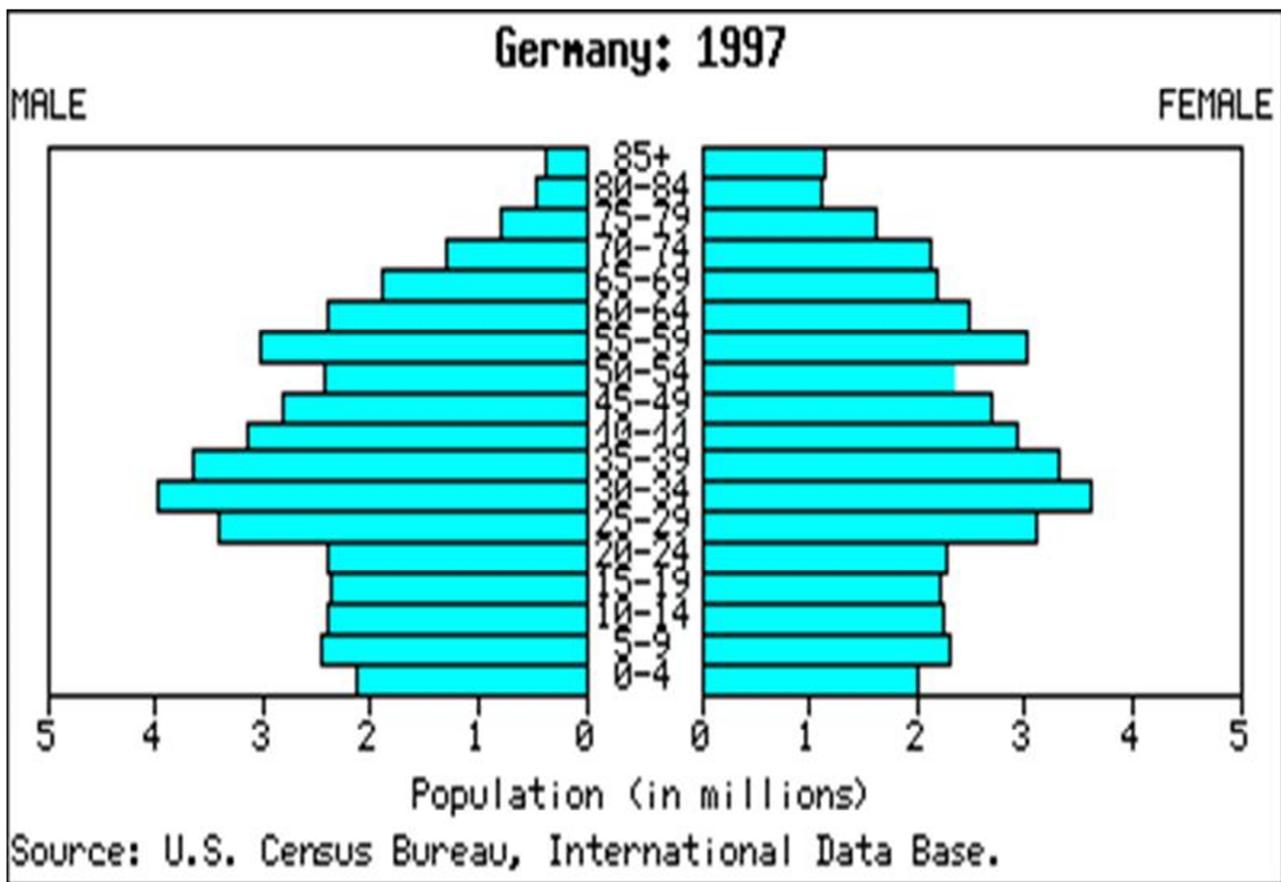


Рис. 7. Половозрастная диаграмма Германии в 1997 г.

На рис. 8 представлена возрастная диаграмма, представляющая распределение мужчин по возрасту на 1-е января 1980 г. (возрастная диаграмма женщин практически аналогична). Как видно, диаграмма отражает все социально-экономические катаклизмы, которые имели место в истории нашего государства. Такой сложной диаграммы нет ни у одной страны мира. Следует отметить, что при анализе влияния социально-экономических факторов на рождаемость по понятным причинам половозрастная диаграмма должна быть сдвинута на 1 год (9 месяцев) назад.

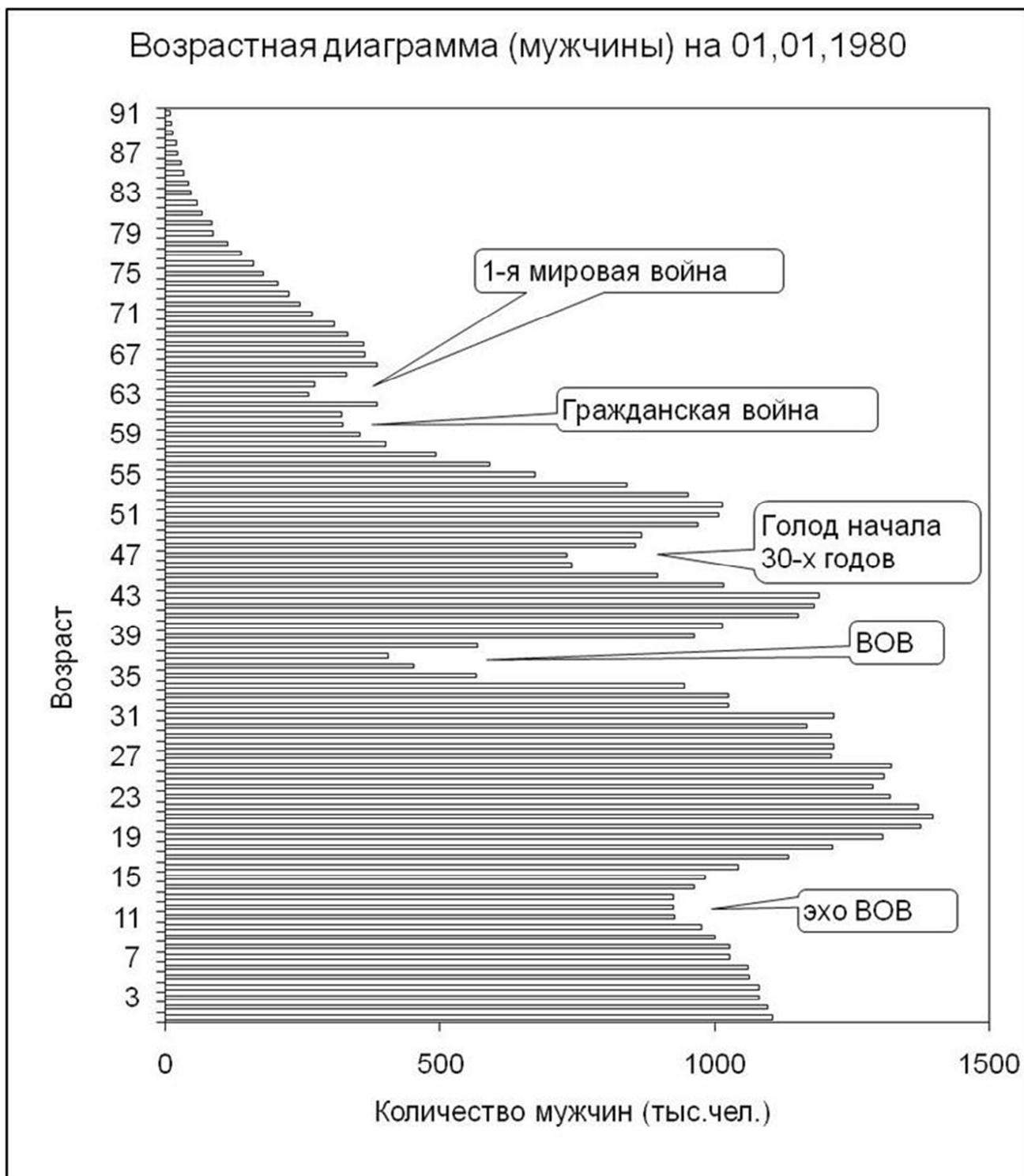


Рис. 7. Распределение численности мужчин в России в 1980 г.

На диаграмме видно снижение рождаемости в 60-х годах, что вызвано т.н. «эхом войны», т.е. снижением числа женщин в репродуктивном возрасте вследствие 2-й мировой войны.

Возрастные диаграммы являются весьма репрезентативными для демографических расчетов. Для их получения необязателен охват всего населения. В различных областях страны они имеют один и тот же вид. Такой же вид имеют диаграммы и для бывших республик СССР.

Так, на диаграммах для Белоруссии 2009 г. (рис.8) помимо провалов, обусловленных вышеизложенными причинами, имеет место значительное снижение рождаемости в 90-е годы.

Это что? Если ссылка, то ненадлежащая.. надо написать, что там за инфа и когда была дата последнего посещения (<http://www.demoscope.ru/weekly/2011/0469/analit01.php>).

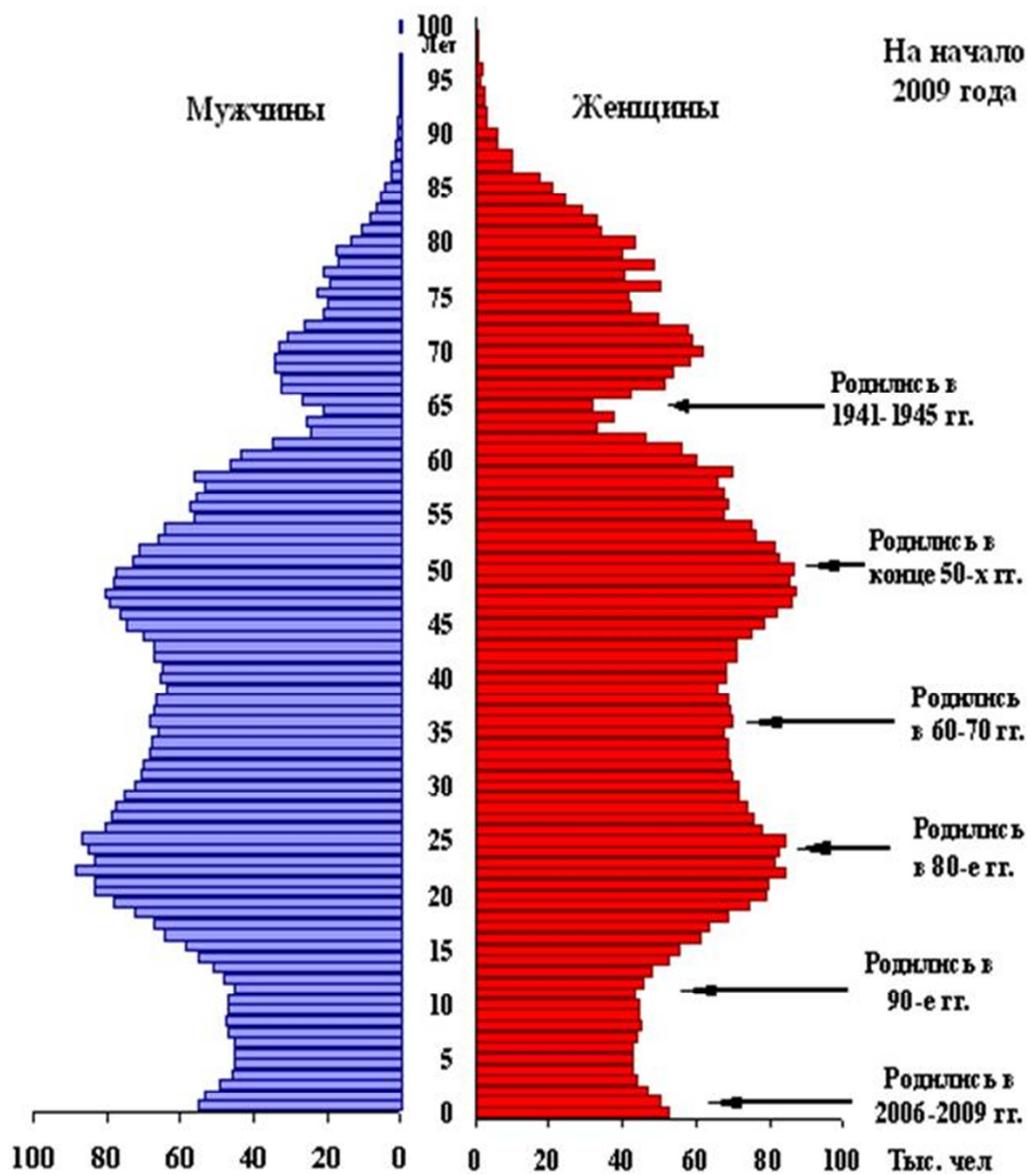


Рис. 8. Распределение численности мужчин в Белоруссии в 2009 г.

Возрастные диаграммы России и Украины практически тождественны (рис.9) (<http://www.demoscope.ru/weekly/2010/0405/tema02.php>). Здесь так же

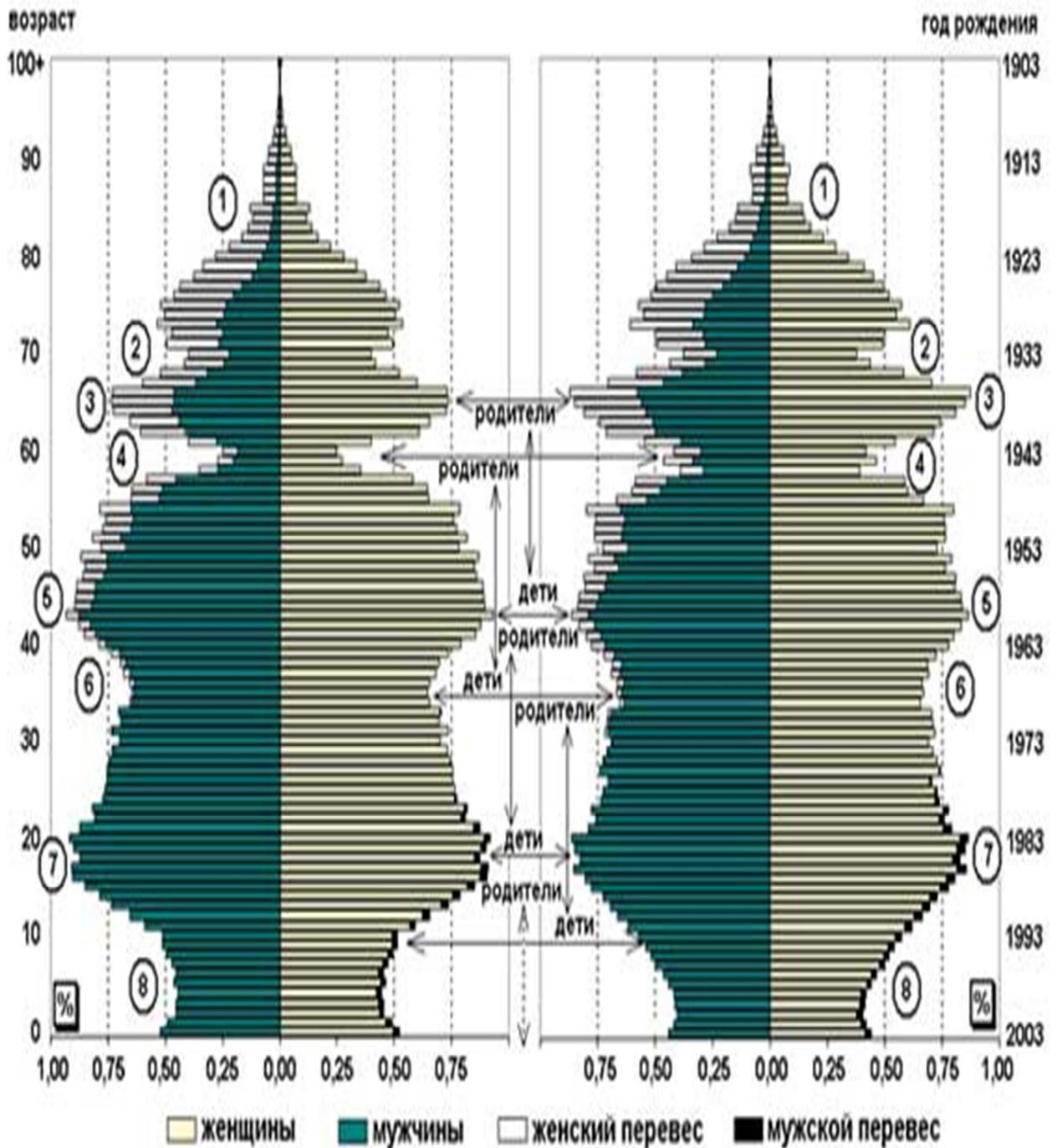


Рис. 9. Распределение численности населения в России (левая) и на Украине (правая) в 2003 г.

