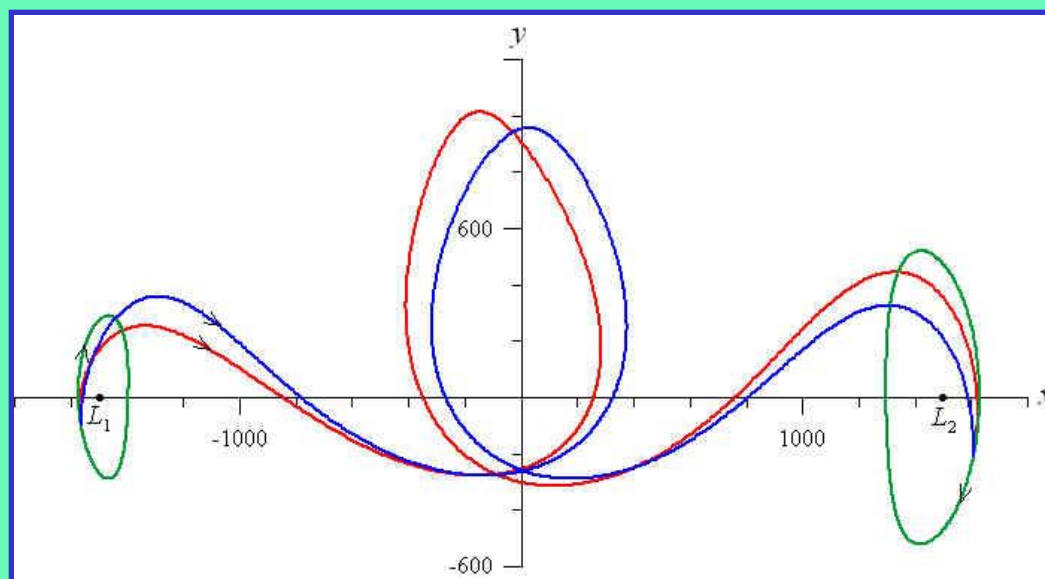


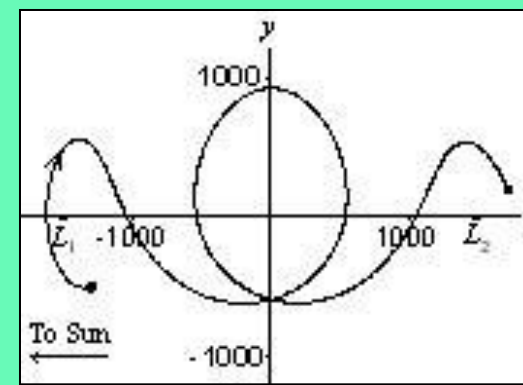
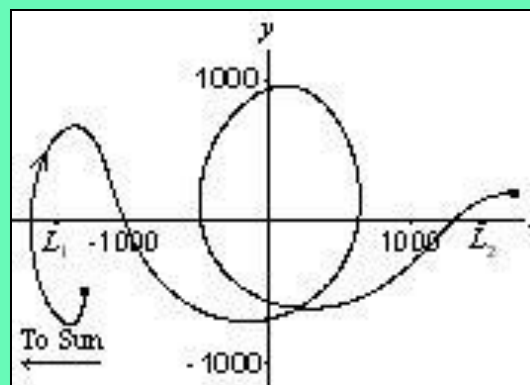
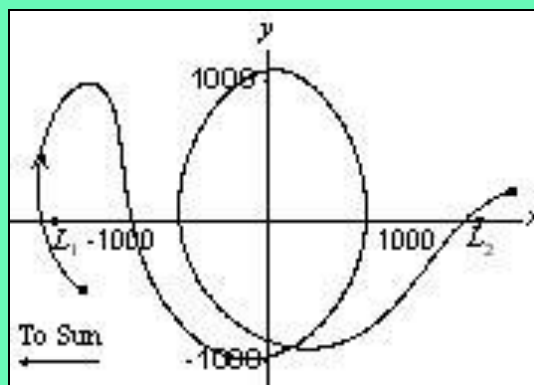
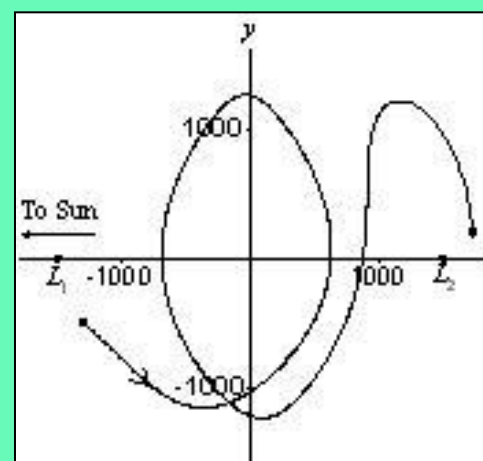
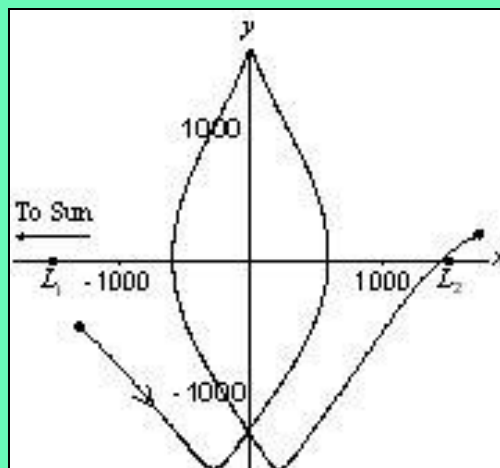
РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ХИЛЛА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЕТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ



А.А. Суханов
ИНПЕ
Сан Жозе дус Кампус
Бразилия
sasha.su@hotmail.com

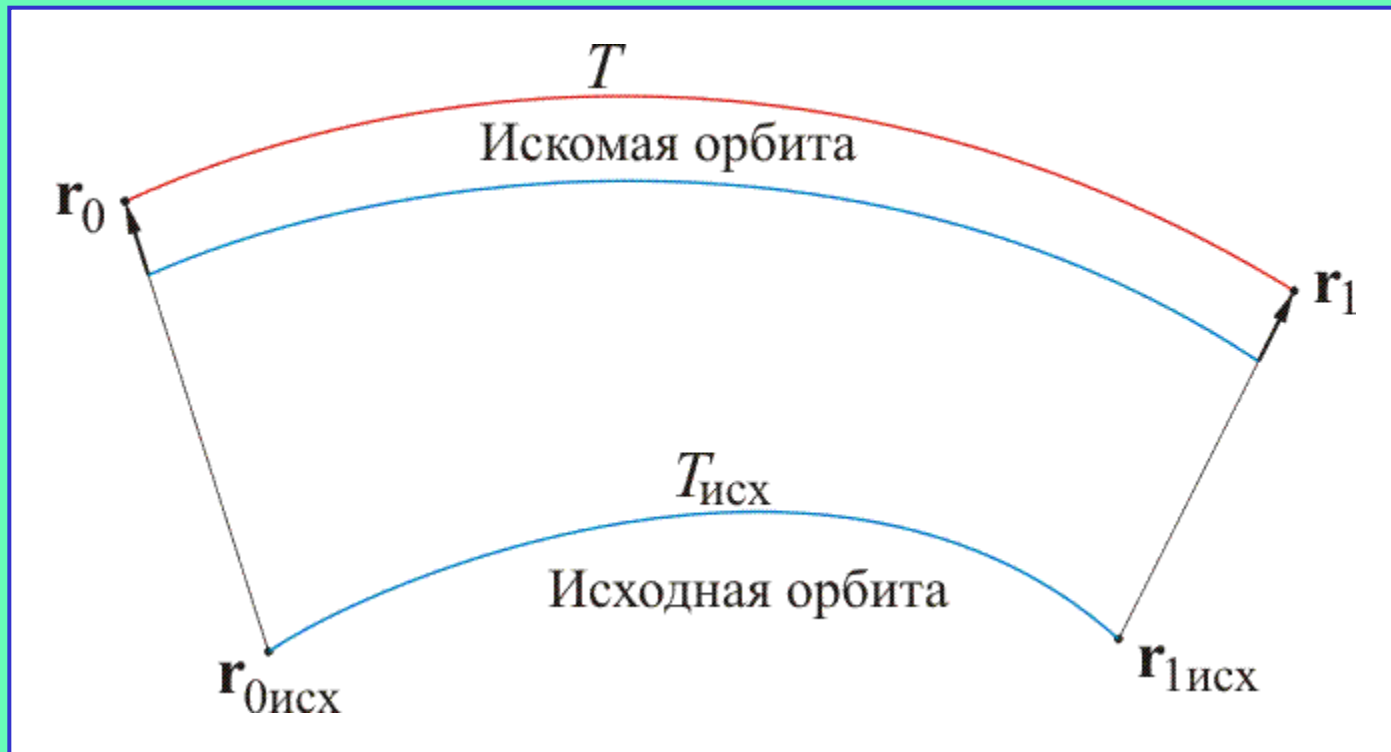
Краевая задача: Найти орбиту перелета между двумя заданными положениями в пространстве за заданное время

Пример множественности решений:



