

Метод быстрых искажений для изучения магнитогидродинамической турбулентности астрофизической плазмы

С.И. Сафонов, А.С. Петросян

Московский физико-технический институт

Институт космических исследований РАН

24 мая 2016 г.

Цели и задачи работы

- развить теорию для описания корреляционных свойств магнитогидродинамической турбулентности при наличии сдвига скорости, внешнего магнитного поля, вращения
- использовать развитую теорию для изучения свойств турбулентности при наличии искажающих факторов (эффект Холла)

План доклада

- постановка задачи и исходные уравнения
- метод быстрых искажений
- уравнения для вторых моментов турбулентности
- расчеты для влияния эффекта Холла

Исходные уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times ((\mathbf{u} - \epsilon \mathbf{j}) \times \mathbf{b}) + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \end{array} \right.$$

\mathbf{b} - магнитное поле, $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b}$ - плотность тока, \mathbf{u} - скорость, $\boldsymbol{\Omega}$ - угловая скорость, ϵ - параметр Холла, ν, η - кинематическая и магнитная вязкости

Метод быстрых искажений

Условия применения

$$T_D \ll \tau_{NL}$$

T_D - временной масштаб искажения

τ_{NL} - временной масштаб нелинейных членов

$$S^{-1} \ll \frac{u'(l)}{l}$$

S^{-1} - временной масштаб сдвига

Квазилинейное приближение по полю

$$B \gg b'$$

Уравнения для флуктуаций

$$\begin{cases} \frac{du'_i}{dt} = - \left(\delta_{in} - 2 \frac{\chi_i \chi_n}{\chi^2} \right) S_{nl} u'_l - \left(\delta_{in} - \frac{\chi_i \chi_n}{\chi^2} \right) \varepsilon_{nkl} \Omega_k u'_l + i \chi_l B_l b'_i - \nu \chi^2 u'_i \\ \frac{db'_i}{dt} = S_{il} b'_l + i \chi_l B_l (u'_i - \epsilon_H j'_i) - \eta \chi^2 b'_i \end{cases}$$

$$j_i = -i \varepsilon_{i\alpha\beta} \chi_\alpha b'_\beta$$

$$\frac{d\chi_i(t)}{dt} = -S_{ji} \chi_j(t) \quad \chi_i(0) = k_i$$

Вторые моменты турбулентности

Спектральный тензор $\Phi_{ij}(\chi, t) = \langle u_i^*(\chi, t)u_j'(\chi, t) \rangle$

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = -S_{jl}\Phi_{il} - S_{il}\Phi_{lj} + \frac{2\chi_j\chi_n}{\chi^2}S_{nl}\Phi_{il} + \frac{2\chi_i\chi_n}{\chi^2}S_{nl}\Phi_{lj} - i\chi_l B_l (C_{ij}^{rub} - C_{ji}^{rub*}) - \frac{\chi_l\Omega_l}{\chi^2}(\varepsilon_{jnk}\chi_n\Phi_{ik} + \varepsilon_{ink}\chi_n\Phi_{kj}) - 2\nu\chi^2\Phi_{ij}$$

Магнитный спектральный тензор $\Phi_{ij}^B(\chi, t) = \langle b_i^*(\chi, t)b_j'(\chi, t) \rangle$

$$\frac{d\Phi_{ij}^B}{dt} = -S_{jl}\Phi_{il}^B - S_{il}\Phi_{lj}^B + \frac{2\chi_j\chi_n}{\chi^2}S_{nl}\Phi_{il}^B + \frac{2\chi_i\chi_n}{\chi^2}S_{nl}\Phi_{lj}^B - i\chi_l B_l (C_{ij}^{rub} - C_{ji}^{rub*}) - \frac{\chi_l\Omega_l}{\chi^2}(\varepsilon_{jnk}\chi_n\Phi_{ik} + \varepsilon_{ink}\chi_n\Phi_{kj}) - 2\nu\chi^2\Phi_{ij}^B$$

Перекрестный тензор $C_{ij}^{rub}(\chi, t) = \langle u_i^*(\chi, t)b_j'(\chi, t) \rangle$

$$\frac{dC_{ij}^{rub}}{dt} = S_{jl}C_{il}^{rub} - S_{il}C_{lj}^{rub} + 2\frac{\chi_i\chi_n}{\chi^2}S_{nl}C_{lj}^{rub} - \frac{\chi_l\Omega_l}{\chi^2}\varepsilon_{ink}\chi_n C_{kj}^{rub} + i\chi_l B_l (\Phi_{ij}^B - \Phi_{ij}) + \varepsilon_{Hk_l} B_l \varepsilon_{j\alpha\beta} \chi_\alpha C_{i\beta}^{rub} - (\nu + \eta)\chi^2 C_{ij}^{rub}$$

