# Уменьшение размерности вычислительных задач с помощью тензорных разложений

**Блинов ВН**
НЦЧ РАН
blinov.veniamin@gmail.com

*Методы суперкомпьютерного моделирования г. Таруса, 24-26 мая 2016*

# Уменьшение размерности

**Причины:**

- большая размерность задачи + экспоненциальная [полиномиальная] сложность = “curse of dimensionality”:

*СЛАУ, матричные алгоритмы, NP*

- борьба за степени свободы:

*нелинейные системы / УРЧП*

*альтернатива параллелизации: математическое ускорение*

# Уменьшение размерности

**Суть:**

1. понять “устройство задачи”:
   → симметрии объектов и конструкций
   → простейшие решения

2. сформулировать задачу в новых переменных, чтобы:
   → переменных стало меньше
   → решать стало проще

# Уменьшение размерности

**Примеры:**

1. Использование особенностей матрицы СЛАУ

   *тёплицевость, положительную определённость, ...*

2. Смена базиса / замена переменных

   *спектральные методы FEM, преобразование Фурье*

# Уменьшение размерности

**Проблема:**

– специфичность к задаче.

# Уменьшение размерности тензора

- Наша задача: для матрицы A
  - уменьшить размерность (количество переменных) матрицы → **нет “тензорности”**
  - сохранить возможность взаимодействовать с другими тензорами (+, *) → “тензорность”

- Так, архивация не подходит по второму критерию, в то время как переход к собственному базису, или к любому другому базису с меньшим числом параметров можно назвать уменьшением размерности.

# Задача: умножение матрицы на вектор

- **Прямой путь**

1) $y = A*x$, $O(m^2)$

- **Путь через разложение в *тензорный поезд (ТТ)***

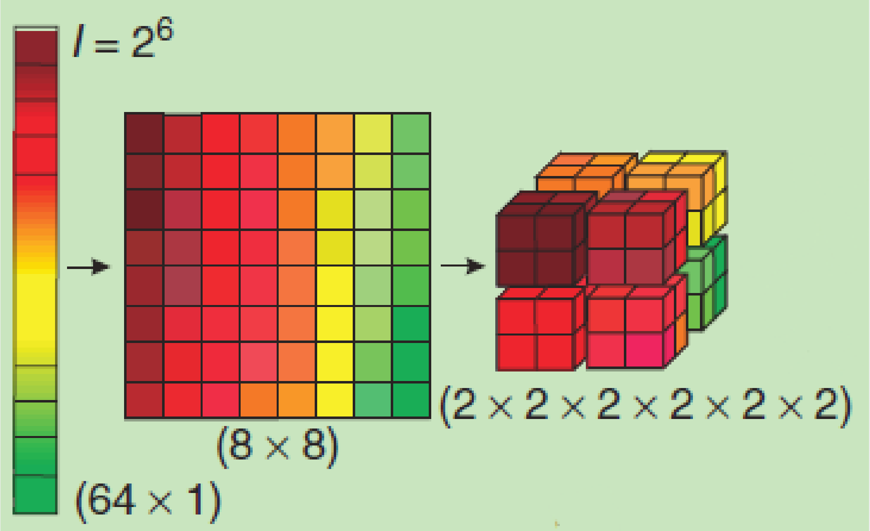
1) Свернуть A, x в многомерные тензоры;
2) Получить ТТ-разложение для A и x;
3) Перемножить A и x в ТТ-форме;
4) Из ТТ-разложения результата (y) получить вектор.

# 1. Упаковка

- Упаковка векторов и матриц происходит путём расщепления индекса.

- Индексы матрицы и вектора должны при этом оставаться согласованы.

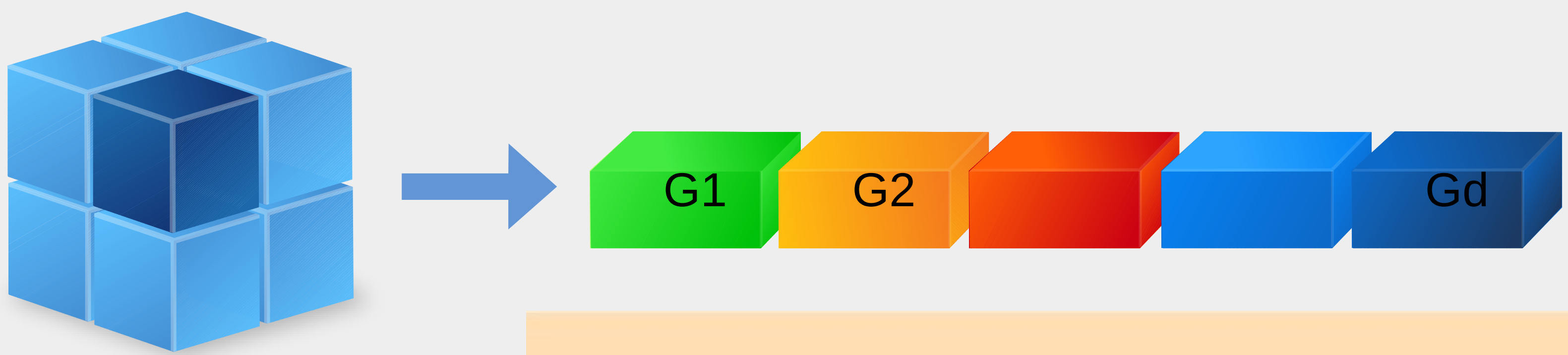
- При идеальной упаковке размерность тензора
$d = \log_2 m$, где m – длина вектора