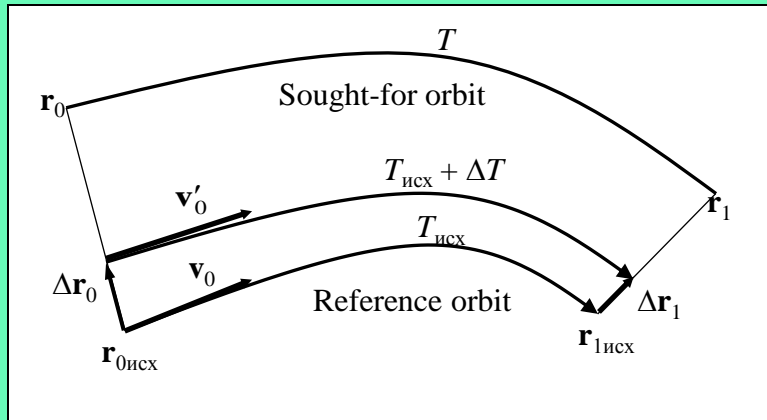
Предлагаемый подход к решению краевой задачи

- Задаются характерные образцы орбит разных типов (исходные орбиты)
- Применяется некая пошаговая математическая процедура перехода от исходной орбиты к орбите между двумя заданными положениями с заданным временем перелета



Математическая процедура

Шаг: задаются $\Delta \mathbf{r}_0 = \varepsilon(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{0\text{ref}})$, $\Delta \mathbf{r}_1 = \varepsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{1\text{ref}})$, $\Delta T = \varepsilon(T - T_{\text{ref}})$
 $0 < \varepsilon < 1$



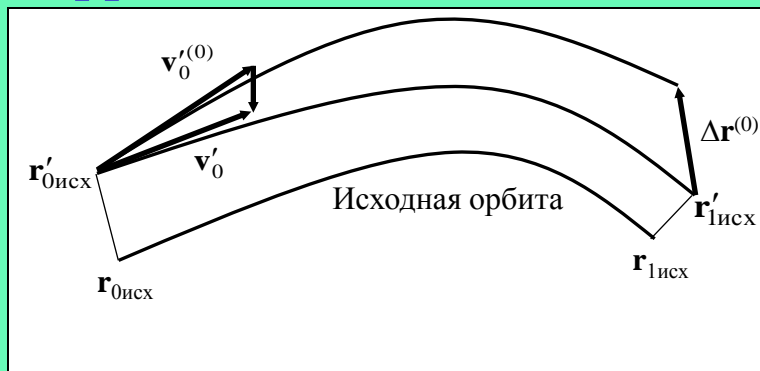
Матрица изохронных производных:

$$\Phi = \Phi(T_{\text{ref}}, 0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \Phi_{11} \Delta \mathbf{r}_0 + \Phi_{12} (\mathbf{v}'_0 - \mathbf{v}_0) + \mathbf{v}_1 \Delta T$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}'_0^{(0)} = \mathbf{v}_0 + \Phi_{12}^{-1} (\Delta \mathbf{r}_1 - \Phi_{11} \Delta \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_1 \Delta T)$$

Коррекция методом Ньютона



$$\mathbf{v}'_0^{(n+1)} = \mathbf{v}'_0^{(n)} - \left(\Phi_{12}^{(n)} \right)^{-1} \Delta \mathbf{r}^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

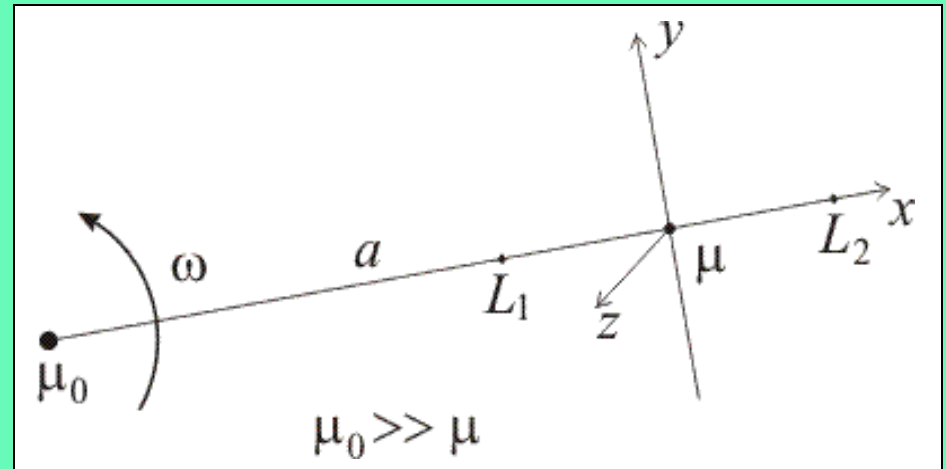
Величина ε должна обеспечить сходимость метода Ньютона

Модель движения Хилла

Уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \omega^2 \mathbf{N} \mathbf{r} + 2\omega \mathbf{M} \mathbf{v} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



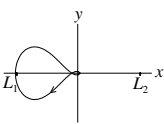
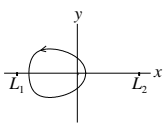
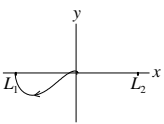
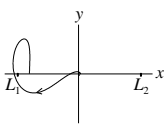
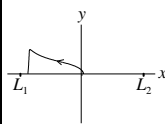
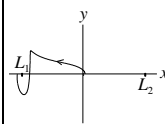
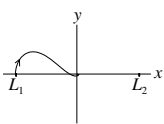
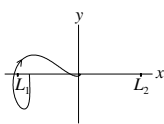
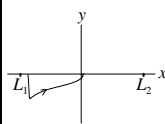
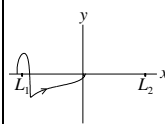
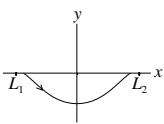
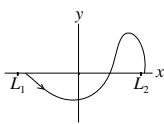
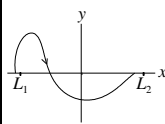
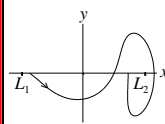

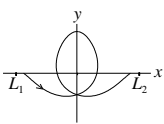
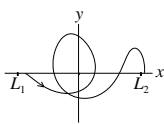
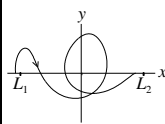
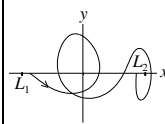
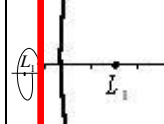
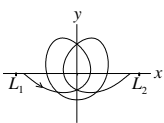
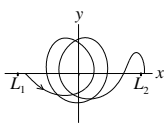
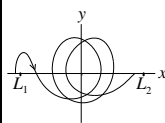
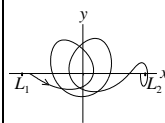

Матрица изохронных производных:

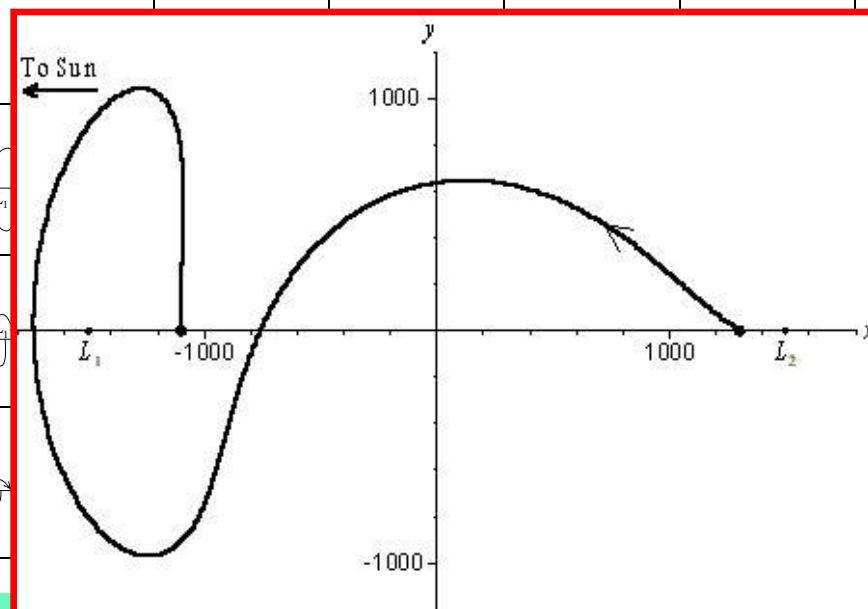
$$\dot{\Phi} = \mathbf{F} \Phi, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_3 \\ \omega^2 \mathbf{N} + \mathbf{G} & 2\omega \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}^T}{r^2} - \mathbf{I}_3 \right)$$

Коллинеарные точки либрации L_1 и L_2 :

$$\mathbf{r}_L = \{x_L, 0, 0\}, \quad x_L = \pm a \left(\frac{\mu}{3\mu_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \pm 1496.56 \times 10^3 \text{ км} \quad \text{для с.-з. системы}$$