Спиральность

Спиральность $H(\chi, t) = \langle \mathbf{u}' \cdot \text{rot } \mathbf{u}' \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & -i\varepsilon_{inj}k_l S_{ln} \Phi_{ij} - i\varepsilon_{inj}k_n S_{jl} \Phi_{il} - i\varepsilon_{inj}k_n S_{il} \Phi_{lj} - \\ & -i\varepsilon_{inj}k_n \frac{k_l \Omega_l}{k^2} (\varepsilon_{jmk} k_m \Phi_{ik} + \varepsilon_{imk} k_m \Phi_{kj}) + \\ & + k_l B_l \varepsilon_{inj} k_n (C_{ij}^{ub} - C_{ji}^{ub*}) - 2\nu k^2 H \end{aligned}$$

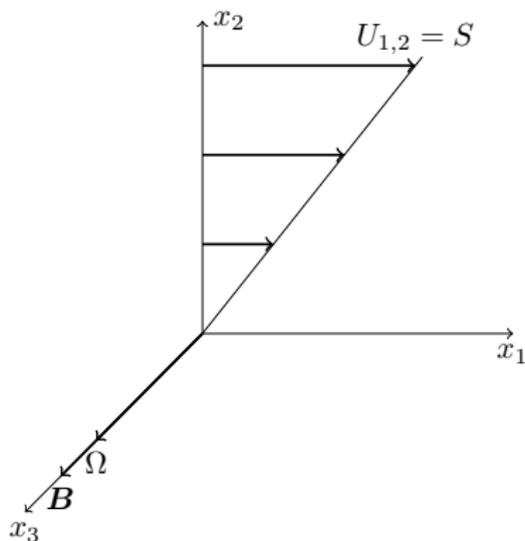
Токовая спиральность $H^J(\chi, t) = \langle \mathbf{b}' \cdot \text{rot } \mathbf{b}' \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{dH^B}{dt} = & -i\varepsilon_{inj}k_l S_{ln} \Phi_{ij}^B + i\varepsilon_{inj}k_n S_{jl} \Phi_{il}^B + i\varepsilon_{inj}k_n S_{il} \Phi_{lj}^B - \\ & -k_l B_l \varepsilon_{inj} k_n (C_{ij}^{ub} - C_{ji}^{ub*} - i\epsilon_H \varepsilon_{j\alpha\beta} k_\alpha \Phi_{i\beta}^B - i\epsilon_H \varepsilon_{i\alpha\beta} k_\alpha \Phi_{j\beta}^B) - 2\eta k^2 H^B \end{aligned}$$

Перекрестная спиральность $H^{\text{cross}}(\chi, t) = \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{b}' \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{dH^{\text{cross}}}{dt} = & S_{il} (C_{il}^{ub} - C_{li}^{ub}) - \frac{k_l \Omega_l}{k^2} \varepsilon_{ink} k_n C_{ki}^{ub} + i k_l B_l (\Phi_{ii}^B - \Phi_{ii}) + \\ & + \epsilon_H k_l B_l \varepsilon_{i\alpha\beta} k_\alpha C_{i\beta}^{ub} - (\nu + \eta) k^2 H^{\text{cross}} \end{aligned}$$