## 2. Расчет распределения продолжительности жизни

Продолжительность жизни характеризуется средней ожидаемой продолжительностью жизни при рождении и средней продолжительностью предстоящей жизни.

«Ожидаемая продолжительность жизни в возрасте  $x$  лет  $e_x$  и средняя продолжительность жизни  $e_0$  равны отношению числа человеко-лет, которое будет прожито в возрасте  $x$  лет и старше  $T_x$  к числу доживающих до данного

возраста  $l_x$ » (Кузьмин А.И. Основы демографии: курс лекций. – М.: РУДН, 2003. – 440 с., Рыбаковский Л.Л. Демографический понятийный словарь. <http://rybakovsky.ru/uchebnik1a18.html>, Елисеева И.И. Статистика. М.: Велби. 2004.- 441 с.) определяется как

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\sum_{i=x}^{x_{\max}} L_i}{l_x}, \quad e_0 = \frac{T_0}{l_0} = \frac{\sum_{i=0}^{x_{\max}} L_i}{l_0} = \frac{\sum_{i=0}^{x_{\max}} L_i}{100000}$$

Не совсем понятно значение 100 000 в знаменателе. Почему не 90 000? 110 000? 200 000?...

Но средняя продолжительность жизни не дает (как набившая оскомину характеристика «средняя температура по больнице») полного представления о распределении продолжительности жизни. Здесь необходимо получение функции распределения или, как минимум, среднего квадратического отклонения (СКО).

Так при средней продолжительности жизни в 70 лет и при СКО=1 вероятность дожития до 73 лет практически нулевая. А при СКО=2 также нулевой вероятности прожить до 76 лет.

Полную картину дает функция распределения (интегральная) или функция плотности распределения (дифференциальная) продолжительности жизни. Однако в демографической литературе данных функций не встречается.

Распределение продолжительности жизни может быть оценено по распределению возраста ухода из жизни. Однако такой статистики для России в открытой печати и интернете не найдено. В связи с этим, в данной работе оно восстанавливалось по смежным возрастным диаграммам (ВД), размещенным на сайте Росстата [Росстата <http://www.gks.ru>]. Возрастная диаграмма позволяет определить численность населения в различных возрастных группах и рассчитать средний возраст населения России по формуле

$$\bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^{100} N_t t}{\sum_{t=1}^{100} N_t},$$

где  $t$  – возраст,

$N_t$  - число жителей возраста.

Так средний возраст жителей России в 1990 составлял 34,9 года, а в 1991 – 35,0.

Две смежные диаграммы (рис.10) позволяют получить распределение продолжительности жизни.

Если, например, на ВД 1990 г. число жителей России в возрасте 40 лет равно 2 362 918, а на ВД 1991года число жителей России в возрасте 41 год равно 2 357 341, то разность ( $2\,362\,918 - 2\,357\,341 = 5577$ ) представляет суммарное число умерших, эмигрантов и иммигрантов (со знаком минус). В то же время, если сравнить число двухлетних детей 1990 г. рождения (2 454 150) с числом трехлетних 1991 г. (2 456 950), то их число даже увеличилось на 2 800. Возникает вопрос - откуда такая прибавка? Может ли она быть вызвана погрешностью ВД? Или доминирующим влиянием иммиграции над эмиграцией и смертностью в этой возрастной группе? Для более адекватной оценки распределения продолжительности жизни необходим учет распределений эмигрантов и иммигрантов по возрасту. Так включение в рассмотрение эмигрантов приводит к уменьшению оценки средней продолжительности жизни, тогда как иммигрантов к увеличению. Между тем, в силу не соизмеримости смертности после 40-50 лет с миграционными процессами, их неучет не приводит к существенным ошибкам.

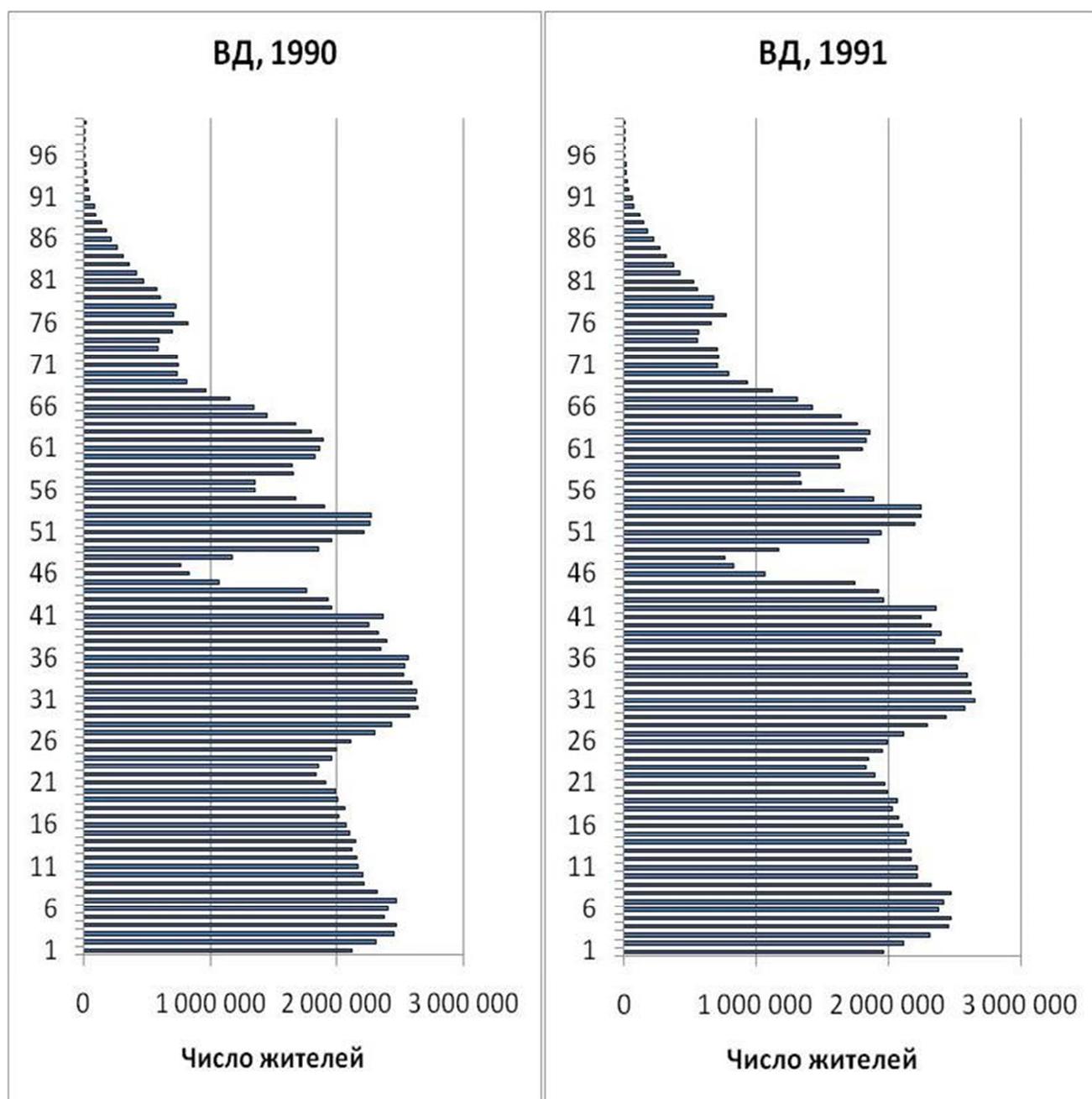


Рис. 10. Возрастные диаграммы

При построении функции распределения продолжительности жизни (возраста смерти) были сделаны следующие допущения:

1. Т.к. последняя возрастная группа в возрастной диаграмме представляет число жителей, достигших 100 и более лет, будем полагать, что максимальный возраст составляет 100 лет. Т.е. доля ушедших в возрасте 100 лет и будет равна 1, что приведет к пренебрежимо малому снижению средней продолжительности жизни.
2. Чтобы исключить отрицательные значения вероятностей в распределении возраста убытия (из-за иммиграционных процессов), отрицательные

значения убытий будут игнорироваться и обнуляться, что приведет к незначительному завышению оценки средней продолжительности жизни .

Число ушедших в возрасте  $t$  в год  $\tau$  определяется из смежных возрастных диаграмм по формуле

$$N_d(t) = N_t^\tau - N_{t-1}^{\tau-1}$$

Где  $N_t^\tau$  - число жителей по ВД в год  $\tau$  в возрасте  $t$ ,

$N_{t-1}^{\tau-1}$  - число жителей по ВД в год  $\tau-1$  в возрасте  $t-1$ ,

На рис. 11 представлено распределение возраста убытия в 1991 г.



Рис.11. Распределение возраста убытия

Обращает на себя внимание группа ушедших из жизни (и эмигрантов) молодых людей в возрасте 19-22 года (более 30 тыс. человек). Здесь необходимо отметить, что автор не располагает объективными данными, позволяющими адекватно объяснить причину этого факта.

Локальные минимумы и максимумы в 60-х и 70-х годах связаны не с какими-то особенностями медицинского характера, а с неравномерным распределением численности людей различных возрастных групп (рис.1).

Данная диаграмма позволяет вычислить средний возраст убытия как

$$\bar{N}_d(t) = \frac{\sum_{t=1}^{100} N_d(t)}{100}.$$

Так, средний возраст убытия в 1991 г. составлял 68,8 лет. Однако данная величина не является средней продолжительностью жизни, т.к. она зависит от распределения жителей по возрасту, т.е. от ВД.

Если отнести число убиравших людей к общей численности соответствующей возрастной группы (из возрастной диаграммы), получим распределение доли убытия в соответствующей возрастной группе.

Это доля является ничем иным, как условной вероятностью убытия в возрасте  $t$  при условии дожития до него  $P(t/t-1)$ , т.е. не ухода в предыдущие возрастные группы 1,2,... $t-1$  (рис.12).

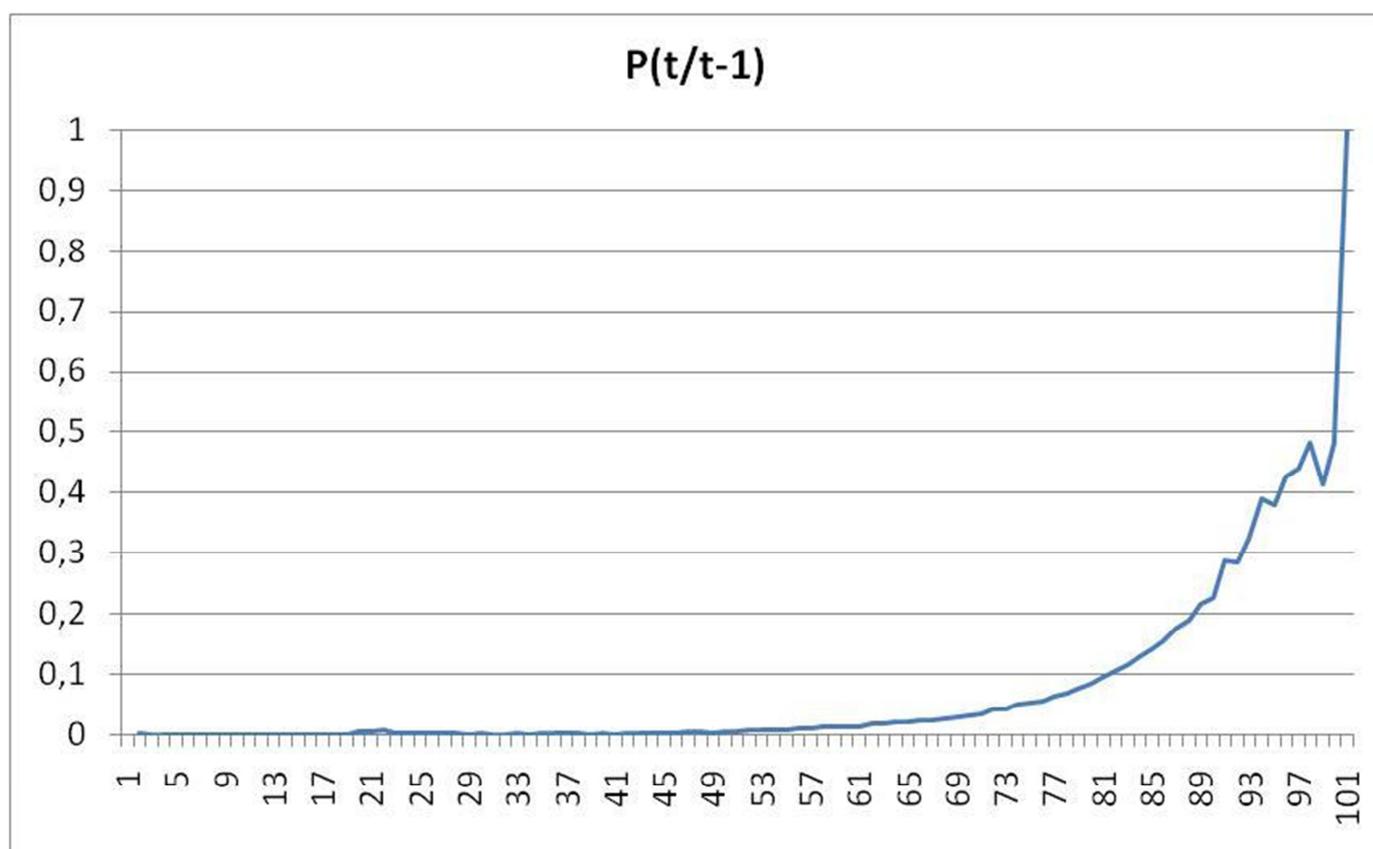


Рис.12. Зависимость вероятности ухода от возраста

Как видно, с увеличением возраста, начиная с 50 лет, вероятность убытия монотонно возрастает, что вполне объяснимо и логично. Колебания

распределения в области старших возрастов обусловлены низкой статистикой долгожителей.