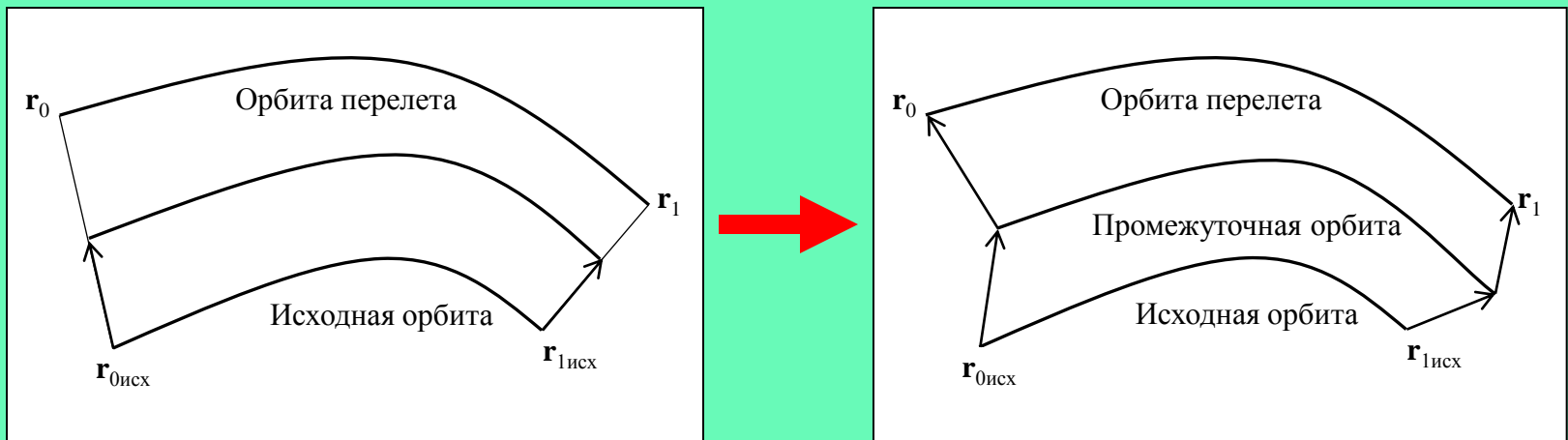
Исходные орбиты для модели Хилла

Тип перелета	Число витков	Тип орбиты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
EE	0			—	—	—	—	—	—	—
EL	0					—	—	—	—	—
LE	0									
LL	0									
	1									
	2									



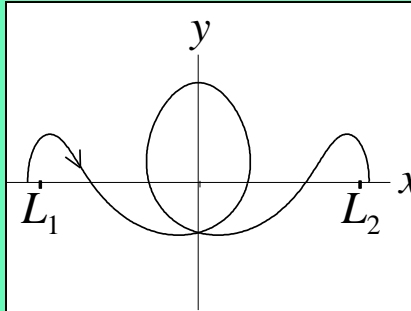
Предложенный метод не приводит к искомому решению, если:

- Перелет данного типа между заданными положениями невозможен
- Перелет данного типа за заданное время невозможен
- Орбита перелета данного типа между заданными положениями за заданное время существует, однако предложенная процедура не обеспечивает сходимость к этой орбите



Примеры: Перелет между двумя заданными положениями за заданное время

Исходная орбита:



$$\mathbf{r}_0 = \{-1400, -800, 300\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{1800, -500, -200\}$$

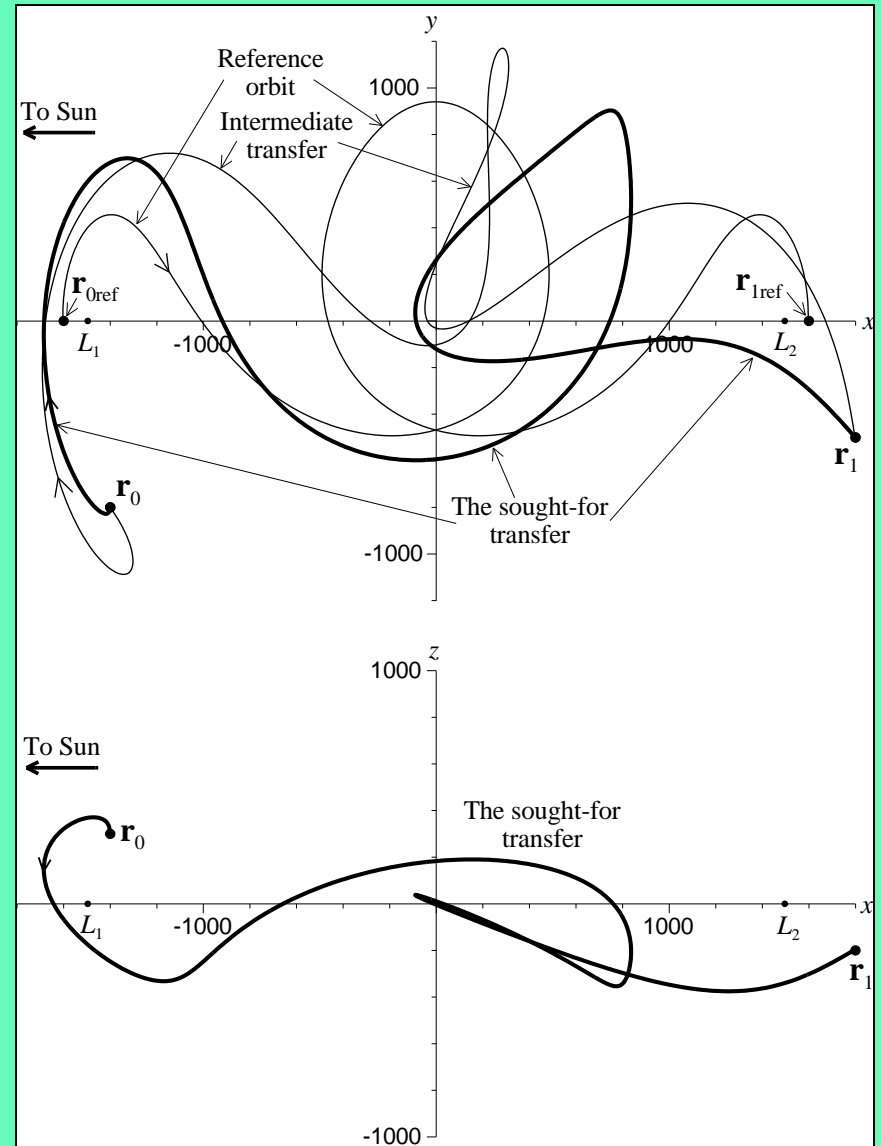
$$T = 300 \text{ дней}$$

Промежуточная орбита:

$$\mathbf{r}_0 = \{-1400, -800, 0\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{1800, -500, 0\}$$

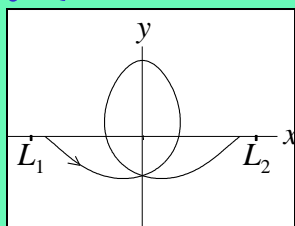
$$T = 260 \text{ дней}$$



Примеры: Построение периодической орбиты

Найти плоскую орбиту вокруг Земли с периодом 5-6 месяцев, проходящую через точку $\{-200, 1200, 0\}$

Исходная орбита:



$T = 330$ дней

1. $\mathbf{r}_0 = \{-200, 1200, 0\}$

$\mathbf{r}_1 = \{200, 1200, 0\}$

$T = 300$ дней

2. $T = 330$ дней

3. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{-200, 1200, 0\}$

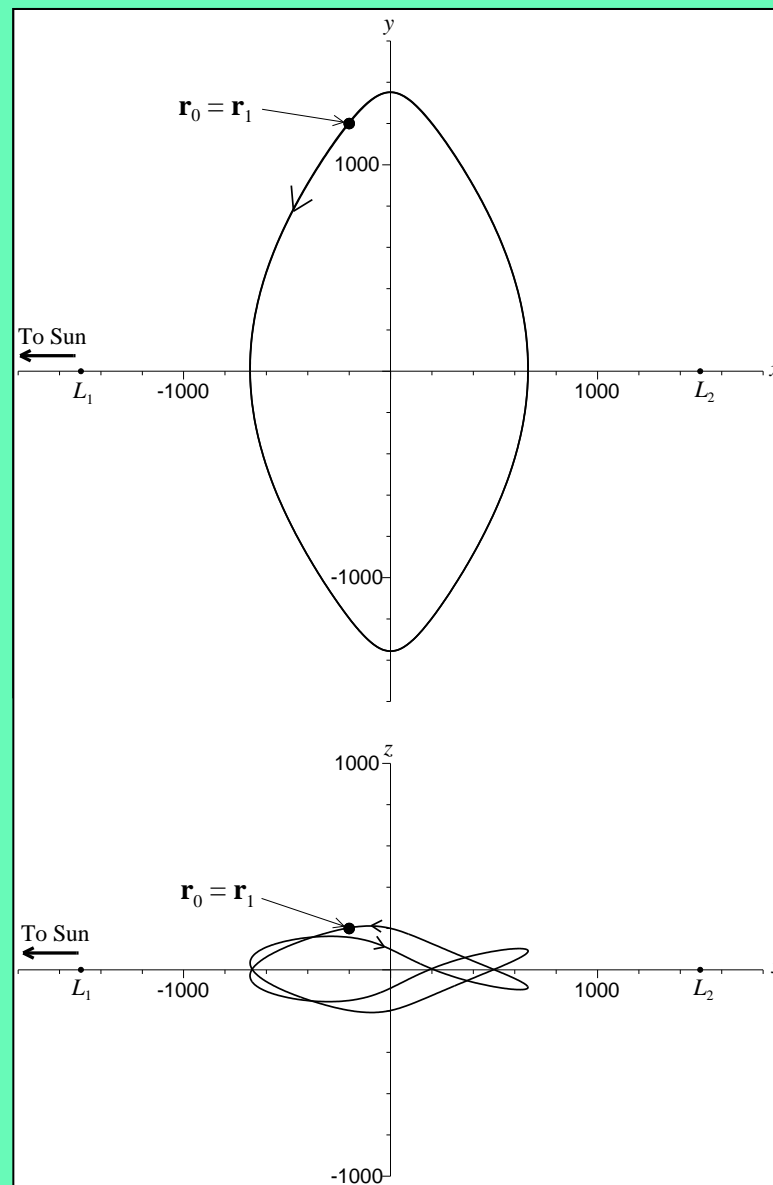
$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$

$P = 167.36$ дней

4. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{-200, 1200, 200\}$

$\mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$

$P \approx 340$ дней



Примеры: Построение гало-орбиты

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 = \{x_{L_1} - 200, 0, 0\} = \{-1296.56, 0, 0\}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$$

$$P \approx 180 \text{ дней}$$

Исходная орбита:

180-суточный фрагмент
орбиты

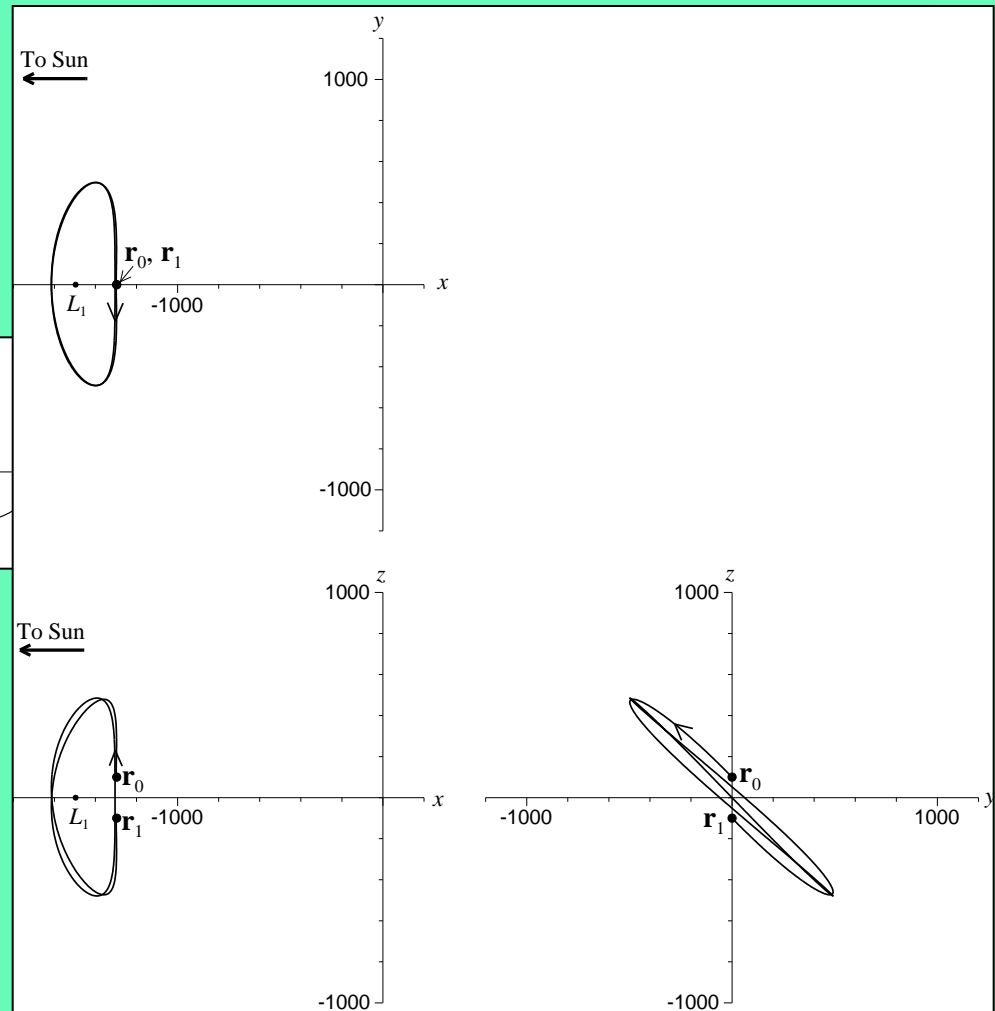
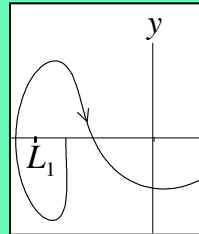
$$P = 178.295 \text{ дней}$$

Пространственная гало-орбита:

$$\mathbf{r}_0 = \{-1296.56, 0, 100\}$$

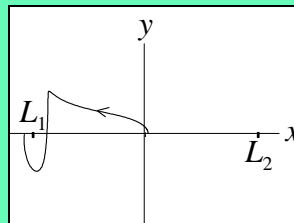
$$\mathbf{r}_1 = \{-1296.56, 0, -100\}$$

$$T_{\text{ref}} = 2P, T = 358 \text{ дней}$$



Примеры: Перелет Земля – гало-орбита

Исходная орбита:



$$\mathbf{r}_0 = \{7, 0, 0\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-1350, 800, 0\}$$

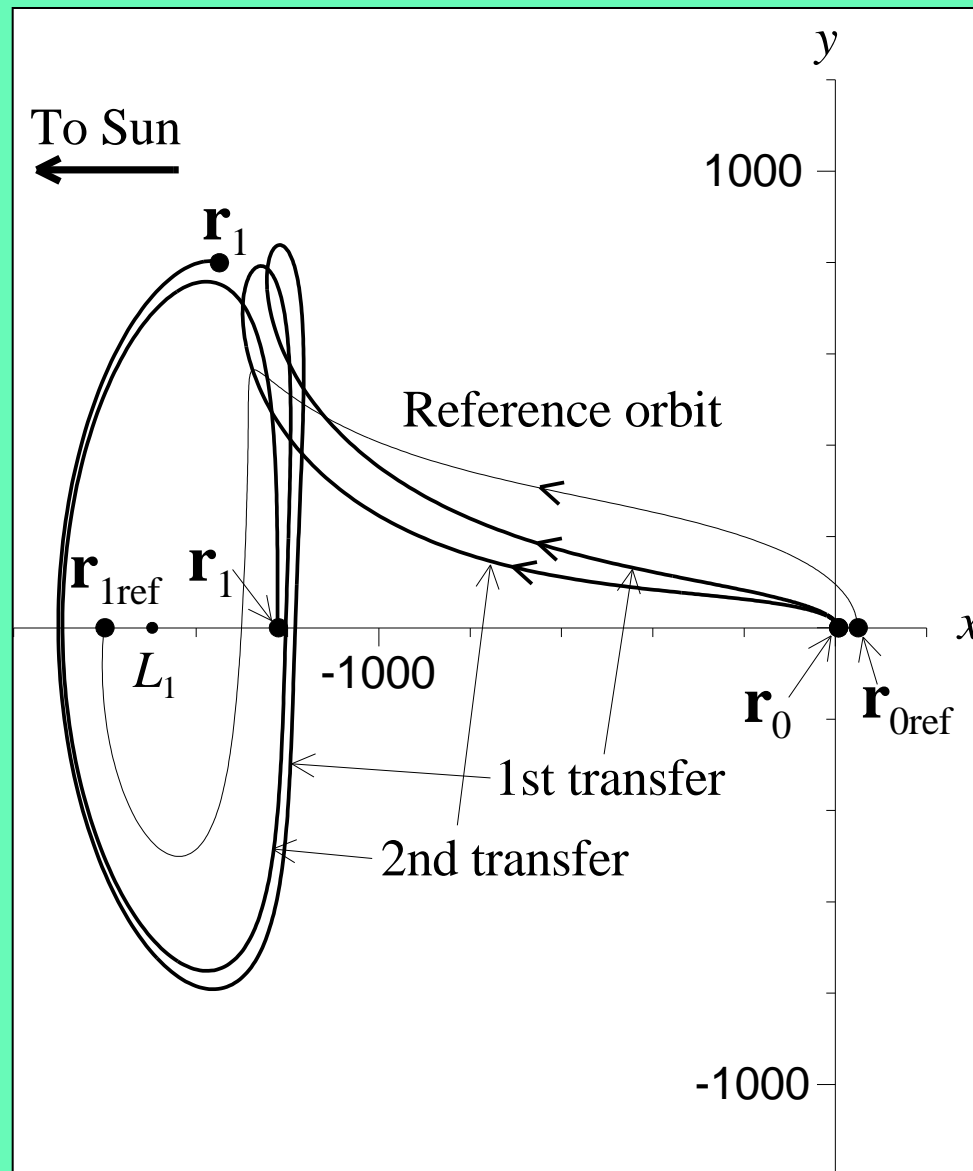
$$T = 235 \text{ дней}$$

Затем:

$$\mathbf{r}_1 = \{-1220, 0, 0\}$$

$$T = 280 \text{ дней}$$

И т.д.