Линейный сдвиг



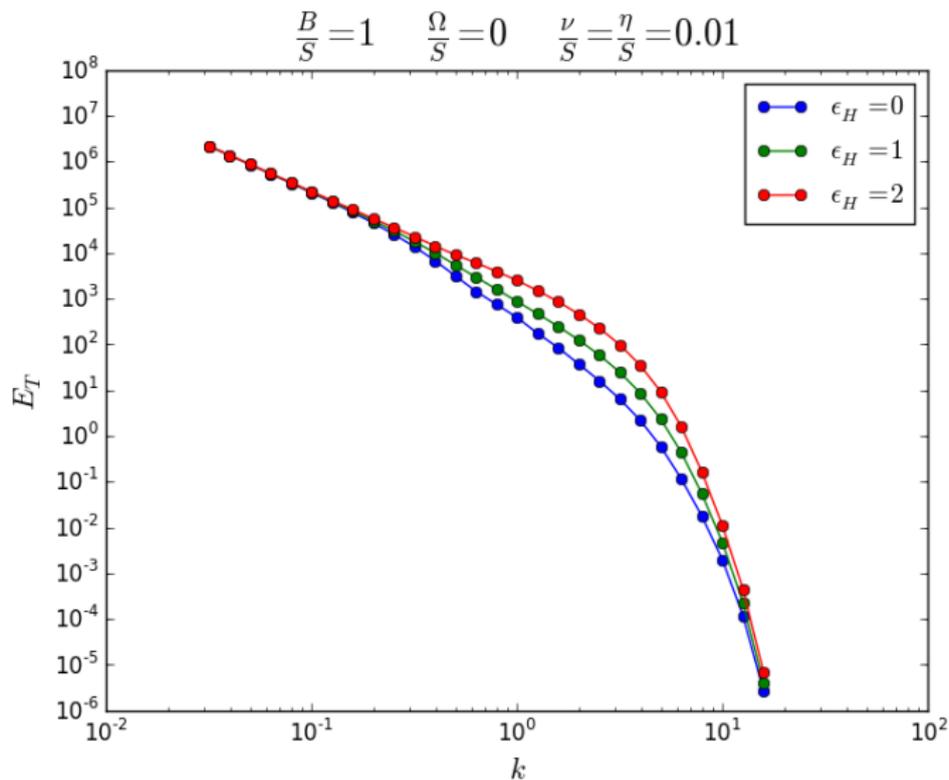
$$S_{ij} = S\delta_{i1}\delta_{j2}$$

$$B = (0, 0, B)$$

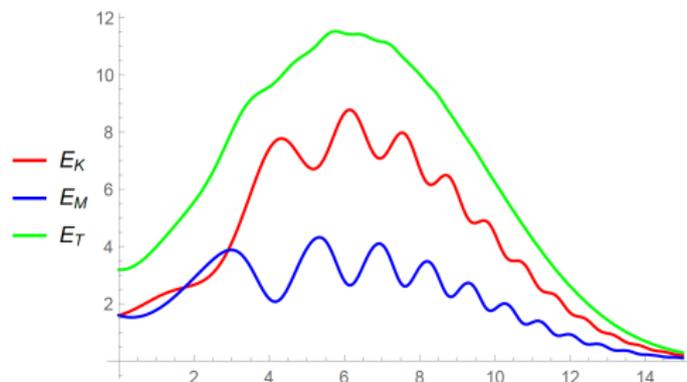
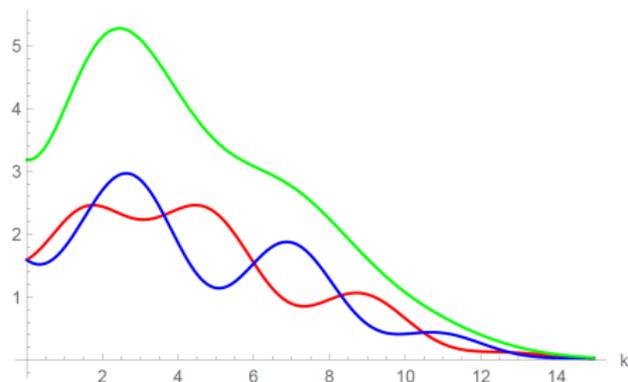
$$\Omega = (0, 0, \Omega)$$

Результаты расчетов

Спектры полной энергии

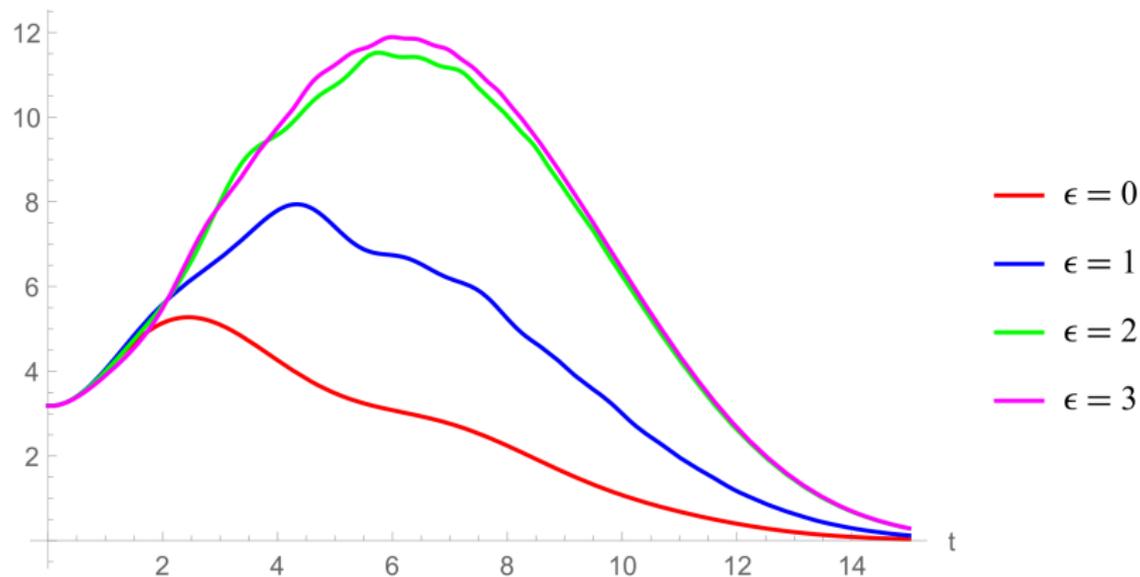


Результаты расчетов



Зависимость энергии от времени при $\epsilon = 0$ и $\epsilon = 1$

Результаты расчетов



Заключение

Заключение

- получена замкнутая система уравнений для вторых моментов турбулентности
- получены уравнения для гидродинамической, перекрестной и токовой спиральности

Планы

- в рамках теории исследовать поведение турбулентности при наличии различных искажающих факторов