Для получения распределения продолжительности жизни необходимо вычислить вероятность ухода в данном возрасте, которая будет равна произведению вероятности дожития до данной возрастной группы  $P_l(t-1)$ , т.е. вероятность не ухода в предыдущие возрастные группы  $1, 2, \dots, t-1$  на условную вероятность ухода в текущей возрастной группе  $t$   $P(t/t-1)$

$$P(t) = P_l(t-1)P(t/t-1).$$

Поскольку данный метод не учитывает смертность в возрасте до 1-года, вероятность ухода в 1-й год ( $t=1$ ) определяется как

$$P(1) = P(1/0)$$

Вероятность дожития до возрастной группы  $t$ , т.е. не ухода в предыдущие возрастные группы  $1, 2, \dots, t-1$ , равна произведению вероятностей не ухода в каждой из предыдущих возрастных групп

$$P_l(t-1) = \prod_{t'=1}^{t-1} (1 - P(t'/t'-1)).$$

На рис. 13 представлена зависимость вероятности дожития до возраста  $t$ .

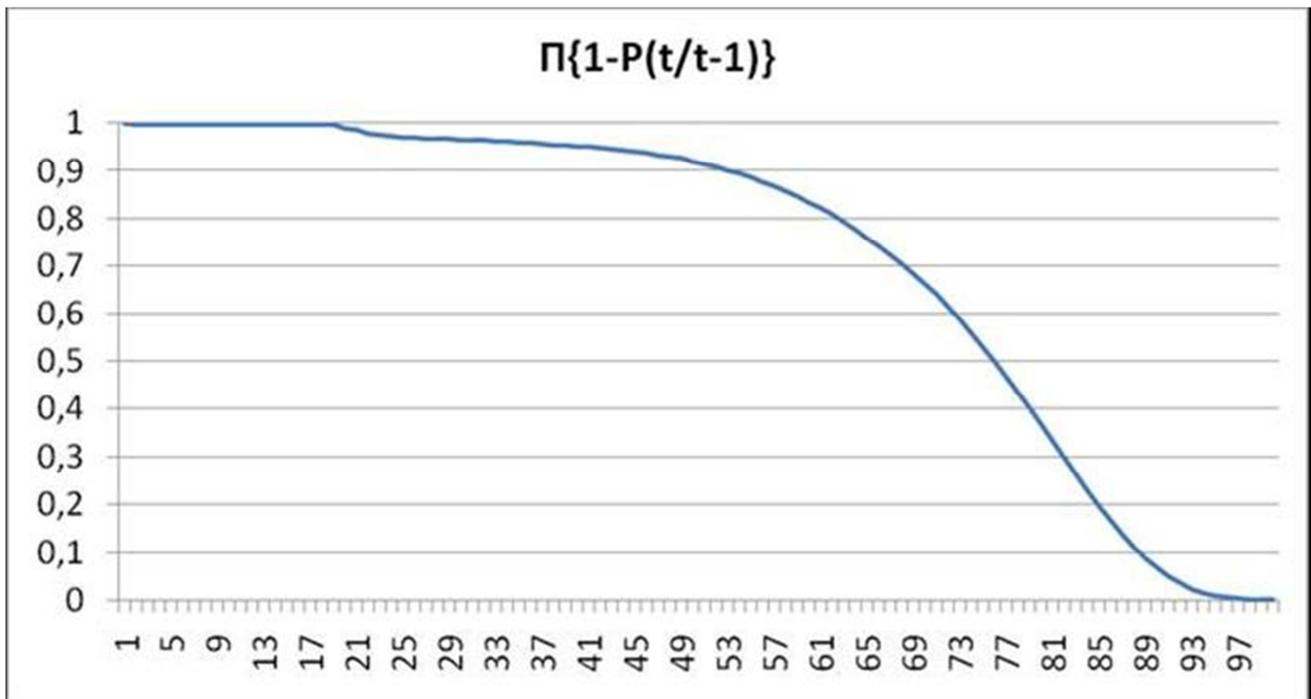


Рис. 13. Зависимость вероятности дожития

Окончательно получаем

$$P(t) = \left\{ \prod_{t'=1}^{t-1} (1 - P(t'/t'-1)) \right\} P(t/t-1)$$

Значение вероятности ухода в столетнем возрасте при условии дожития до него принимается равной единице

$$P(100/99) = 1$$

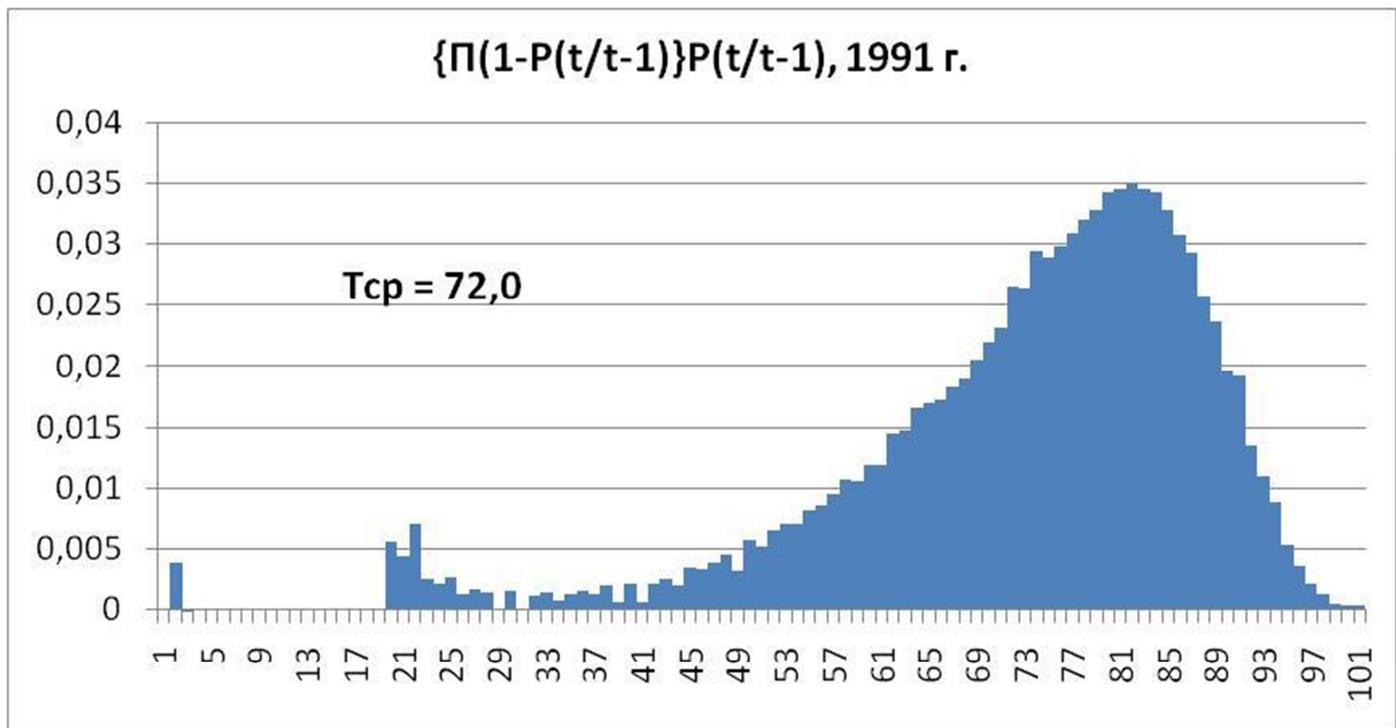


Рис.14. Вероятность ухода в возрасте  $t$

Рис.14 представляет зависимость вероятности ухода в возрасте  $t$ , которая численно (поскольку интервал разбиения равен 1-му году) равна выборочной функции плотности распределения возраста ухода (с размерностью [1/год]).

Весьма драматично выглядит интервал в возрасте 19-21 год, который наглядно представляет увеличение доли убития молодых людей в этом возрасте в начале 90-х годов.

Учитывая то, что интервал квантования составляет 1 год, функция распределения продолжительности жизни (рис.15) численно определяется как

$$F(t) = \sum_{t'=0}^t P(t')$$

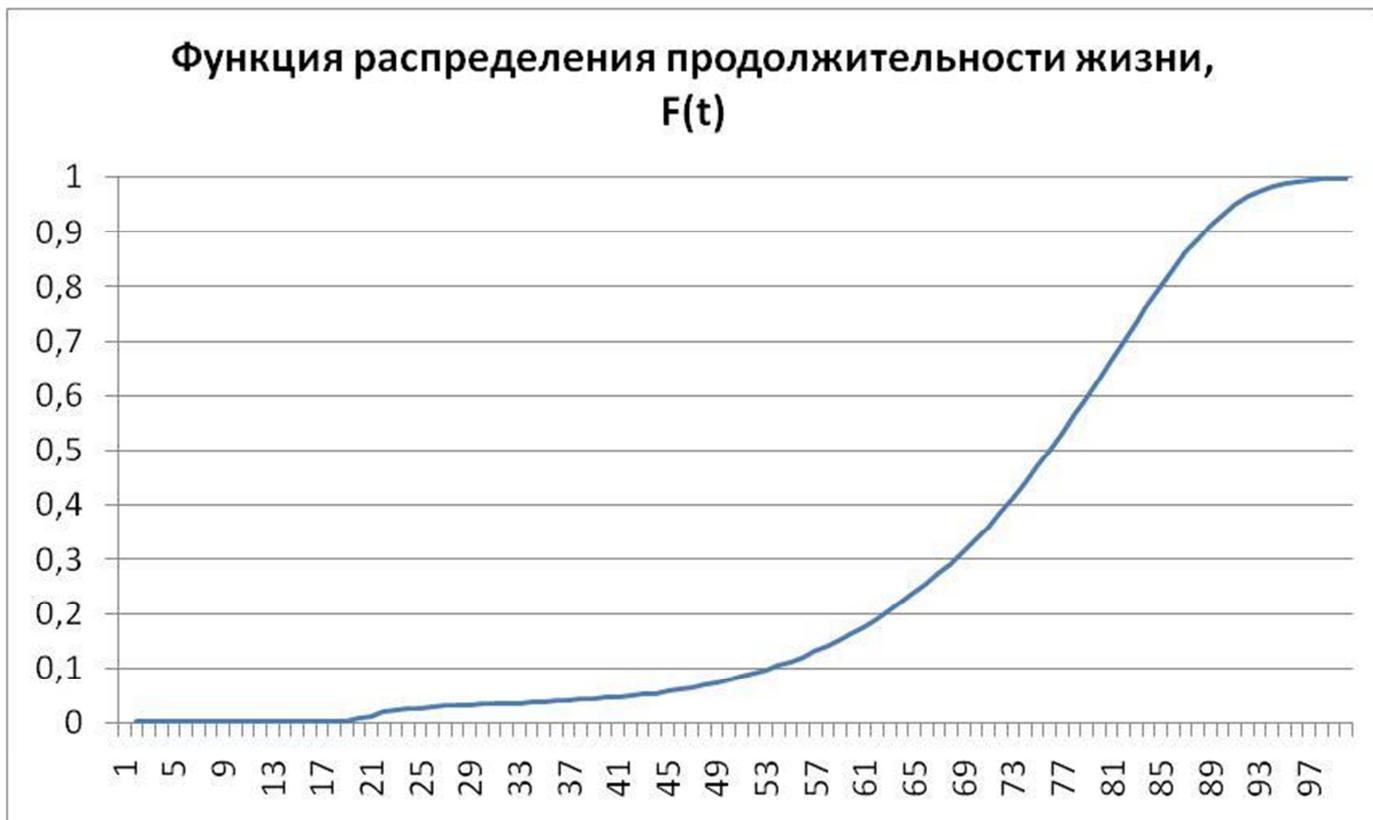


Рис.15. Функция распределения продолжительности жизни в 1991 г.

Не трудно убедиться, что сумма всех вероятностей на всем интервале возрастов равна единице

$$\sum_{t'=1}^{100} P(t') = P(1/0) + \sum_{t=2}^{100} \left\{ \prod_{t'=1}^{t-1} (1 - P(t'/t'-1)) \right\} P(t/t-1) = 1$$

Средняя продолжительность жизни определяется как

$$\bar{T} = \sum_{t=1}^{100} tP(t)$$

В 1991 году средняя продолжительность жизни составляла 70 лет. Это значение существенно выше общепринятого.

Приложение 1 представляет исходные данные (возрастные диаграммы) и промежуточные результаты вычислений, позволяющие проверить адекватность проведенного анализа для 1991 года.



Рис. 16. Функции плотности распределения продолжительности жизни в 2010 г.

Функция плотности распределения продолжительности жизни в 2010 г. (рис. 16) трансформировалась из двухмодальной в 1991 г. в логически объяснимую колоколообразную одномодальную функцию.