Примеры: Перелет между гало-орбитами вокруг L_1

Гало-орбиту

$$\mathbf{x}_0 = \{x_L - \Delta x_0,$$

Первая гало

$$x_L = -1500, \Delta$$

$$v_0 = 155.1 \text{ м/}$$

Вторая гало

$$x_L = -1500, \Delta$$

$$v_0 = 254.3 \text{ м/}$$

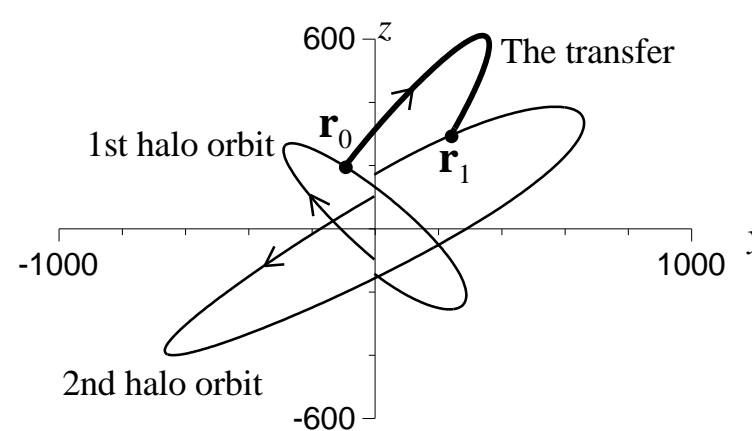
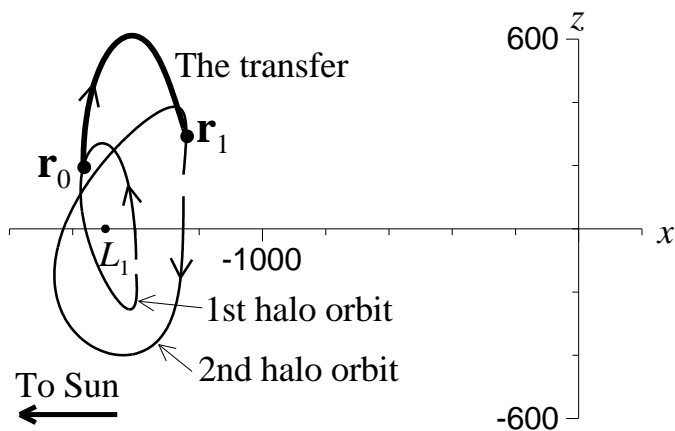
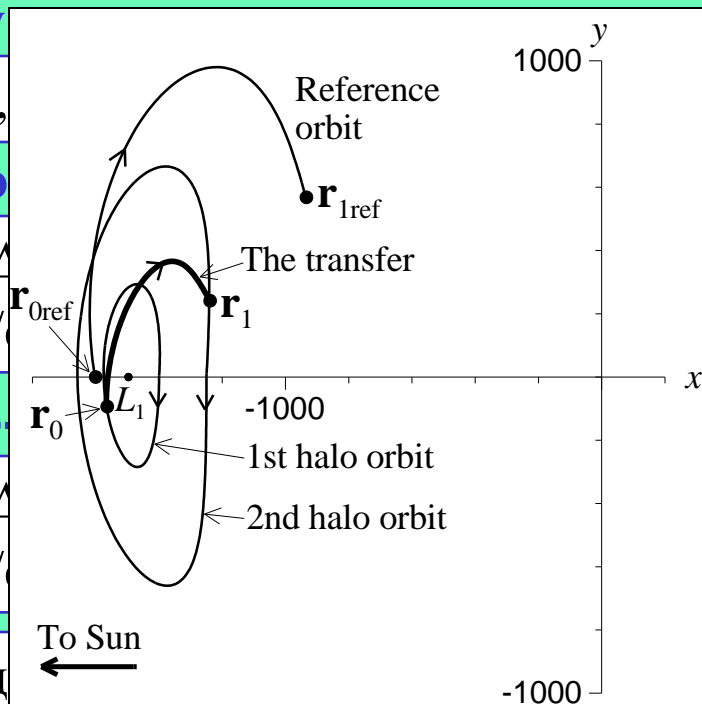
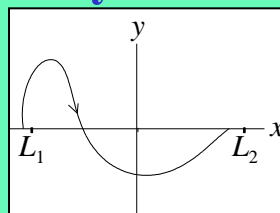
\mathbf{r}_0 через 80 д

\mathbf{r}_1 через 170

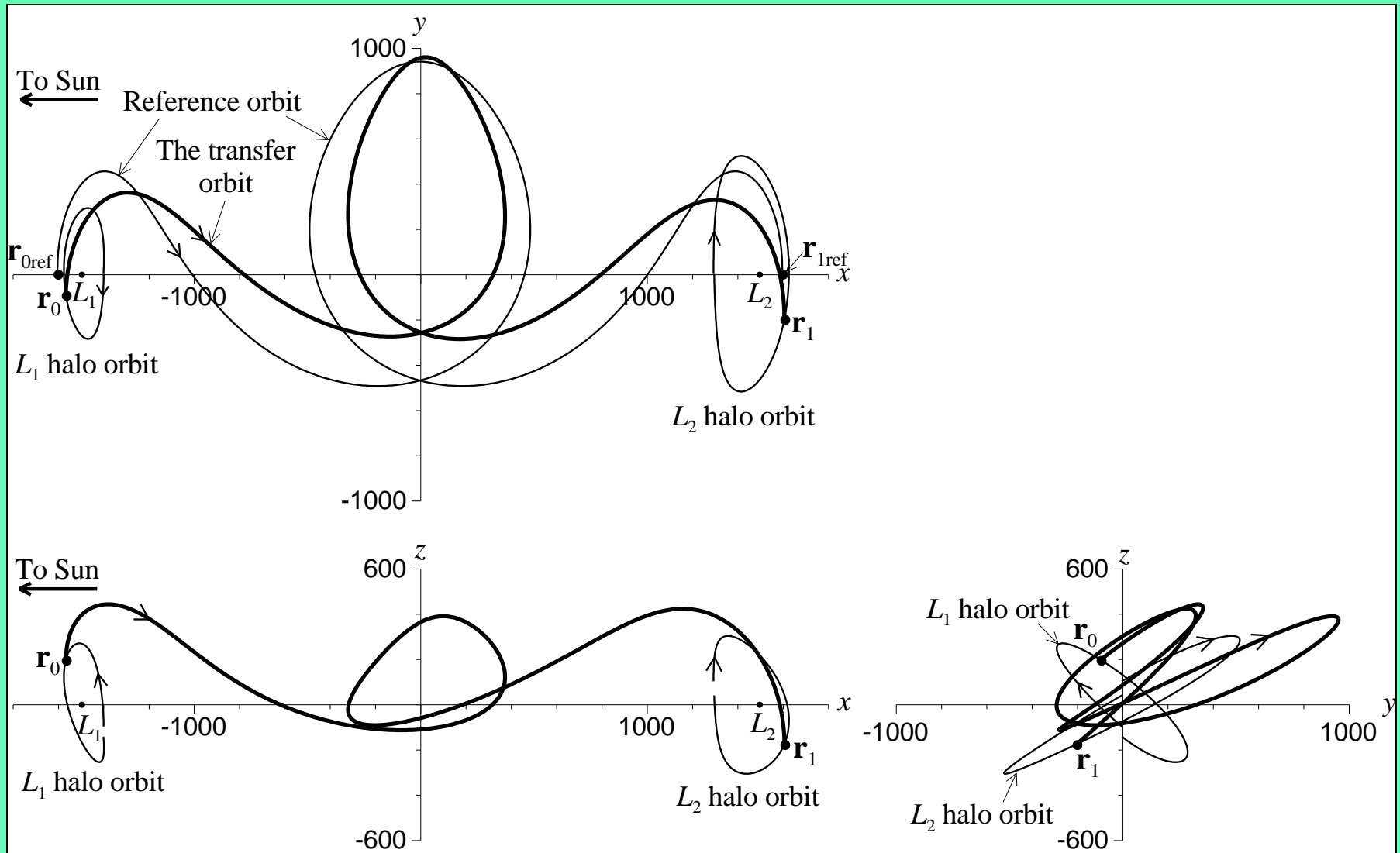
$T = 70$ дней

Исходная ор

70-суточный



Примеры: Перелет между гало-орбитами вокруг L_1 и L_2



$T = 220$ дней

Примеры: Построение семейства орбит

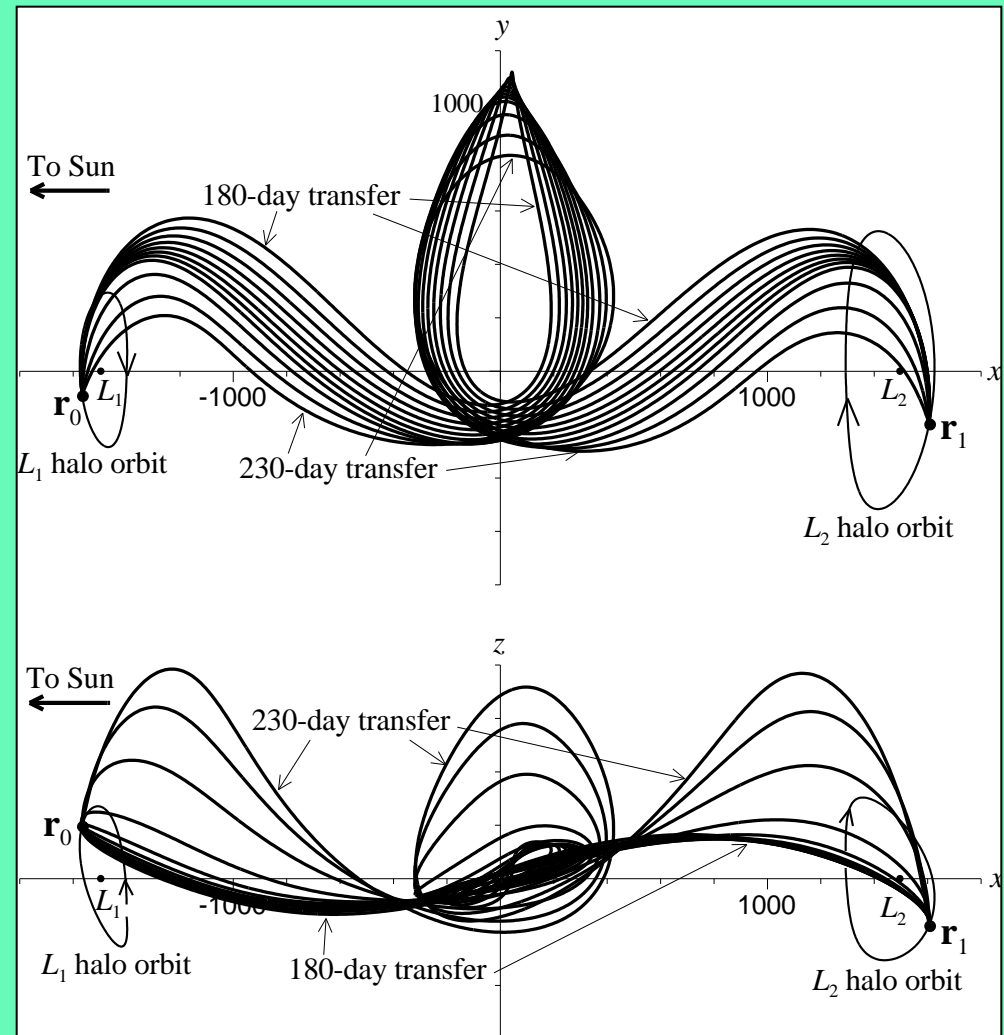
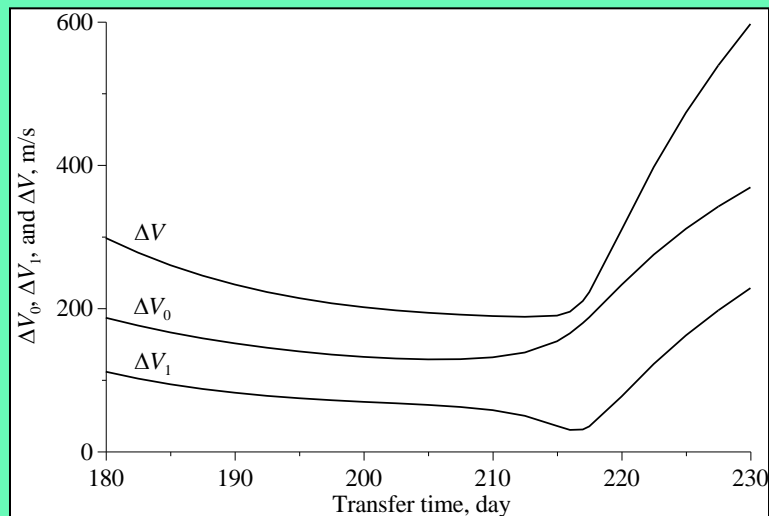
Нахождение орбит перелета между положениями \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_1 за время $T \in [T_0, T_1]$ с шагом ΔT .