# 2. Тензорный поезд

- Разложение в тензорный поезд имеет следующую форму:

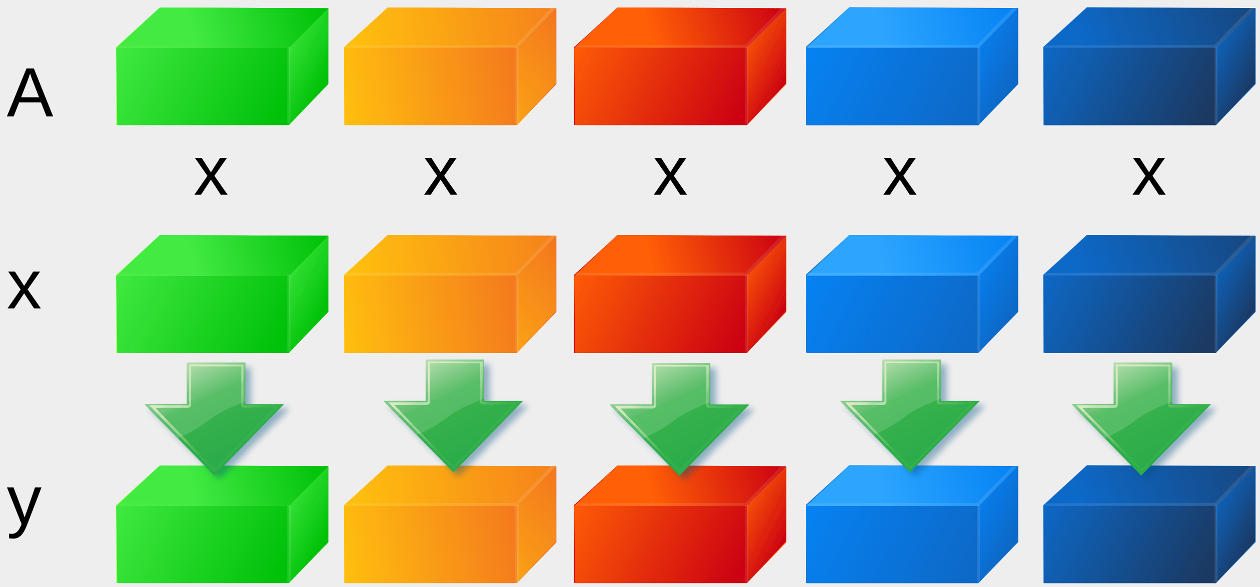
произведение d 3-тензоров размером $n_i * r_{i-1} * r_i$




$$T(i_1, i_2, \ldots, i_d) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}} G_1(i_1, \alpha_1) G_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) \cdots$$
$$G_{d-1}(\alpha_{d-2}, i_{d-1}, \alpha_{d-1}) G_d(\alpha_{d-1}, i_d)$$

# 3. Умножение

- Умножение двух тензорных поездов происходит покомпонентно:




- Сложность: $O(n^2 r^4 d)$

# 4. TT → обычная форма

- Явно воспользуемся формулой

$$T\,(i_1, i_2, \ldots, i_d) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}} G_1(i_1, \alpha_1) G_2(\alpha_1, i_2, \alpha_2) \cdots$$
$$G_{d-1}(\alpha_{d-2}, i_{d-1}, \alpha_{d-1}) G_d(\alpha_{d-1}, i_d)$$

# Результат

- Затраты на вычисление произведения:
  $$O(n^2 r^4 \log_2 m) \text{ vs } O(m^2)$$

НО

- Это при условии, что ранги r достаточно малы. В общем случае они могут значительно расти, что приводит к снижению эффективности
- Кроме того, необходимо учесть затраты на конвертирование

# Операции

| | Canonical | Tensor-Train |
|---|---|---|
| Number of parameters | $\mathcal{O}(dnR)$ | $\mathcal{O}(dnr + (d-2)r^3)$ |
| Matrix-by-vector | $\mathcal{O}(dn^2R^2)$ | $\mathcal{O}(dn^2r^2 + dr^6)$ |
| Addition | $\mathcal{O}(dnR)$ | $\mathcal{O}(dnr)$ |
| Recompression | $\mathcal{O}(dnR^2 + d^3R^3)$ | $\mathcal{O}(dnr^2 + dr^4)$ |
| Tensor-vector contraction | $\mathcal{O}(dnR)$ | $\mathcal{O}(dnr + dr^3)$ |

# Вывод

- Метод работает для некоторого класса задач, когда тензоры имеют малоранговое приближение

# Пример

- “Генетический переключатель” (Долгов СВ, ИВМ РАН)

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \mathcal{A}\psi(t) = \begin{bmatrix} A(y_1) & & \\ & \ddots & \\ & & A(y_{N_y}) \end{bmatrix} \psi(t), \qquad \psi(t) = \begin{bmatrix} \psi(y_1, t) \\ \vdots \\ \psi(y_{N_y}, t) \end{bmatrix},$$

Рис. 5.7: Генетический переключатель, расчетное время в зависимости от $\log_2(N_y)$. Слева: $\delta t = 1$, в середине: $\delta t = 2$, справа: $\delta t = 5$.