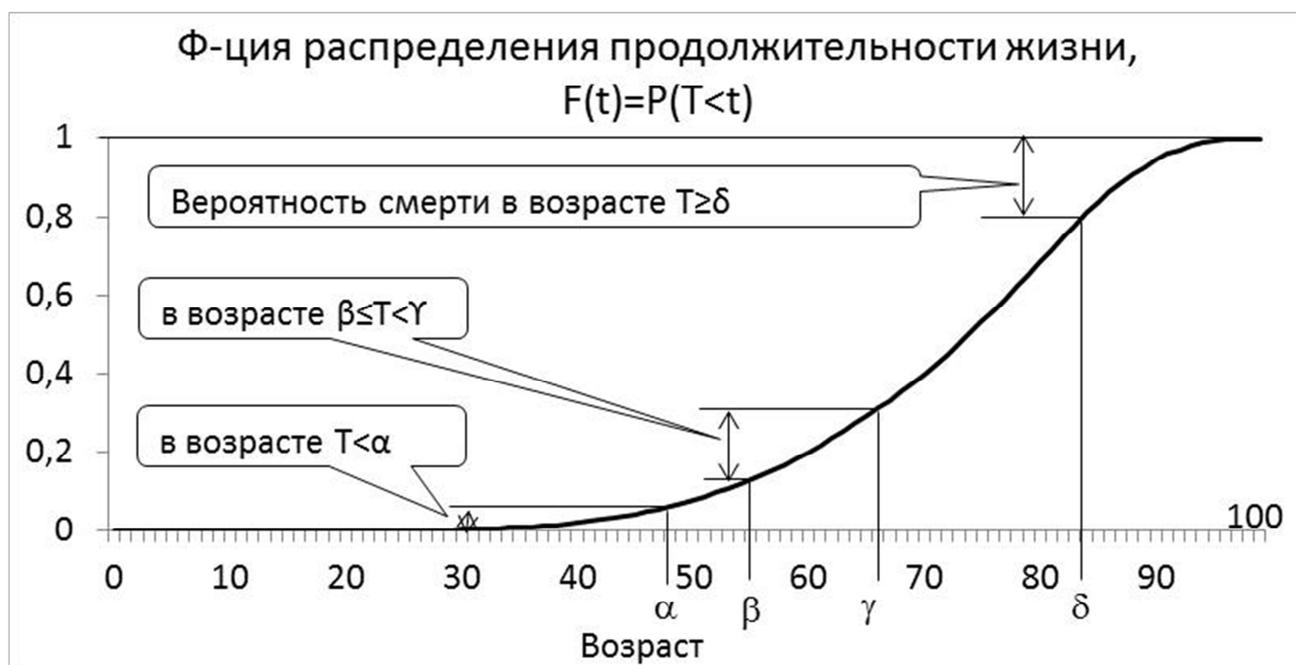


Рис. 17. Функция распределения возраста ухода из жизни  $F(t) = P(T < t)$  в 2010 г.

На рис. 17 представлена функция распределения возраста ухода из жизни в 2010 г., которая позволяет определить вероятности этого события в любые интервалы возрастов.

Следует отметить, что число убывших в возрасте  $t < 30$  лет и  $t > 95$ , определяемое по смежным возрастным диаграммам 2009, 2010 годов, статистически не устойчиво. В этой связи значение функции распределения для данных диапазонов характеризуется существенной погрешностью и её значения целесообразно рассчитывать не по смежным возрастным диаграммам.

На основании данной функции распределения можно получить значения вероятности дожития  $P_d(t)=1-F(t)$  до возраста  $t$  (табл. 1)

Табл. 1. Вероятность дожития  $P_d(t)=1-F(t)$  до возраста  $t$

t	P(t)	t	P(t)	t	P(t)	t	P(t)	t	P(t)	t	P(t)	t	P(t)
29	0,9987	39	0,984	49	0,93	59	0,82	69	0,63	79	0,35	89	0,0741
30	0,9985	40	0,980	50	0,92	60	0,80	70	0,60	80	0,31	90	0,0553
31	0,9978	41	0,977	51	0,91	61	0,78	71	0,58	81	0,28	91	0,0397
32	0,9971	42	0,973	52	0,90	62	0,77	72	0,55	82	0,25	92	0,0289
33	0,9960	43	0,969	53	0,89	63	0,75	73	0,53	83	0,22	93	0,0191
34	0,9945	44	0,964	54	0,88	64	0,73	74	0,50	84	0,19	94	0,0116
35	0,9927	45	0,959	55	0,87	65	0,71	75	0,47	85	0,16	95	0,0070
36	0,9909	46	0,953	56	0,86	66	0,69	76	0,44	86	0,14	96	0,0036
37	0,9887	47	0,946	57	0,85	67	0,67	77	0,41	87	0,11	97	0,0023
38	0,9864	48	0,939	58	0,83	68	0,65	78	0,38	88	0,09	98	0,0013

Практически на всем 20-летнем интервале происходило увеличение среднего возраста населения России (рис.18).

В силу асимметричности распределения продолжительности жизни средний возраст ухода несколько ниже, чем возраст дожития для вероятности 0,5.



Рис. 18. Изменение среднего возраста населения



Рис. 19. Средний возраст ухода

Средний возраст ухода (рис.19) коррелирован со средней продолжительностью жизни, но не эквивалентен ей, поскольку определяется распределением жителей по возрасту, т.е. возрастной диаграммой.

Рис.20 представляет изменение средней продолжительности жизни, рассчитанная по изложенной методике, а также данные Росстата, ООН [Life expectancy at birth. [http://www.unescap.org/stat/data/syb2008/syb2008\\_web/index.asp](http://www.unescap.org/stat/data/syb2008/syb2008_web/index.asp)], ЦРУ США [<https://www.cia.gov/>].



Рис.20. Изменение средней продолжительности предстоящей жизни

Аналогично могут быть получены данные характеристики отдельно для женщин и мужчин.

### 3. Прогноз рождаемости

Изменение численности населения помимо распределения продолжительности жизни определяется также динамикой рождаемости.

Число новорожденных  $y(t)$  в год  $t$  определяется количеством женщин  $y(t)$  и функцией плотности распределения их возраста при рождении ребенка  $w(k)$ . При определении функции  $w(k)$  на интервале возрастов 0-100 (что приводит к учету только женщин в репродуктивном возрасте) число новорожденных при условии, что все женщины рожают по одному ребенку, **вычисляется** на основании свертки функций как

$$y(t) = \sum_{k=0}^t x(k)w(t-k) = \sum_{k=0}^t x(t-k)w(k).$$

Учитывая дискретный характер ряда рождаемости, его описание проще проводить с применением дискретного преобразования Лапласа или Z-преобразования.

Свертка функций в Z-преобразовании имеет вид

$$Y(z) = X(z)W(z)$$

Таким образом, связь ряда числа рождений с рядом численности женщин описывается динамическим звеном с передаточной функцией  $W(z)$ , представляющей собой Z-преобразование функции плотности распределения возраста женщин при рождении (рис.21).

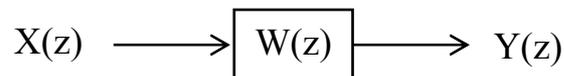


Рис. 21. Связь ряда числа рождений с рядом численности женщин

Точный расчет рождаемости может быть проведен с помощью структурной схемы, представленной на рис. 22, которая учитывает рождение одного и более детей

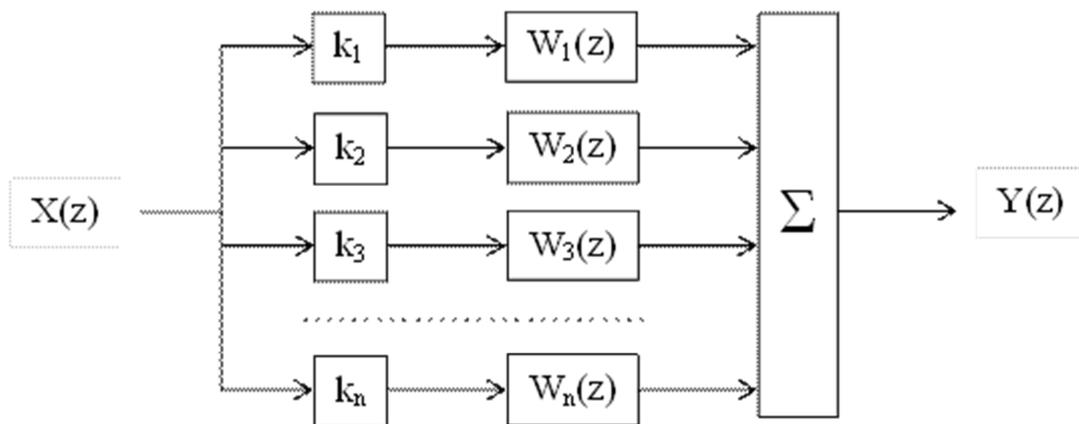


Рис. 21. Связь ряда числа рождений с рядом численности женщин с учетом рождений одного, двух и т.д. детей

На рисунке  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  - доля женщин, рожаящих одного, двух, трех и т.д. детей,

$W_1(z), W_2(z), W_3(z), \dots, W_n(z)$  - Z-преобразование функций распределения женщин по возрасту при рождении 1-го, 2-го и т.д. ребенка.

Однако автор не располагает статистическими данными, позволяющими оценить данные характеристики, в связи с чем, расчет рождаемости производился по упрощенной схеме (рис. 22), на котором

$k_f$  - коэффициент фертильности,

$W(z)$  - Z-преобразование функций распределения женщин по возрасту при рождении детей.

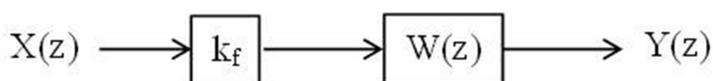
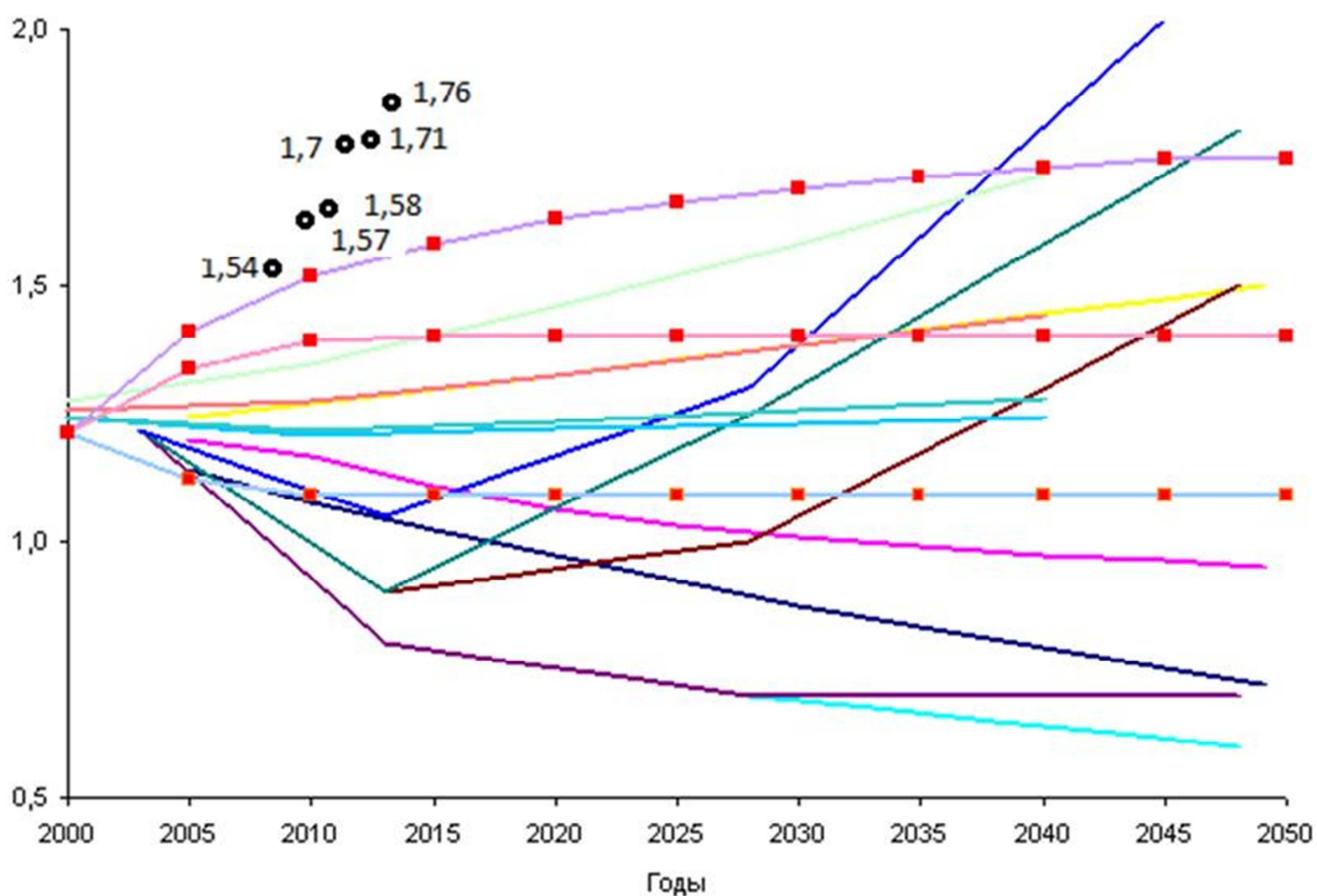


Рис. 22. Связь ряда числа рождений с рядом численности женщин и с коэффициентом фертильности



- |  |  |
|--|--|
| — Архангельский: нижний                            | — Ермаков, Захарова: минимального роста  |
| — Архангельский: наиболее вероятный                | — Ермаков, Захарова: средний             |
| — Архангельский: активной демографической политики | — Ермаков, Захарова: максимального роста |
| — Антонов, Медков: 1                               | — Ермаков, Захарова: вероятный           |
| — Антонов, Медков: 2                               | — Госкомстат России: низкий              |
| — Антонов, Медков: 3                               | — Госкомстат России: средний             |
| — Антонов, Медков: 4                               | — Госкомстат России: высокий             |
| — Антонов, Медков: 5                               |  |

## о – фактические значения

Рис. 23. Прогнозируемые и фактические значения коэффициента фертильности

Рис. 23 представляет прогноз значения коэффициента фертильности до 2050 года, сделанный в 2000-м г. различными исследователями и Госкомстатом России (<http://www.demoscope.ru/weekly/2002/051/tema02.php>) (<http://polit.ru/article/2002/01/26/464298>) . а почему два адреса?

К сожалению, методика данных прогнозов нигде не изложена. Особое удивление вызывают прогнозируемые резкие изменения коэффициента фертильности. Что же произойдет в 2027 г., что вызовет такие резкие изменения? Может рост рождаемости в 26,27 гг. прогнозируется на информации о существенном увеличении материнского капитала?

При таком разбросе прогнозируемых показателей можно было бы констатировать, что с вероятностью равной единице один из этих прогнозов совпадет с реальными значениями.

Стоит отметить, что ни один прогноз не совпал с фактическими данными для 2014 г., представленными на сайте Википедии ([https://ru.wikipedia.org/wiki/%CD%E0%F1%E5%EB%E5%ED%E8%E5\\_%D0%EE%F1%F1%E8%E8](https://ru.wikipedia.org/wiki/%CD%E0%F1%E5%EB%E5%ED%E8%E5_%D0%EE%F1%F1%E8%E8)) – не самый уважаемый источник.

Если фактические значения оказались существенно выше самых оптимистичных прогнозов, следует констатировать неадекватность предложенных моделей.

Вместе с тем, можно объяснить такое фактическое увеличение коэффициента фертильности материнским капиталом.