Каждая из орбит служит начальным приближением для следующей орбиты

$T_0 = 180$ дней

$T_1 = 230$ дней

$\Delta T = 5$ дней

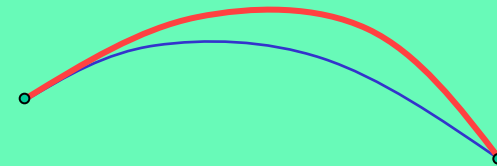


Метод транспортирующей траектории

В.В. Белецкий, В.А. Егоров, Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности, *Космические исследования*, 1964, № 3

Метод приближенной оптимизации перелетов с идеально регулируемой малой тягой между двумя заданными положениями, основанный на линеаризации траектории перелета около некоторой близкой опорной орбиты (транспортирующей траектории).

- Орбитальная система координат
- Постоянная мощность тяги
- Решение частично в квадратурах
- Приемлемая точность только при небольшой угловой дальности



Метод транспортирующей траектории

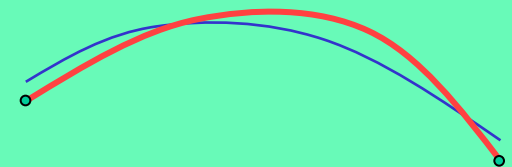
А.А. Суханов, Оптимизация перелетов с малой тягой, *Космические исследования*, 1999, № 2

А.А. Суханов, Оптимизация межпланетных перелетов с малой тягой, *Космические исследования*, 2000, № 6

А.А. Суханов, А.Ф.Б. де А. Прадо, Модификация метода транспортирующей траектории, *Космические исследования*, 2004, № 1

А.А. Суханов, А.Ф.Б. де А. Прадо, Оптимизация перелетов при ограничениях на направление тяги. I, II, *Космические исследования*, 2007, № 5, 2008, № 1

- Инерциальная система координат
- Полностью аналитическое решение для постоянной мощности
- Решение в квадратурах для произвольного закона изменения мощности
- Ненулевые конечные смещения транспортирующей траектории, повышающие точность аппроксимации
- Возможность частично заданных граничных условий
- Возможность получения любой требуемой точности вычислений, в том числе при перелетах с большой угловой дальностью (включая многовитковые орбиты)
- Возможность облета нескольких небесных тел
- Применение при линейных ограничениях на направление тяги



Метод транспортирующей траектории

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\alpha^2}{\psi} dt$$

– уравнение движения, $\mathbf{g} = \{\mathbf{0}, \alpha\}$

– граничные условия

– минимизируемый функционал

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$$

– решение уравнения $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$

– граничные условия на транспортирующей траектории

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{F}\xi + \mathbf{g}$$

$$\xi(t_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \xi_0, \quad \xi(t_1) = \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \xi_1$$

$$\xi = \xi(t) = \Phi(t, t_0) \xi_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau$$

α – вектор реактивного ускорения КА (тяга)

$N = N_0 \psi$ – мощность,

$\psi = \psi(r, t), \quad \psi(r_0, t_0) = 1$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \dot{\Phi} = \mathbf{F}\Phi$$

Метод транспортирующей траектории

$$\Delta = \Psi_1 \xi_1 - \xi_0$$

$$S = S(t_0, t) = \int_{t_0}^t \psi \Psi_v \Psi_v^T dt, \quad S_1 = S(t_0, t_1)$$

При постоянной мощности
матрица S вычисляется
аналитически

$$\alpha = \psi \Psi_v^T S_1^{-1} \Delta$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \Phi (\xi_0 + S S_1^{-1} \Delta)$$

$$J = \frac{1}{2} \Delta^T S_1^{-1} \Delta$$

$\Psi = \Psi(t, t_0) = \Phi^{-1}(t, t_0)$ – сопряженная
матрица

$$\dot{\Psi} = -\Psi F, \quad \Psi(t_0, t_0) = I$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_r & \Psi_v \end{bmatrix}$$

Свойства:

- Матрица $S = S(t, t + \Delta t)$ является невырожденной положительно определенной для любых значений t и $\Delta t > 0$
- Оптимальная тяга может обращаться в нуль лишь в изолированных точках, причем в этих точках знак тяги меняется на противоположный (т.е. эти точки являются точками переключения) и число таких точек конечно

Достижение любой заданной точности

Интервал времени полета разбивается на n подынтервалов и МТТ применяется к каждому подынтервалу в отдельности

Проблема заключается в нахождении граничных условий ξ_1, \dots, ξ_{n-1} для подынтервалов

$\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ – вектор размерности $6n - 6$

$$J = \sum_{i=1}^n J_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta_i^T \mathbf{S}_i^{-1} \Delta_i, \quad \frac{\partial J}{\partial \Xi} = \mathbf{0}$$

\Rightarrow

$$\Xi = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{d}$$

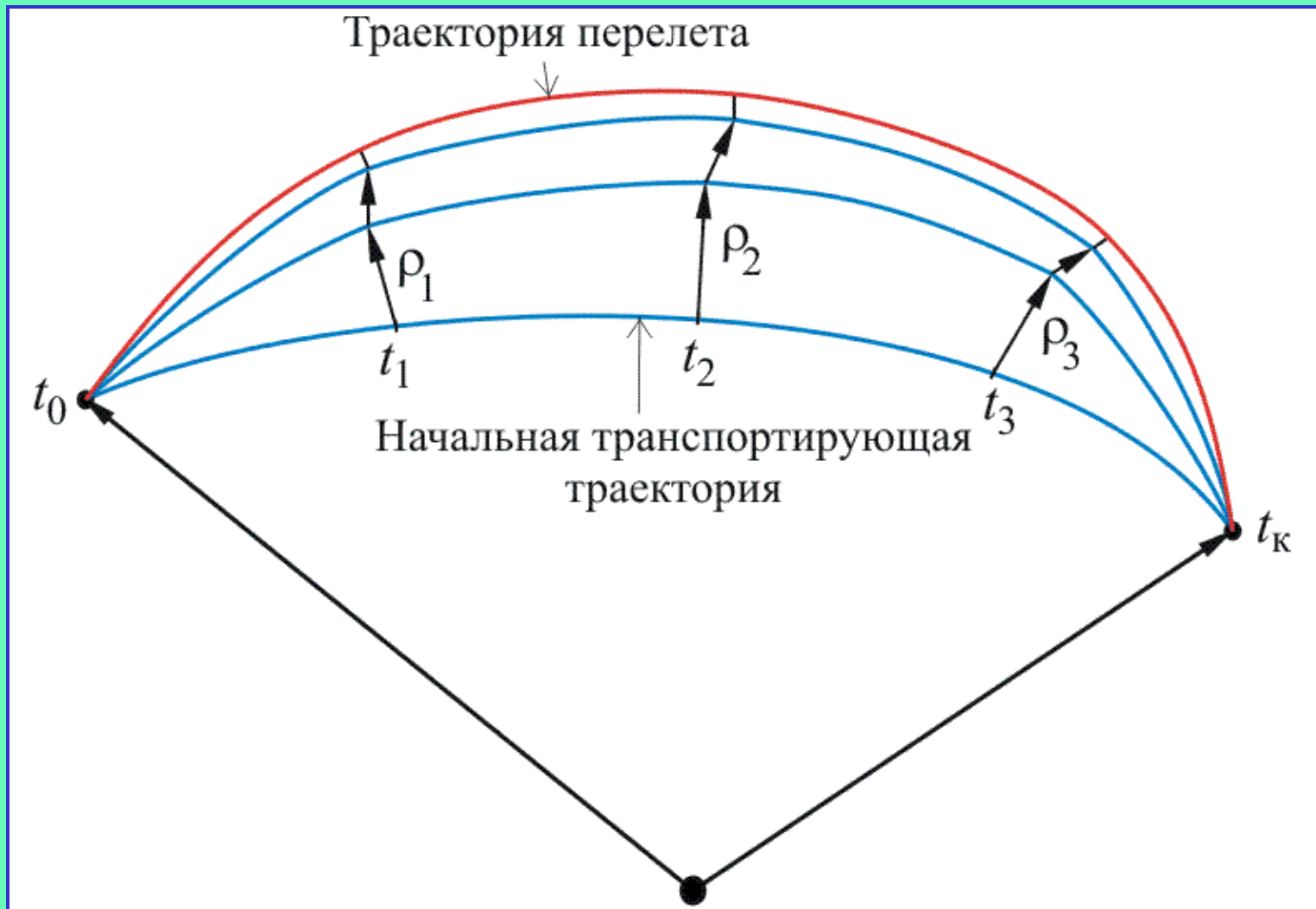
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & -\mathbf{E}_2 & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_2^T & \mathbf{D}_2 & -\mathbf{E}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}_3^T & \mathbf{D}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{D}_{n-3} & -\mathbf{E}_{n-2} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\mathbf{E}_{n-2}^T & \mathbf{D}_{n-2} & -\mathbf{E}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0} & -\mathbf{E}_{n-1}^T & \mathbf{D}_{n-1} \end{bmatrix}$$

– симметричная
матрица порядка
 $6n - 6$

$\mathbf{D}_i, \mathbf{E}_i$ – матрицы 6-го порядка, вычисляемые на i -м подынтервале

Достижение любой заданной точности

$$\Xi = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}, \quad \Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}, \quad \xi_i = \{\rho_i, \eta_i\}$$



Частично заданные граничные условия

- Начальная или конечная скорость может выбираться произвольно
- Начальная или (и) конечная скорость задана по величине, а направление может выбираться произвольно

МТТ применяется на всем интервале: незадаанные величины находятся из условий трансверсальности

Интервал времени разбивается на подынтервалы: незадаанные величины включаются в неизвестный вектор граничных условий \mathbf{E}

Пролет нескольких небесных тел

Малые тела: скорости пролета находятся в явном виде из системы линейных алгебраических уравнений

Массивные тела: скорости пролета являются решением системы нелинейных алгебраических уравнений

Ограничения на направление тяги

Ограничения задаются в виде:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0) = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0) \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{c} \quad \text{или} \quad \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^0 \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^0 \geq \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\alpha}^0$ – **единичный вектор направления тяги**

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0), \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t, \boldsymbol{\alpha}^0)$$

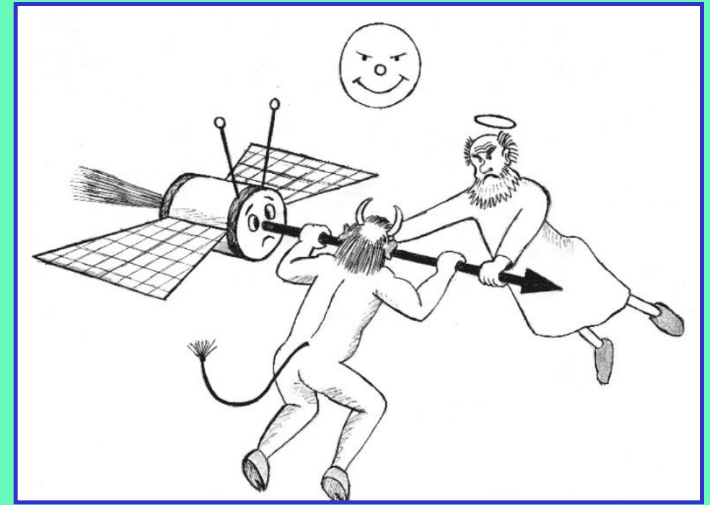
$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}$$

– проективная матрица

$$\mathbf{S}_1 = \int_{t_0}^{t_1} \psi \boldsymbol{\Psi}_v \mathbf{P} \boldsymbol{\Psi}_v^T dt$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \psi \mathbf{P} \boldsymbol{\Psi}_v^T \mathbf{S}_1^{-1} \Delta$$



Способы вычисления необходимых компонентов

Задача двух тел

- Матрицы Φ, Ψ вычисляются аналитически
- Матрица S вычисляется аналитически или в квадратурах
- Транспортирующая траектория: кеплеровская орбита, найденная путем решения задачи Ламберта

Произвольное поле сил

- Матрицы Φ, Ψ вычисляются численным интегрированием уравнений в вариациях совместно с уравнениями движения
- Матрица S вычисляется в квадратурах
- Транспортирующая траектория является решением краевой задачи

Демонстрация метода

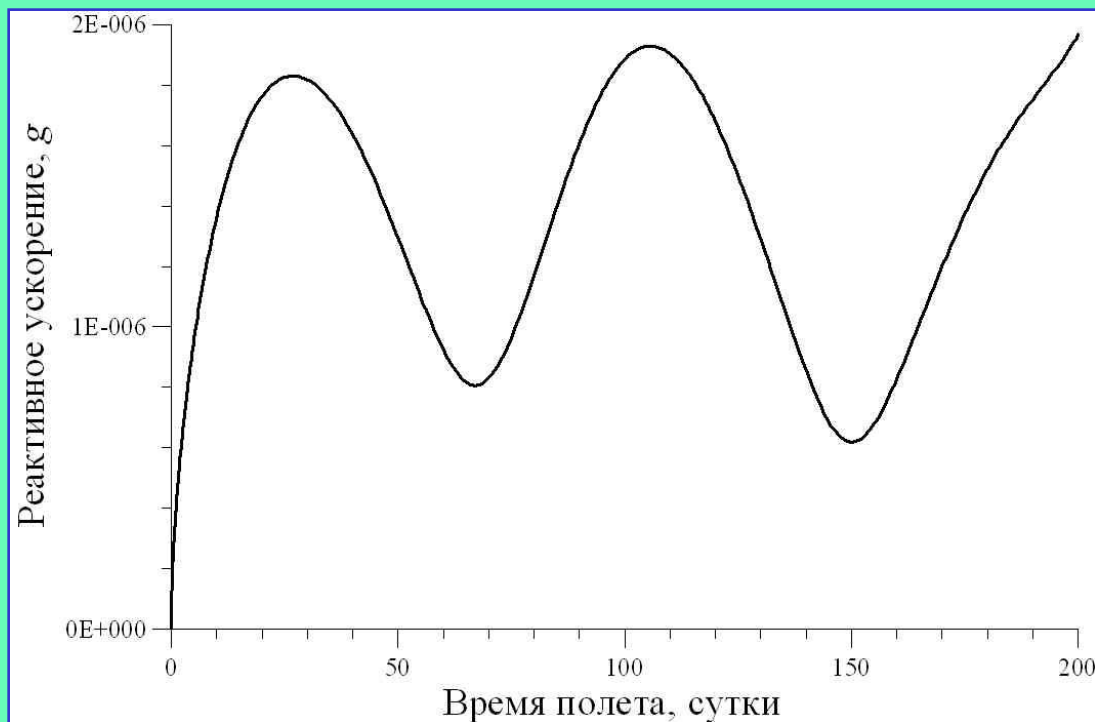
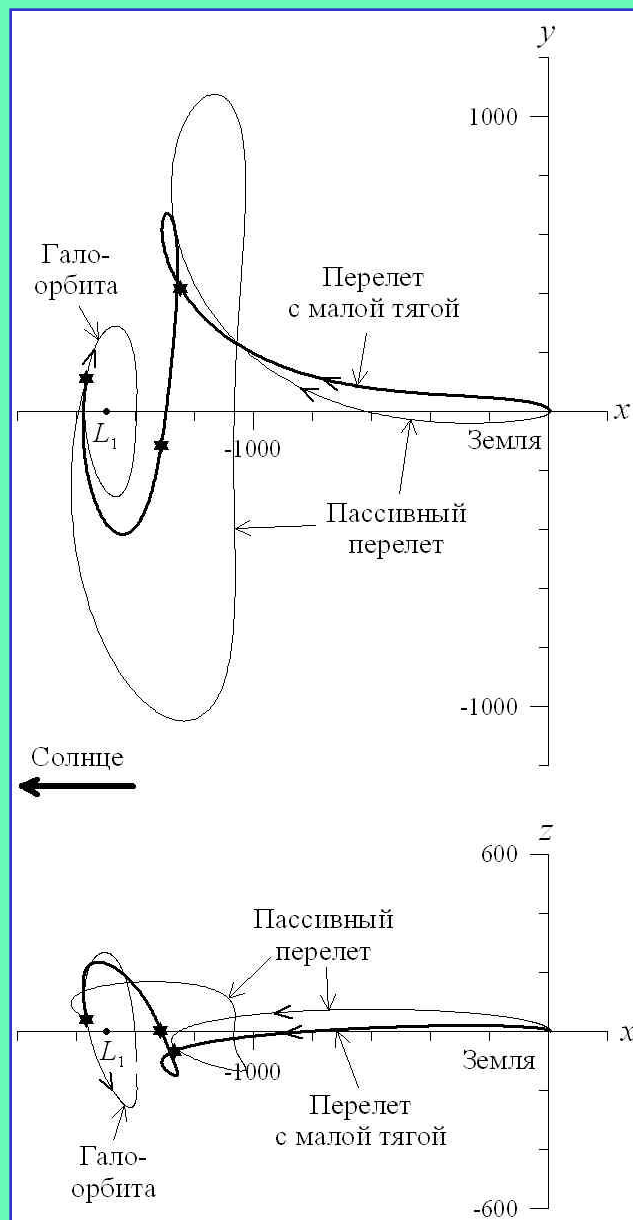