В то же время вызывает вопрос что имеется ввиду под понятиями «низкий», «средний», «высокий». И как эти качественные понятия входят в математические выражения формул прогноза (если они есть, конечно).

В этой связи в альтернативном методе прогноза рождаемости, основанном на математических формулах, реализующих сверточный алгоритм, вместо качественных характеристик («низкий», «средний», «высокий») будем приводить расчеты для различных коэффициентов фертильности.

В качестве функции распределения женщин по возрасту при рождении детей  $w(k)$  принята функция, представленная на рис. 24.

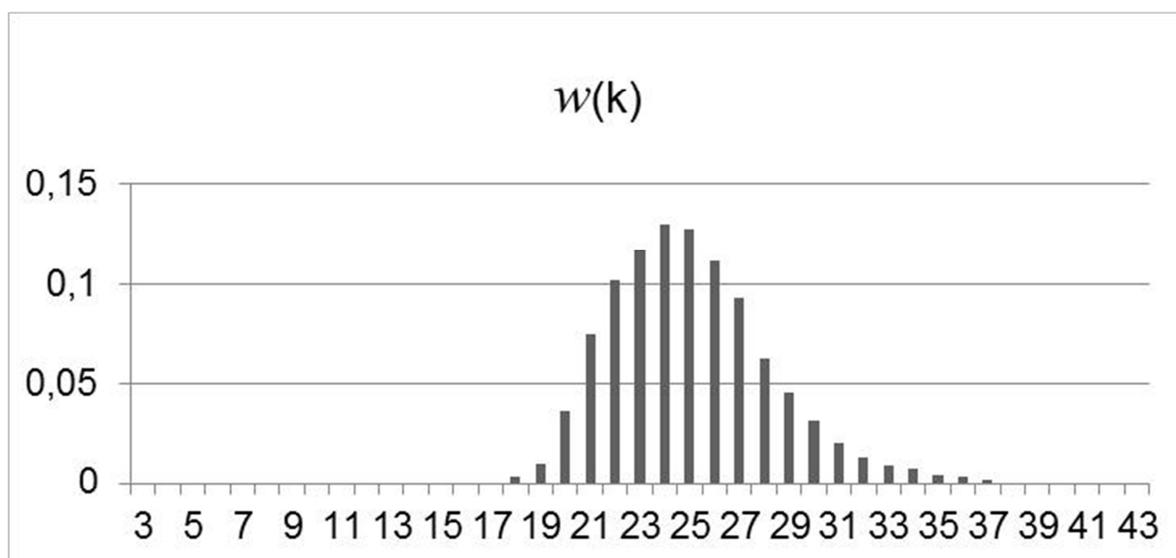


Рис. 24. Функция распределения женщин по возрасту при рождении детей

Таким образом, согласно структурной схеме, представленной на рис. 22, численность населения определяется фактическим рядом численности женщин и коэффициентом фертильности. Распределение возраста женщин при рождении, в силу равенства единице суммы значений  $w(k)$ .

Теоретически ряд численности женщин и коэффициент фертильности относятся к управляемым характеристикам.

Так, например, численность женщин может быть увеличена за счет иммиграции, а коэффициент фертильности – мероприятиями, стимулирующими рождение второго, третьего и т.д. детей, к числу которых относится, конечно, и «материнский капитал».

Но к этим управляемым характеристикам следует относиться с осторожностью, прогнозируя возможные последствия изменения национальной структуры населения.

Рис. 25 представляет прогноз рождаемости, рассчитанный по возрастной диаграмме женщин 2010 года и функции распределения, представленной на рис.24 без учета функции распределения возраста ухода из жизни, полученной выше.

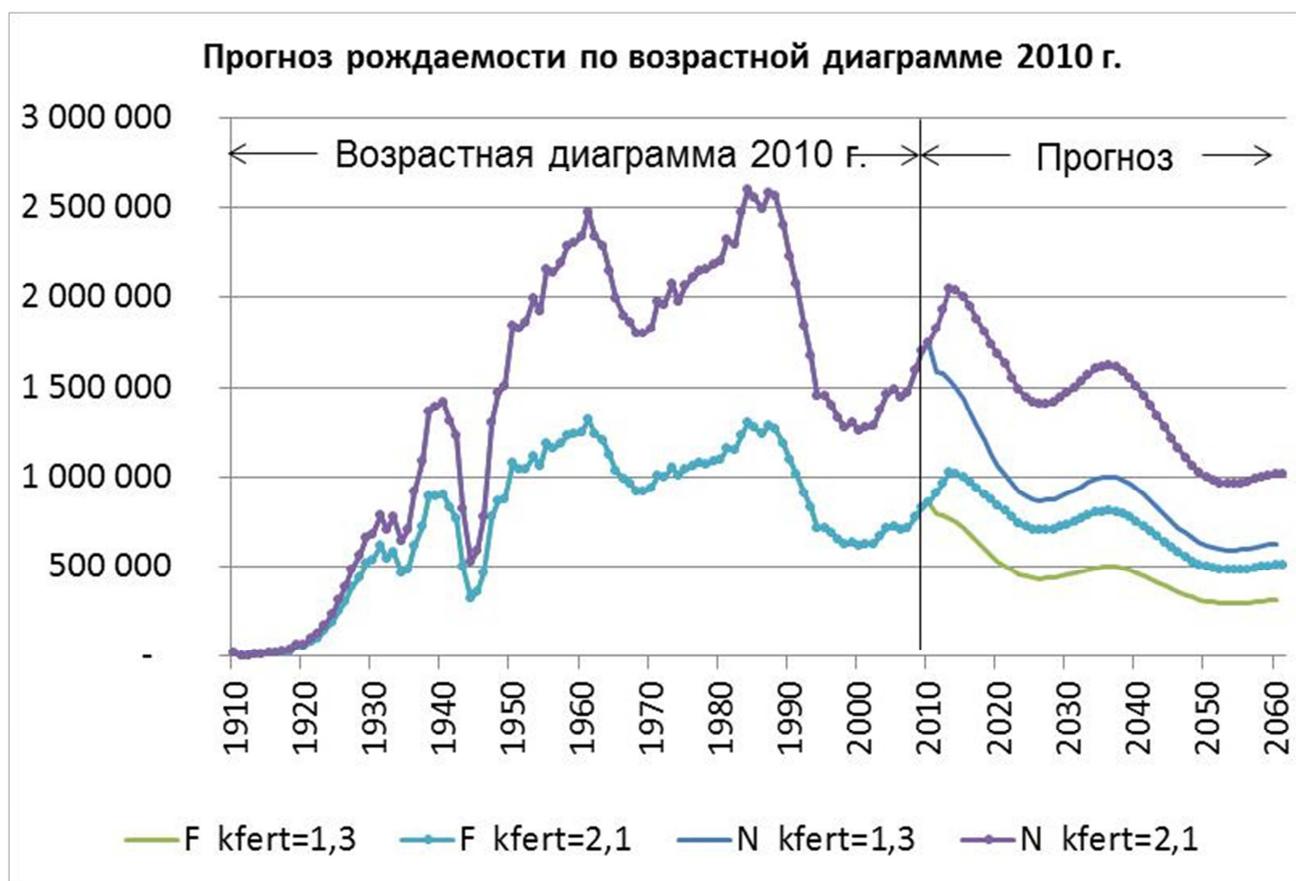


Рис. 25. Возрастная диаграмма и прогноз рождаемости девочек (F) и всех детей (N) для различных коэффициентов фертильности (kfert)

Как следует из диаграммы, максимум рождаемости в 2010 г. прогнозировался по данной методике на 2014, 2015 гг. Далее прогнозируется её снижение до середины 20-х гг., что объясняется падением рождаемости в 90-е годы. И такой волнообразный характер рождаемости сохранится, как минимум до 60-х гг.

В настоящий момент опубликовано число рожденных детей в 2014 г. – 1млн. 947 тыс.

Табл. 2 представляет прогноз числа рождений в 2014 г. по возрастной диаграмме 2010 г. Для такого числа новорожденных коэффициент фертильности должен быть равен 1,955.

Однако фактический коэффициент в 2014 г. составлял 1,76. Ему соответствует 1,827 млн. рождений.

Т.е. расчётное значение по возрастной диаграмме 2010 г. меньше фактического на 120 тыс. рождений (6,1 %).

Если возрастная диаграмма женщин и коэффициент фертильности соответствуют реальности, то данная ошибка прогноза может быть связана с принятым упрощением модели (рис.21, 22).

Табл. 2. Прогноз числа рождений в 2014 г. по возрастной диаграмме 2014 г.

kfert	Нрожд, млн.	kfert	Нрожд, млн.
1,3	1,545	1,8	1,852
1,4	1,606	1,9	1,913
1,5	1,668	2	1,975
1,6	1,729	2,1	2,036
1,7	1,791	2,2	2,097

Для прогноза численности населения необходимо учитывать функцию распределения возраста ухода из жизни.

На рис.26 представлены прогнозируемые возрастные диаграммы до 2061 г., рассчитанные без учета смертности.

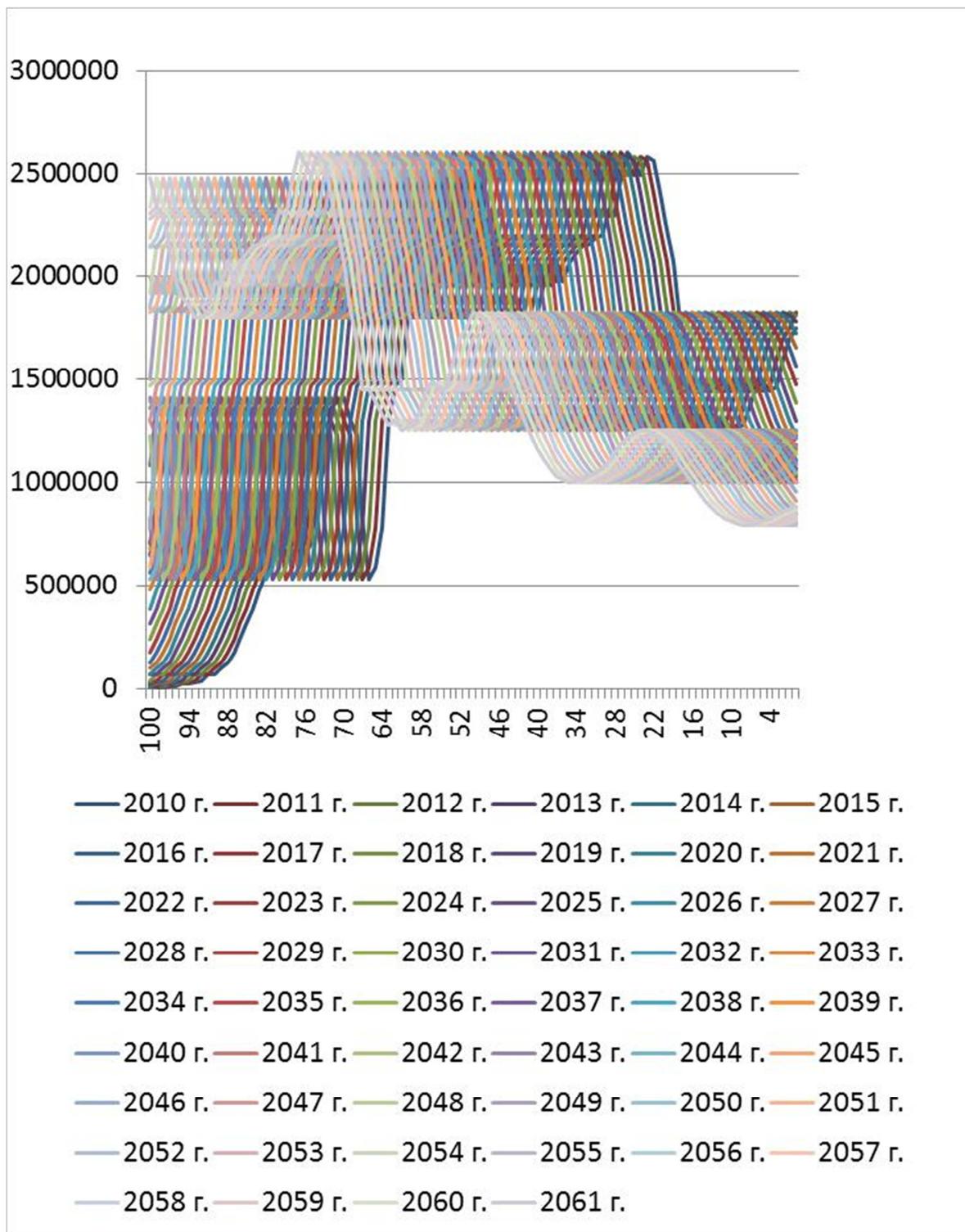


Рис.26. Прогнозируемые возрастные диаграммы до 2061 г., рассчитанные без учета смертности при  $k_{fert}=2,1$

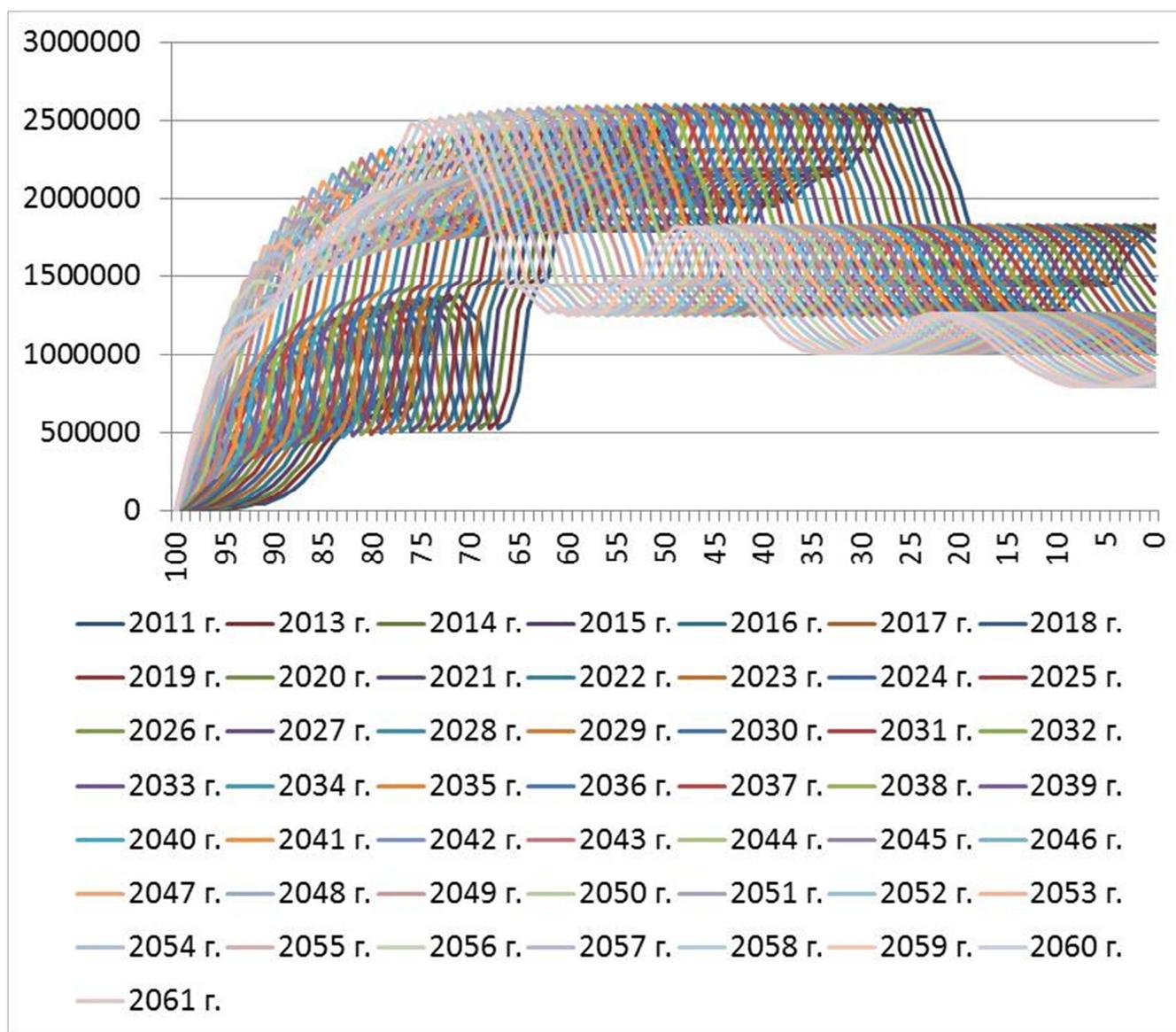


Рис.27. Прогнозируемые возрастные диаграммы до 2061 г., рассчитанные с учетом функции распределения продолжительности жизни при  $kfert=2,1$

Из данных диаграмм с помощью полученной функции распределения продолжительности жизни рассчитаны возрастные диаграммы (рис. 27), на основании которых можно рассчитать общую численность населения и численность в различных возрастных группах.