800 * 600



1280 * 1024

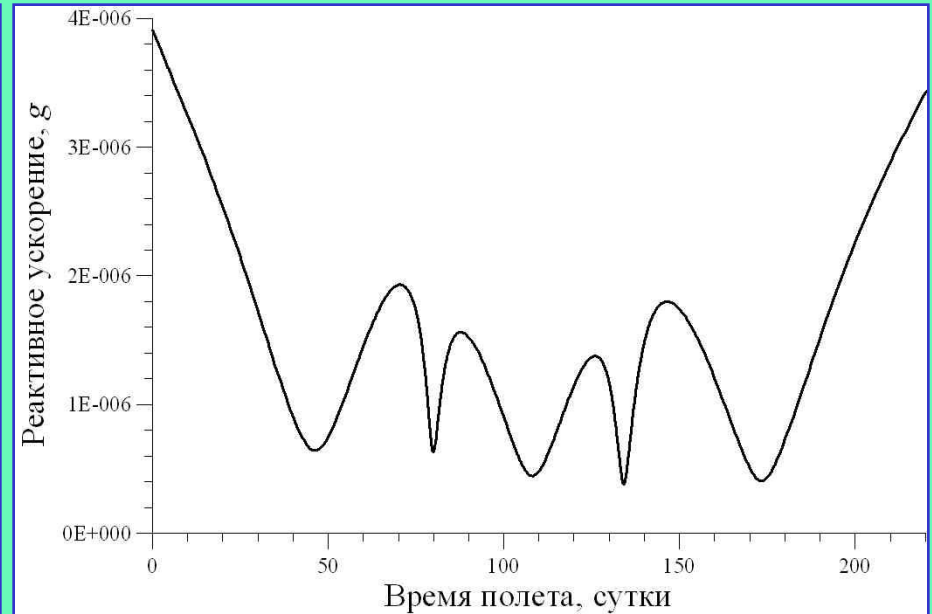
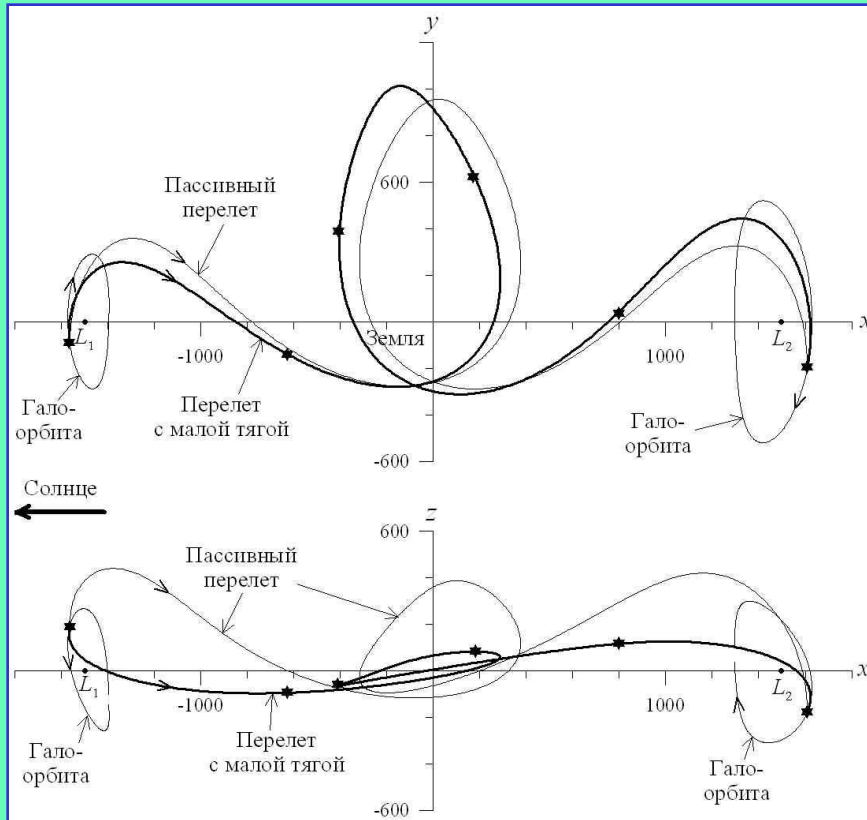
Перелет Земля – гало-орбита



Скорость старта может выбираться произвольно

- Относительная ошибка минимизируемого функционала $< 0,002$ достигается при $n = 22$**
- Плохая сходимость при $7 \leq n \leq 20$**

Перелет между гало-орбитами



- **Относительная ошибка минимизируемого функционала $< 0,002$ достигается при $n = 35$**
- **Плохая сходимость при $n \geq 15$**

Ограничение на направление тяги

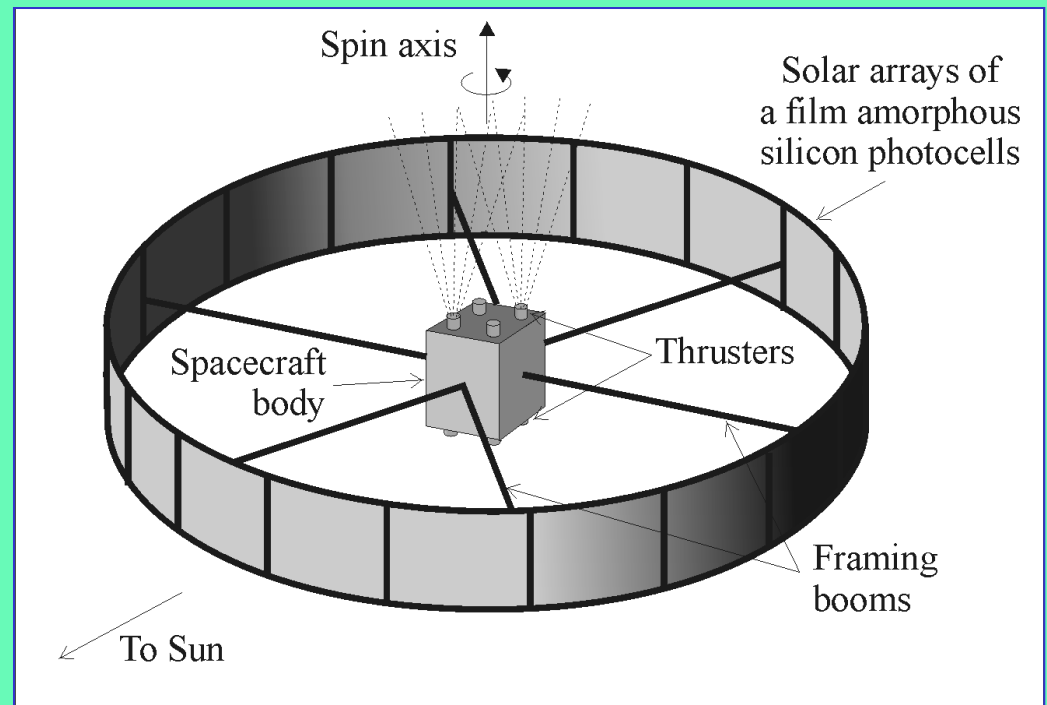
Тяга ортогональна направлению на Солнце

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Проективная матрица:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A. A. Sukhanov and N. A. Eismont, Low Thrust Transfers to Sun-Earth L_1 and L_2 Points with a Constraint on the Thrust Direction, *Proceedings of the International Conference "Libration Point Orbits and Applications"*, June 10–14, 2002, Parador D'Aiguablava, Girona, Spain

Характеристики перелетов

N_0 – начальная мощность

$$\tilde{N}_0 = N_0 / m_0$$

$$m_p = \frac{J}{\tilde{N}_0 + J} m_0$$

	Земля – L_1	$L_1 - L_2$
\tilde{N}_0 , Вт/кг	0,15	0,15
J , м ² /с ³	0,00168	0,00291
Δv , м/с	230	292
$m_{\text{пр}}/m_0$	0,011	0,019
Диапазон изменения $I_{\text{уд}}$, с	1600 – 5000	800 – 7700

Тяга ортогональна
направлению на Солнце

	Земля – L_1	$L_1 - L_2$
\tilde{N}_0 , Вт/кг	0,1	0,2
J , м ² /с ³	0,00212	0,00732
Δv , м/с	243,4	453,4
$m_{\text{пр}}/m_0$	0,042	0,073
Диапазон изменения $I_{\text{уд}}$, с	800 – 8000	500 – 6500

Величина \tilde{N}_0 выбиралась достаточно произвольно

Заключение

- Исходные орбиты соответствуют перелетам между Землей и точками либрации, однако позволяют находить перелеты между любыми точками и решать другие задачи
- Предложенный метод решения краевой задачи может использоваться как для расчета траекторий полета КА, так и для численного анализа орбит в задаче трех тел
- Вместо уравнений Хилла могут использоваться точные уравнения задачи трех тел, однако упрощенная модель позволяет находить орбиты без привязки к конкретным датам
- Метод может использоваться и в других системах небесных тел, а также для других моделей движения
- Найденное решение краевой задачи служит основой для оптимизации перелета с малой тягой методом транспортирующей траектории

Недостатки:

- В ряде случаев низкое быстроедействие
- Необходимость промежуточной орбиты в некоторых случаях
- Необходимость предварительной подготовки набора исходных орбит
- Невозможность использования гравитационных маневров у Луны в данной версии метода

Достоинства:

- Простота
- Отсутствие необходимости в начальных приближениях
- Получение орбиты заданного типа

Спасибо
за внимание