Рис. 28 представляет прогноз численности населения при различных коэффициентах фертильности.

Как видно, при любых коэффициентов фертильности во второй половине нынешнего века будет иметь место снижение численности населения России, что является следствием демографической катастрофы 90-х гг.



Рис. 28. Прогноз численности населения при различных коэффициентах фертильности.

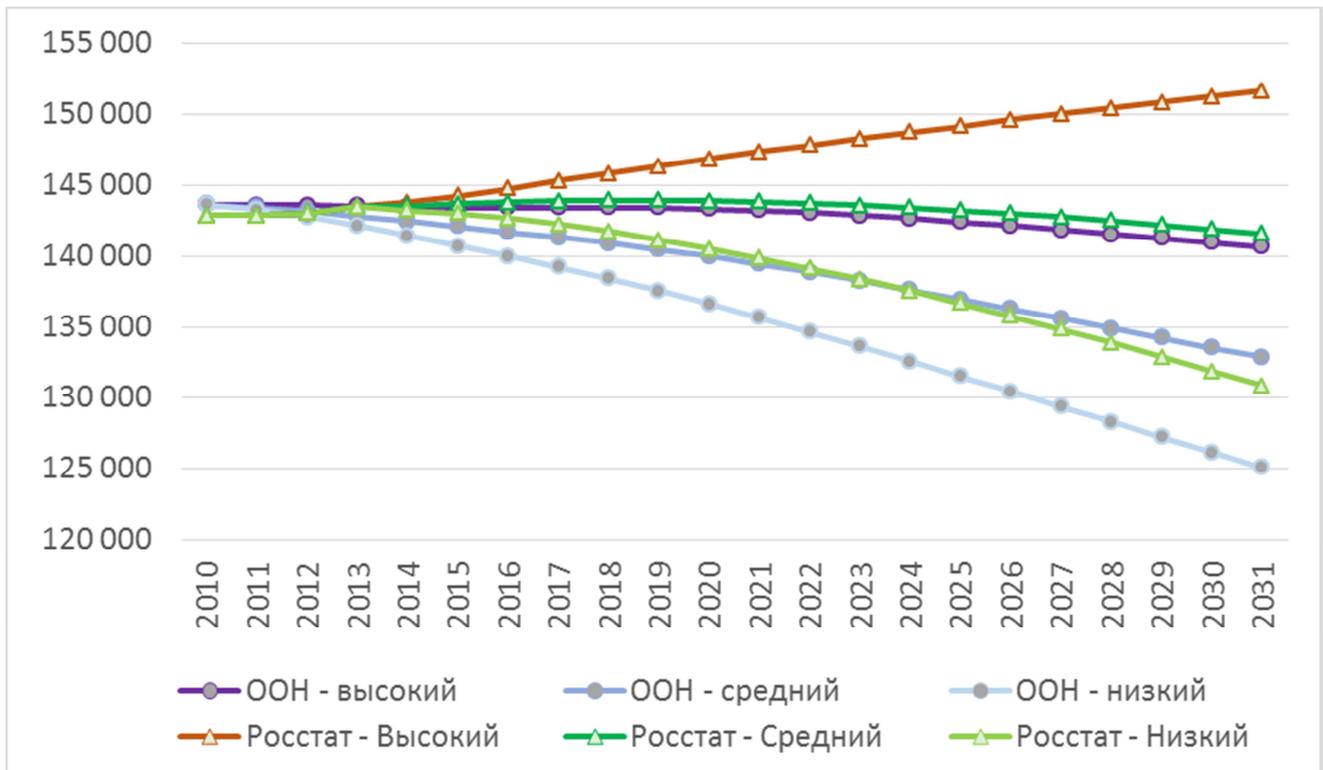


Рис. 29. Прогноз численности населения России по данным прогнозов ООН и Росстата до 2030 года

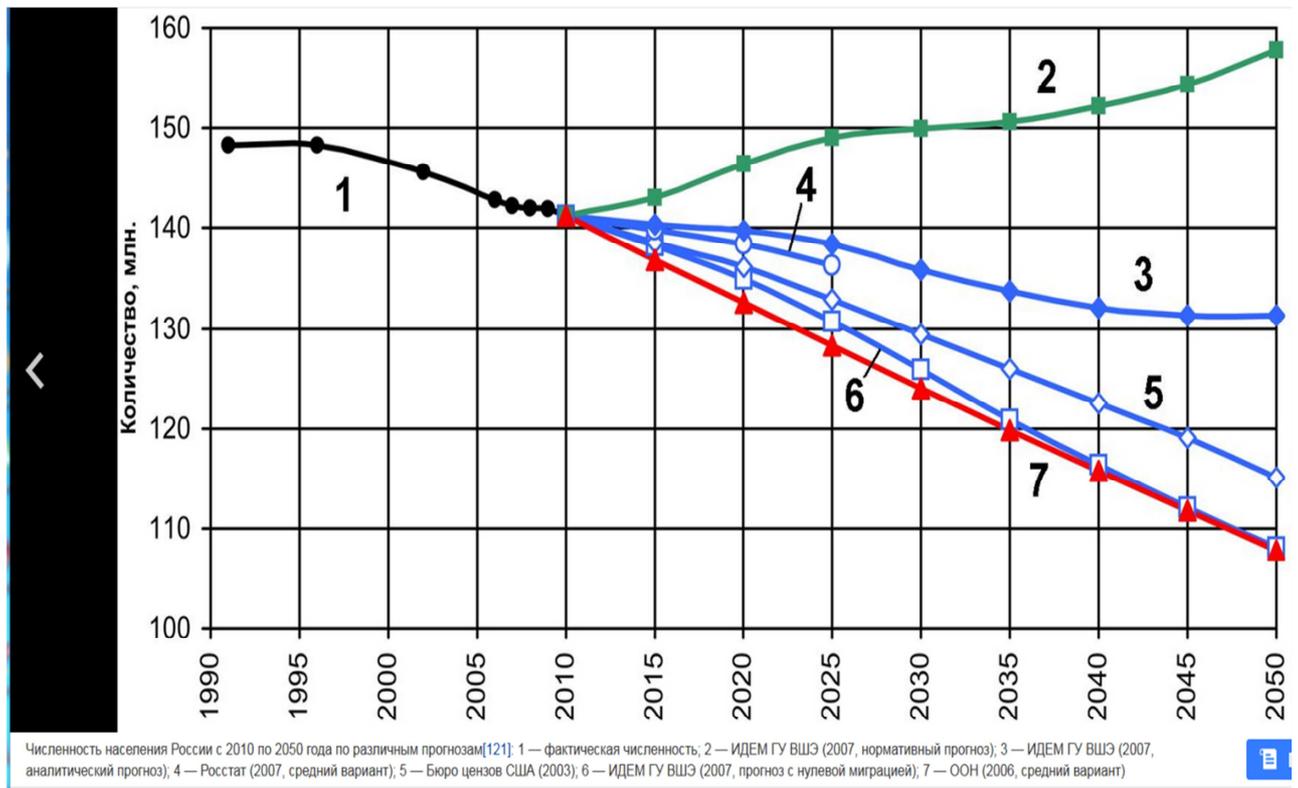
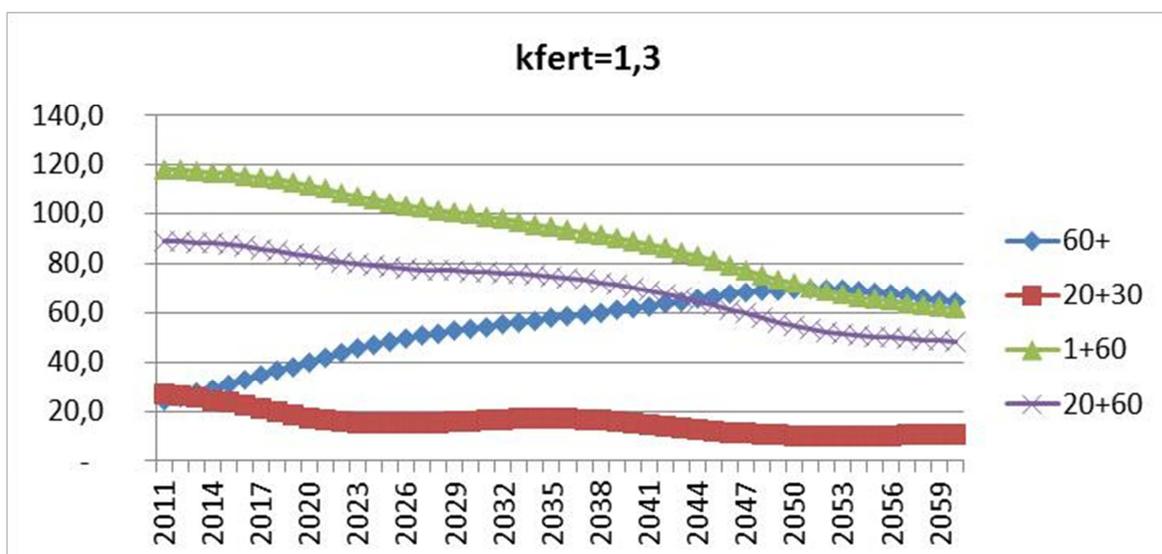


Рис. 30. Динамика численности населения России по данным прогнозов ООН и Росстата до 2050 года

Интересно сопоставить две диаграммы прогноза, представленных на рис. 28 и на рис.29,30 (<http://demographia.net/journal/2014-04/karpova>). Недоумение вызывает линейный характер всех прогнозов на рис. 29, который полностью игнорирует демографическую яму 90-х.

Снижение рождаемости в период 1990-2000 определяет сложный, неоднозначный характер изменения численности населения в различных возрастных группах (рис.30).



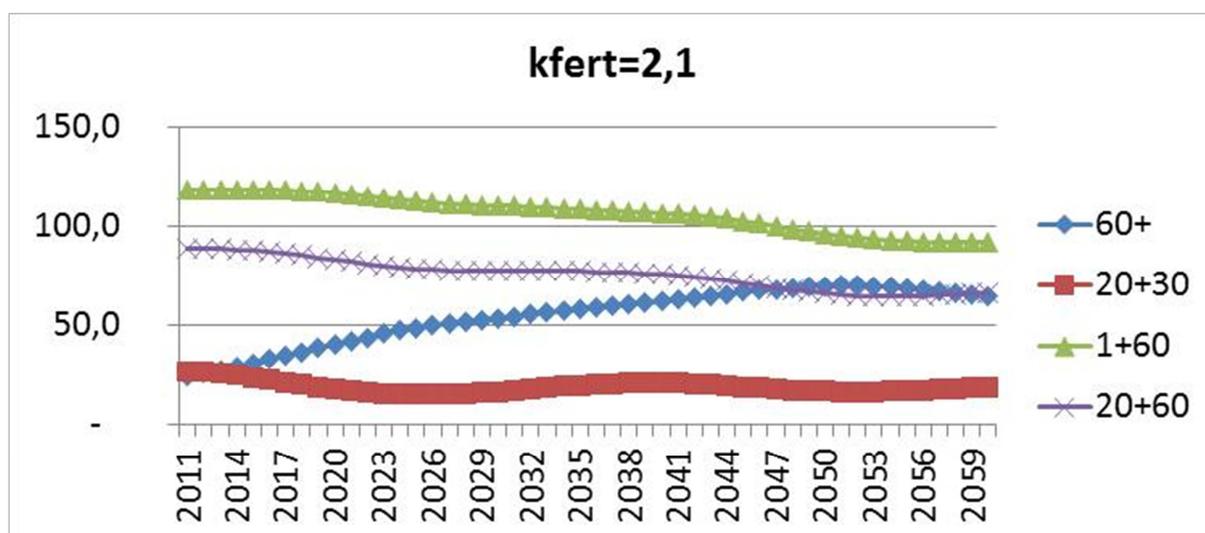
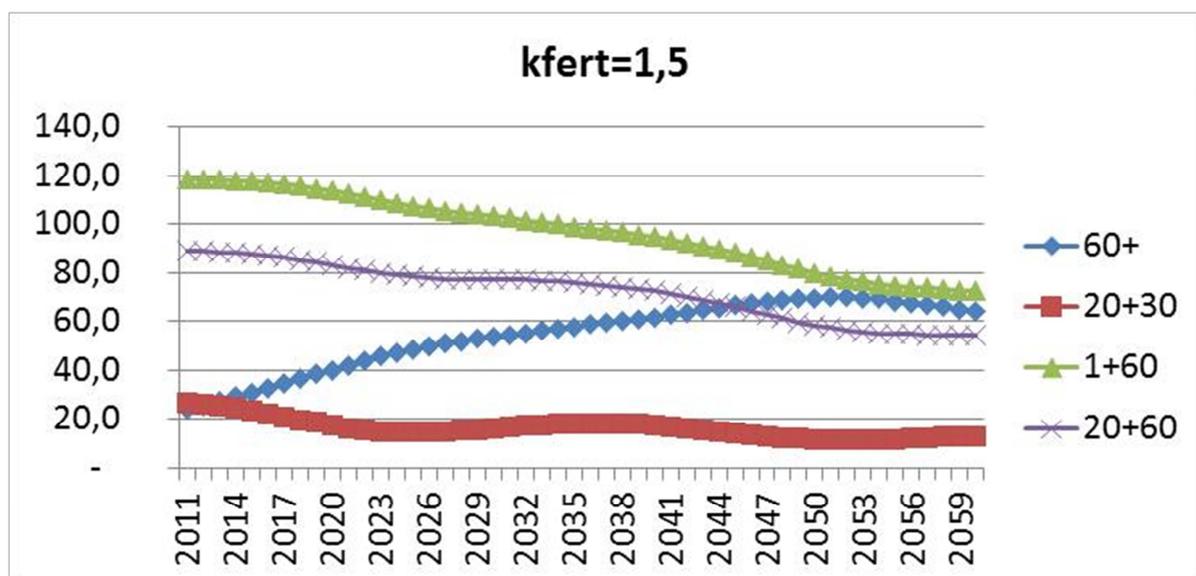


Рис. 30. Численность населения в различных возрастных группах при различных коэффициентах фертильности

Характерно, что для всех возрастных групп имеет место волнообразный характер изменения численности. Причем, чем меньше величина возрастного интервала, тем в большей степени проявляется гармоническая составляющая в динамике численности.

Наглядно это проявляется на численности школьников.

Численность школьников не являлась постоянной в послевоенный советский период. Рис. 31 представляет общее число детей школьного возраста. Как видно, численность возрастной группы в школьном возрасте с 70-х годов резко уменьшается, что обусловлено эхом ВОВ. После дальнейшего увеличения, обусловленного увеличением рождаемости в 50-х годах, на динамику численности населения в школьном возрасте на второе эхо 2-й мировой войны

повлияли и 90-е. мне не оч понятно предложение.. нуждается в редакции---  
школьном возрасте на второе эхо... непонятно кто на ком стоял?



Рис. 31. Численность возрастной группы в школьном возрасте

Динамика изменения численности школьников различных классов на этом периоде была различной (рис.32). Если в 1977 г. разность численности школьников в 11-м классе и в первом составляла порядка 700 тыс., то в 2006 г. – порядка 1200 тыс. В процентном отношении данная разность в 1977 г. составляла 33% от средней численности школьников в разных классах, а в 2006 г. – 67%.

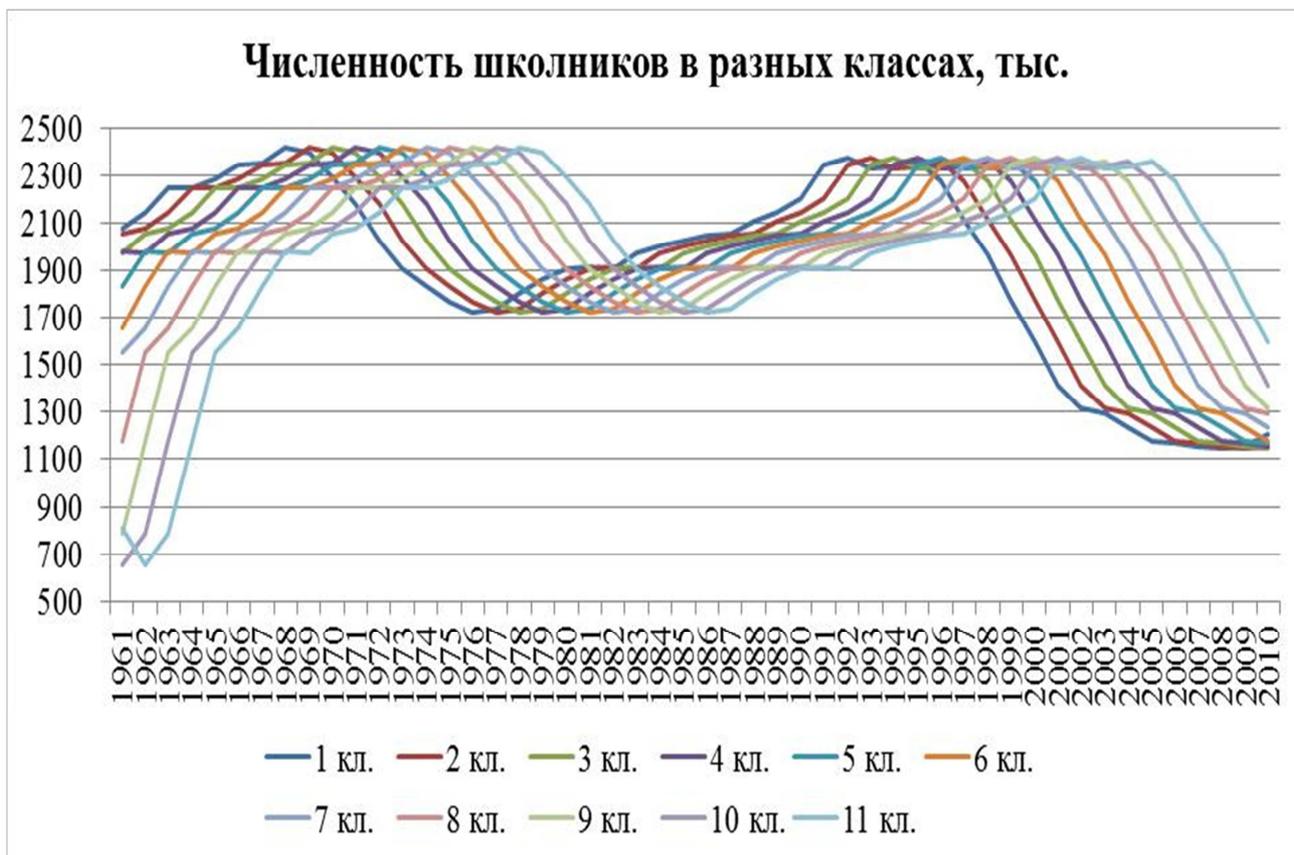


Рис.32. Фактическая численность школьников в разных классах в 1961-2010 г.

Так что же нас ждет в предстоящие десятилетия? Рис. 33 представляет динамику изменения численности школьников до 2061 г. Действительно, через 5-6 лет численность школьников увеличится. А после начала двадцатых будет такое же интенсивное сокращение их численности при всех рассматриваемых коэффициентах фертильности.

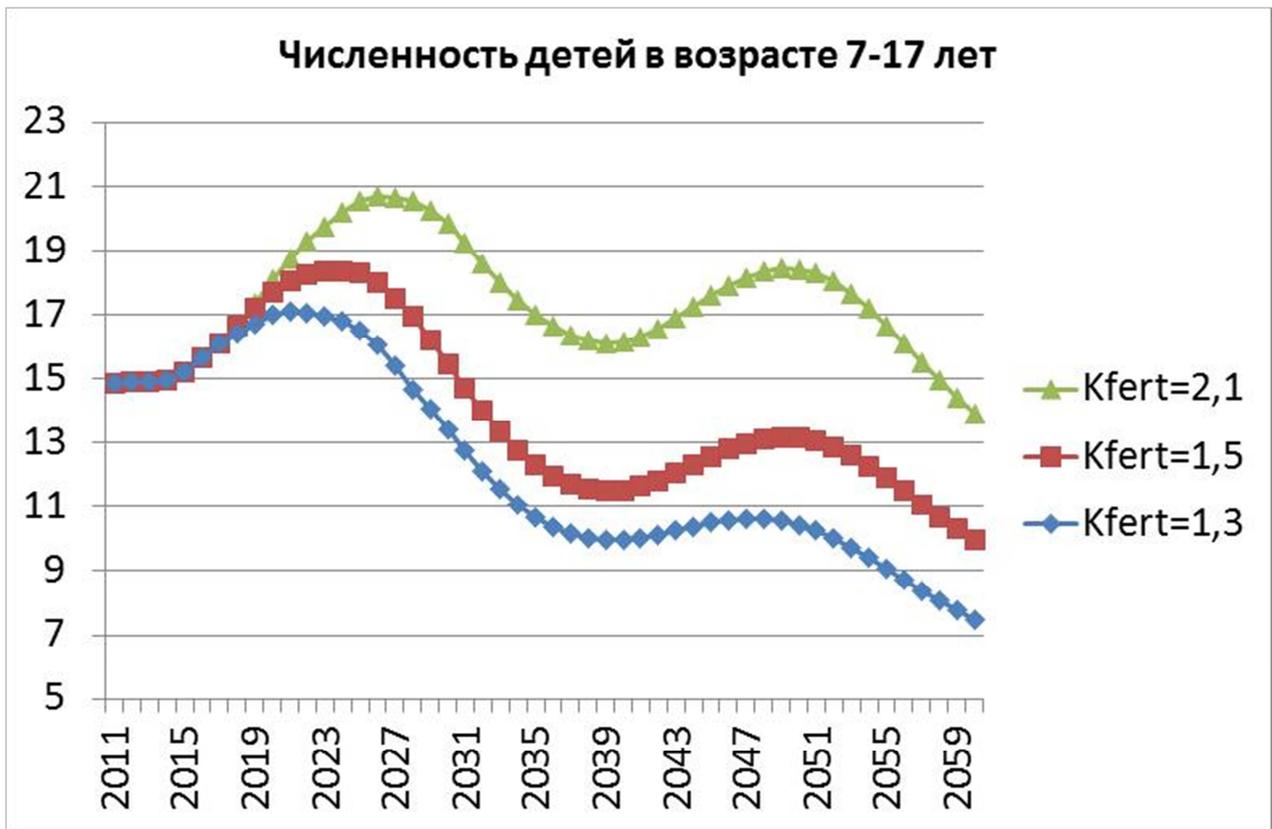
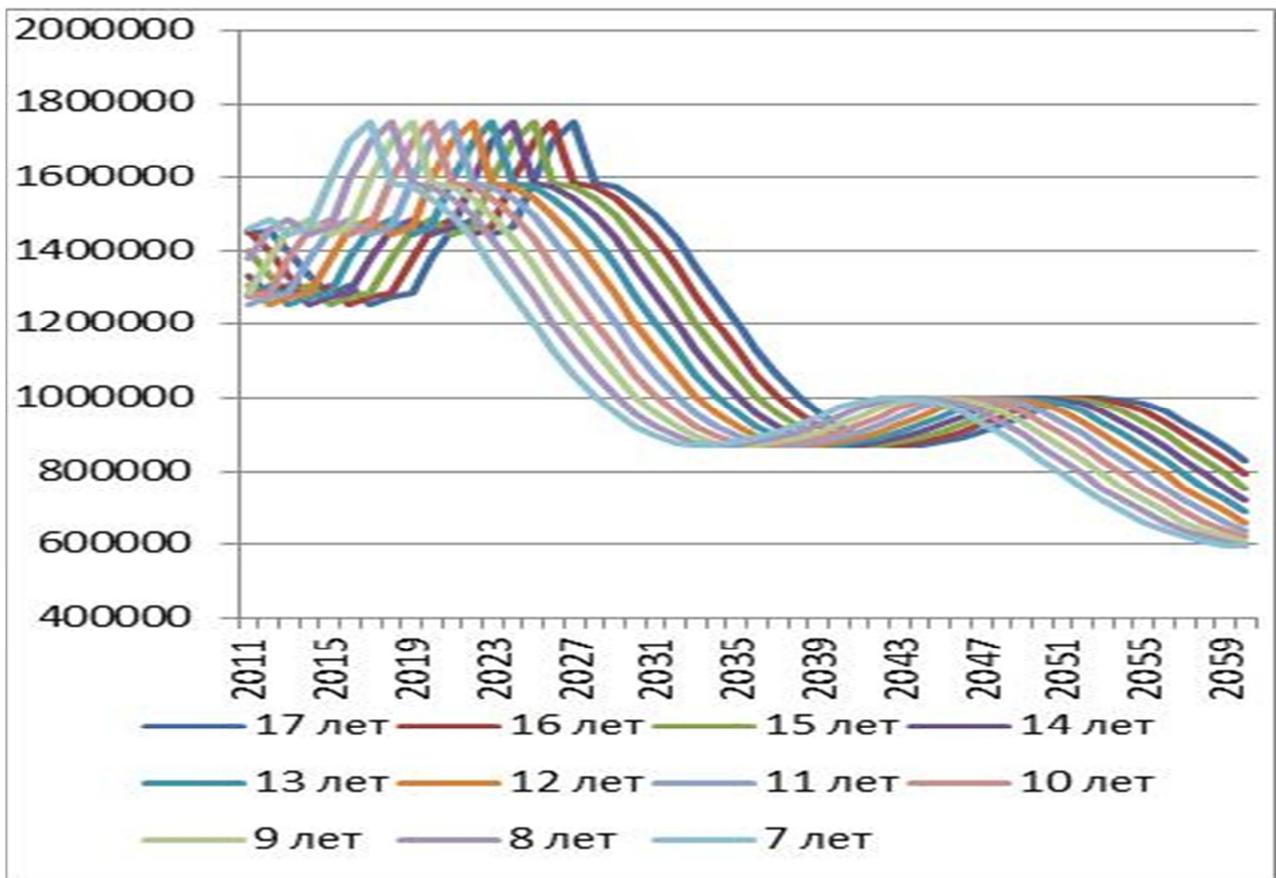
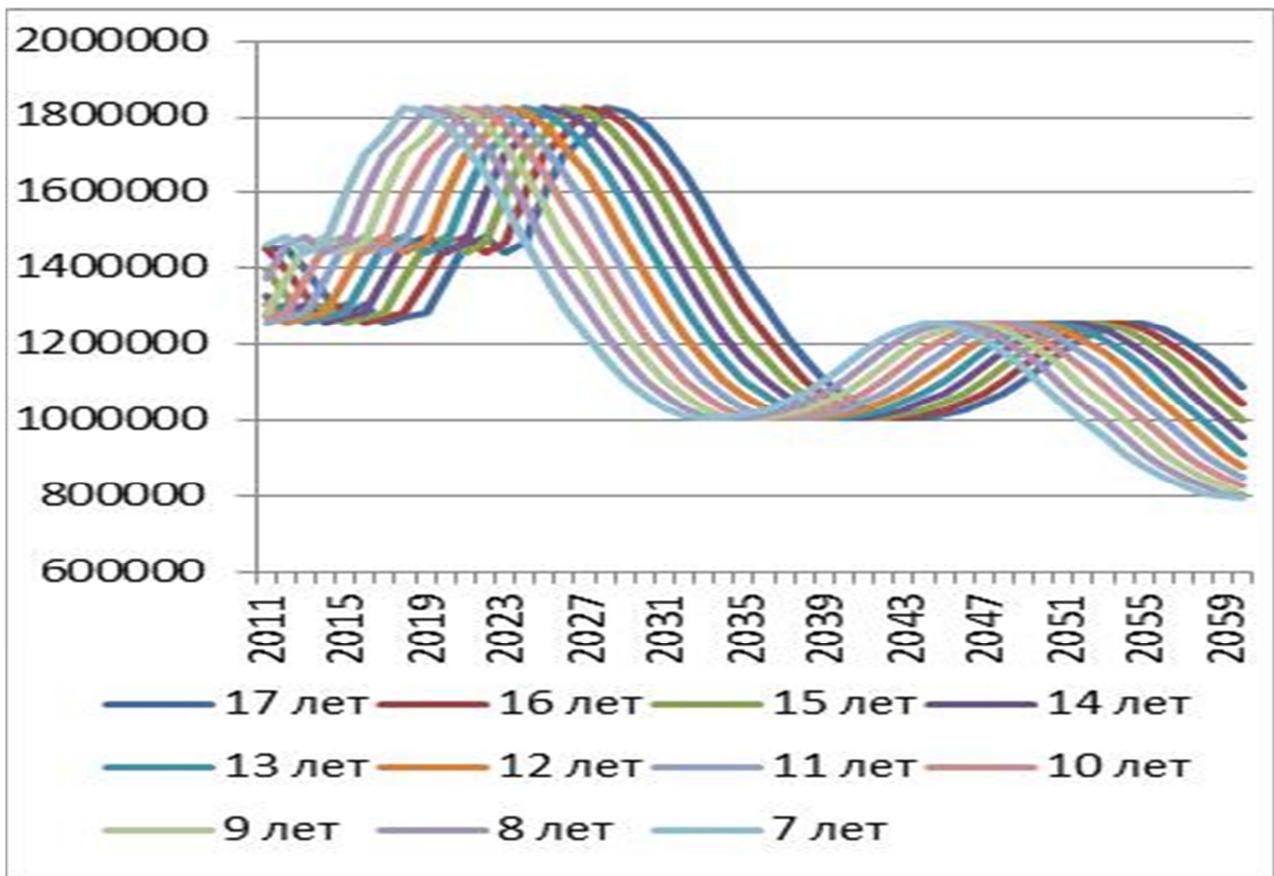


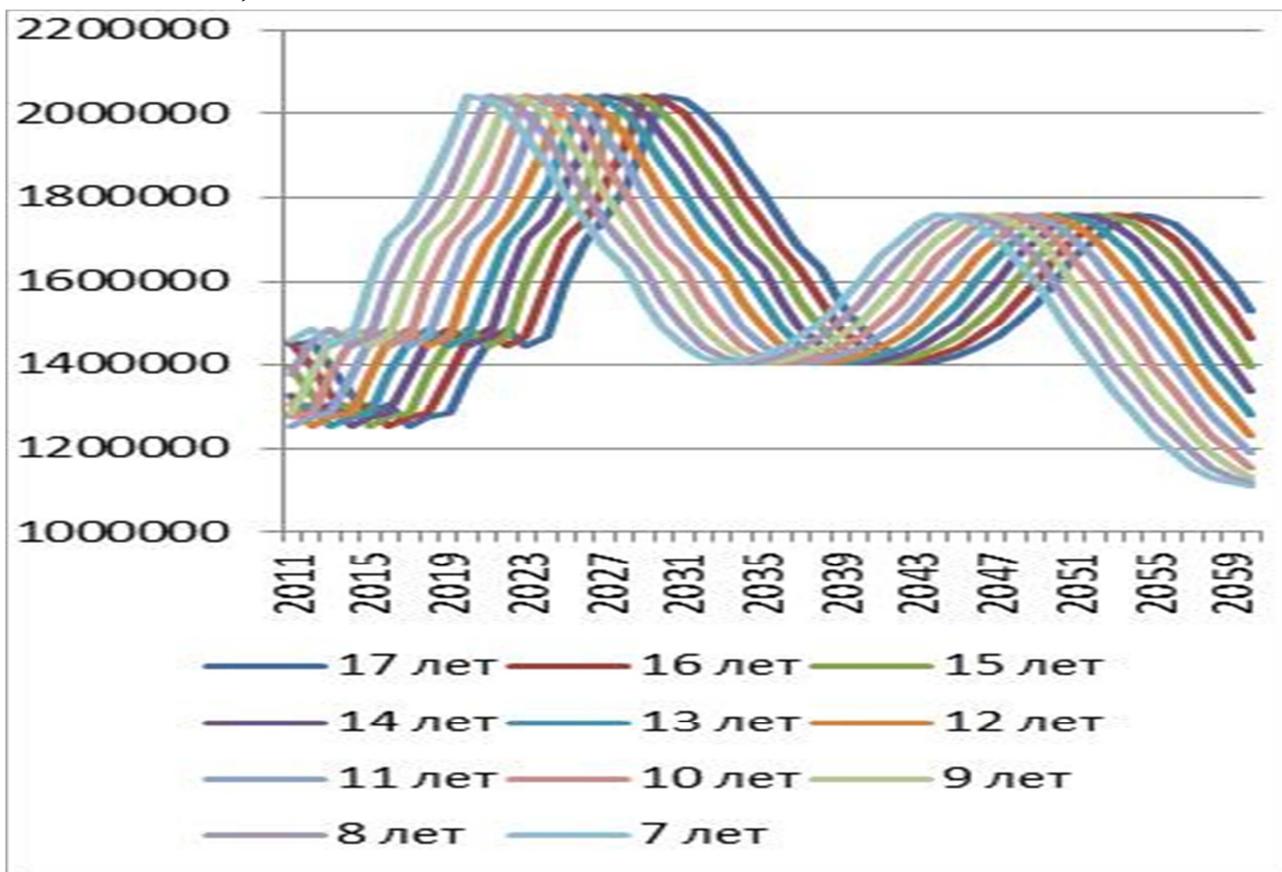
Рис.33. Численность детей школьного возраста.



Kfert=1,3



$K_{fert}=1,5$



$K_{fert}=2,1$

Рис.34 Прогноз численности школьников различных классов при различных коэффициентах фертильности

На рис.34 представлен прогноз ряды численности школьников различных классов при различных коэффициентах фертильности. Как видно, даже при коэффициенте фертильности  $k_{fert}=2,1$  имеет общая тенденция к снижению общей численности школьников. Обращает на себя сходство этих кривых с динамикой численности школьников в 60-е годы (рис 32).

Демографическая катастрофа 90-х гг. эхом будет отзываться на численности населения, как во всех возрастных группах, так и на численности всего населения в течение как минимум текущего столетия.

Численность населения к середине нынешнего десятилетия сравнивается с численностью в 90-е гг. (рис.35). Причем динамика увеличения численности во второй половине десятилетия даже будет опережать среднюю динамику роста в 1926-1991 гг.. Однако после 40-х гг численность коренного населения (конечно, без учета миграции) все же будет уменьшаться. И это не прогноз, это расчет.

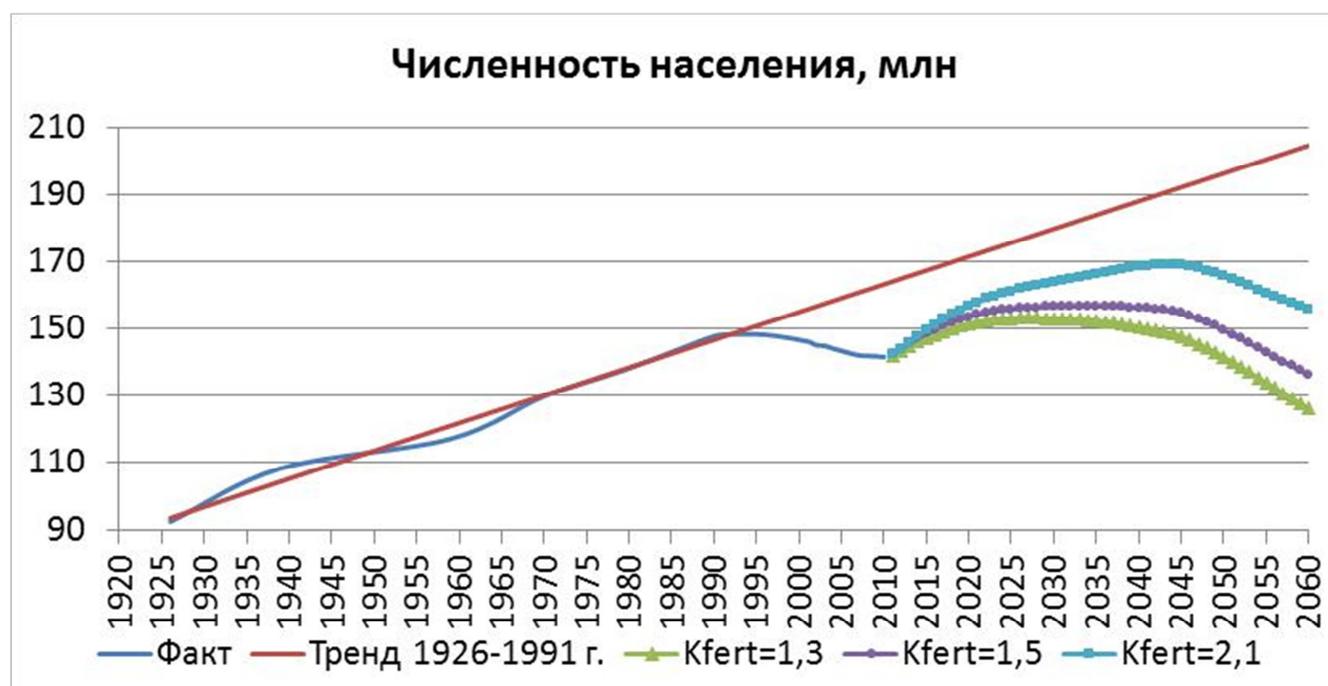


Рис.35. Фактическая и прогнозируемая динамика численности населения России

Данный график позволяет оценить демографический урон, нанесенный в период 1990-2010 гг.

Если предположить, что рост численности населения после 1990-го г. был такой же как в период 1926-1991 гг. (с учетом голода 30-х и ВОВ), то путем вычета прогнозируемой численности из данного тренда получаем потери населения (с учетом народившихся детей), представленные на рис. 36.

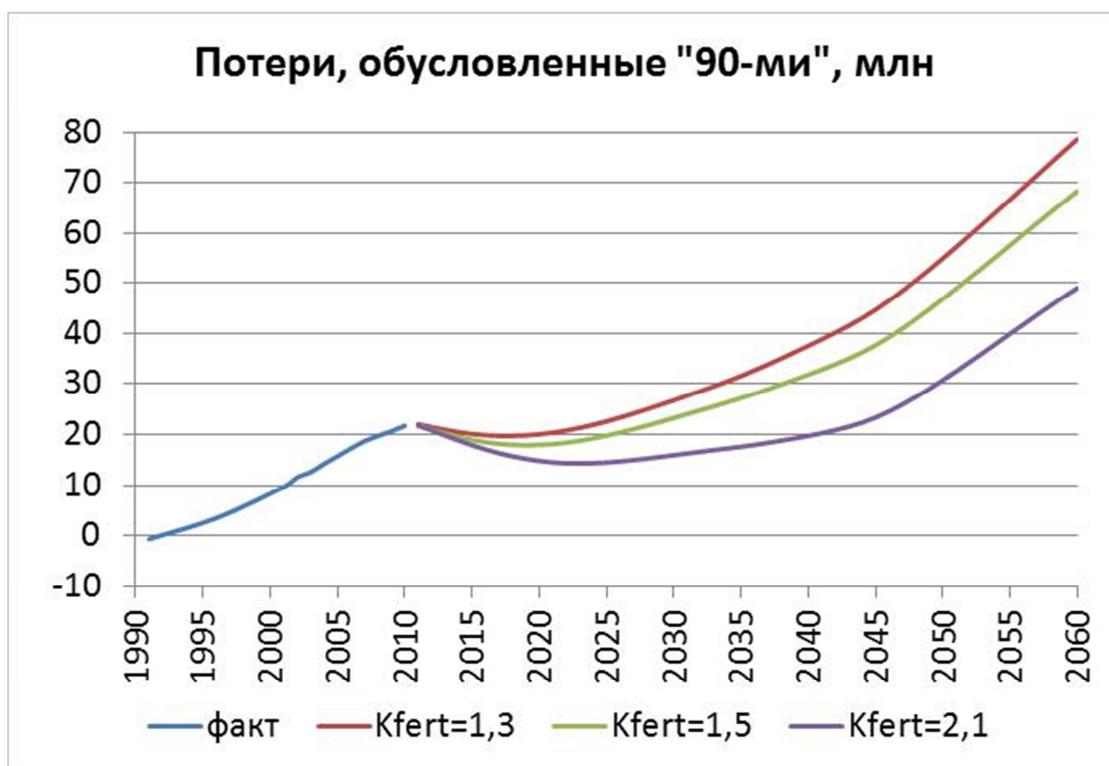


Рис. 36. Фактические и рассчитанные потери численности населения для различных коэффициентов фертильности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены альтернативные методы расчета распределения продолжительности жизни, прогноза рождаемости и численности населения, основанные ТОЛЬКО на численных демографических показателях (без использования качественных оценочных? Без таких понятий как «низкий», «высокий», «благоприятный» и пр. варианты).

Работа демонстрирует, как можно получить прогноз показателей рождаемости и численности населения аналитическим путем.

Аналогичный подход может быть применим к демографическим потерям за конкретные периоды времени (гражданская война, голод начала 30-х, пресловутый 37, ВОВ и пр.), относительно которых так много спекуляций.

Результаты численных методов прогноза (а точнее расчета) количественных показателей численности населения имеют безусловное практическое значение, которое может служить базой для демографической политики государства в социальной, экономической и образовательной сферах, в области здравоохранения, обороноспособности и безопасности государства.

Оценка динамики численности и прироста населения помимо прочих результатов может детерминировать стратегию формирования преподавательского состава в школах, ВУЗах и иных образовательных и

воспитательных учреждениях. Анализ исследованных в статье параметров необходим в планировании и формировании учета лиц призывного возраста в состав вооруженных сил РФ, а также в активно дискутируемой в настоящее время оценке пенсионного возраста в целях достижения адекватного соотношения пенсионеров и лиц допенсионного возраста. Таким образом, фактически ни одна из сфер общественной жизни не может быть признана конкурентоспособной без оценки численности населения с учетом динамики его прироста.

В то же время решение государством демографических проблем не следует замыкать на оценке исключительно количественных параметров, игнорируя качественную сторону исследуемого вопроса (здоровье, образование и пр.).